卫星轨道姿态动力学与控制

章仁为　编著

北京航空航天大学出版社

内容简介

本书以中低轨道遥感卫星和静止轨道通信卫星为重点，系统地阐述卫星轨道和姿态动力学的基本原理、轨道和姿态控制的设计思想及设计方法。主要内容包括：卫星轨道的基本特性、特殊轨道的设计，轨道摄动分析，入轨控制和轨道保持控制；卫星姿态运动特性，姿态确定，姿态稳定和机动的控制方式。内容丰富，文笔流畅，工程实用性强。

本书可作为有关高等理工科院校研究生的教材，也可供从事卫星研制和卫星应用工作的研究人员和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

卫星轨道姿态动力学与控制/章仁为编著. 一北京：北京航空航天大学出版社，1998.5

ISBN 7-81012-721-7

Ⅰ.卫… Ⅱ.章… Ⅲ.①卫星姿态-动力学②人造卫星-姿态飞行控制 Ⅳ.V412.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 10148 号

卫星轨道姿态动力学与控制

章仁为 编著

责任编辑 王小青

责任校对 李宝田

北京航空航天大学出版社出版发行

（北京学院路 37 号，100083， 发行部电话 62015720）

涿州市新华印刷厂印装 各地书店经销

开本：787×1092 1/16 印张：20.75 字数：526 千字

1998 年 8 月第 1 版 1998 年 8 月 第 1 次印刷 印数：1500 册

ISBN 7-81012-721-7/V·047 定价：32.00 元

前　言

卫星的飞行轨道和姿态指向是决定卫星应用功能的两项首要因素，是卫星总体工程设计的重要内容，直接影响卫星应用有效载荷的设计和卫星应用性能指标的制定。卫星被发射投入应用后，卫星轨道和姿态控制是卫星运营操作和管理的核心内容，直接影响卫星应用任务的实践和卫星的在轨寿命。

在地球引力场中的轨道动力学是认识、设计和控制卫星轨道飞行的理论基础。轨道特性的物理量描述是首要问题，它不仅是轨道控制工程操作的依据，而且是卫星姿态定向的参考基准。轨道摄动是轨道动力学的重要内容，是不同轨道不同特色的体现。对于轨道飞行和运营，轨道摄动起到有利和不利两方面的影响：有利影响是，由于摄动作用，某些轨道具备非常出色的性质，为卫星应用提供了良好的条件；不利影响是，轨道摄动又是轨道保持的主要障碍。轨道控制是卫星轨道运营的重要任务，根据不同轨道任务和动力学特点，建立轨道控制的模型，作为工程实现的基础。同时，基于轨道动力学的轨道定轨是控制的前提。

为实现轨道操作和完成卫星应用任务，卫星姿态应正确地定向在给定方向上或从原方向机动至另一指向或同时进行多目标指向。因此，卫星姿态定向问题与卫星的构形密切相关，是卫星系统设计的重要内容。基于刚体转动动力学的卫星姿态动力学是姿态稳定和控制的理论基础。它包含姿态的物理量描述，姿态运动的动力学分析和计算，以及多体姿态动力学的建模。作为姿态控制前提的姿态测定是基于多参考矢量定姿或状态参数估计的机理，可归纳出若干典型的工程实现模式。当今，卫星姿态控制的主要方式是基于角动量交换机理，同样可归纳出若干典型的包含动量飞轮的工程实现模式。在姿态测定、姿态动力学和姿态控制等建模的基础上，可运用古典控制或现代控制理论方法，建立高性能的卫星姿态控制系统。

本书限于地球应用卫星，并主要以中、低轨道遥感卫星和地球同步轨道通信卫星为研究对象，不涉及月球探测和行星际探测，也不涉及载人航天的两大课题

——空间交会和返回再入，但绕地球飞行的主题是共同的。

本书的原著是《静止卫星的轨道和姿态控制》(1987)。该书受到有关高等院校和卫星研制部门的普遍欢迎，作者常被告之，该书是卫星工作中常备的参考资料。作者经常接到索书和再版的询问。经同事和朋友们的鼓动，于1995年秋着手修订和补充工作。为适应空间卫星应用的发展，在书中纳入中、低轨道卫星的控制问题，将书名作了更改；同时根据教学实践，将章节作了适当调整。

针对卫星工程教学和设计的需求，本书以空间动力学与控制相结合的方式、以原理与应用相结合的方式，系统地阐述卫星轨道和姿态的理论概念以及控制方案的设计原理和方法。

本书的宗旨是为空间飞行器设计专业的研究生提供教材，为卫星研制、卫星运营和应用的科技人员提供设计参考资料。

本书得到北京航空航天大学沈士团校长、出版社许传安社长和王小青副总编的支持，作者谨向他们表示衷心感谢。

限于作者水平，文中欠妥及错误之处，敬请读者批评指正。

作　者

1997年4月于北航

目　录

第一章　卫星轨道的基本特性

关于人造地球卫星绕地球运动的问题，在天体力学、卫星轨道运动理论等专著中有详尽的论述，可参看文献[1～3]。在说明卫星轨道的设计和控制问题时，常引用卫星轨道运动的基本概念和公式。本章扼要叙述卫星轨道的基本特性，星-地空间几何和若干特殊轨道的特点。

1.1　二体轨道特性

在卫星轨道的分析问题中，常假定卫星在地球中心引力场中运动，忽略其他各种摄动力的因素（如地球形状非球形、密度分布不均匀引起的摄动力和太阳、月球的引力等）。这种卫星轨道称为二体轨道，分析这种轨道的特性称为二体问题。二体轨道代表卫星轨道运动的最主要特性。

令二体的质量分别为 m_1, m_2，两者的集中质点相对空间惯性参考点 O 的距离矢量分别为 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$，见图1.1-1，两者之间的相对距离矢量为 $\boldsymbol{r}$，由 m_1 指向 m_2，两者之间的相互引力为 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$，有

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$$\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_1$$

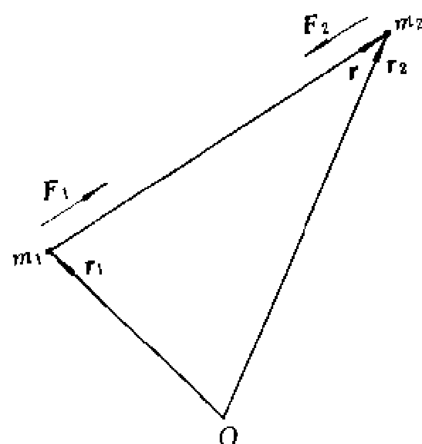


图　1.1-1

式中，G 为万有引力常数。由此，两者对惯性空间的运动方程为

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = Gm_1m_2 \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$m_2 \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = -Gm_1m_2 \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

将上面两式相减，并引用几何关系 $\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2$，可得相对运动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = -G(m_1 - m_2)\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

令 m_1 为地球质量，有 $m_1=m_e \gg m_2$，则描述卫星 m_2 相对地球的二体问题基本方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{1.1-1}$$

式中，$\mu=Gm_e$ 是地心引力常数，$\mu=398\ 600.44\ \mathrm{km^3/s^2}$。作用在卫星上的地球中心引力仅与卫星的质量成正比，与卫星的地心距的平方成反比；由引力产生的加速度幅值（$-\mu/r^2$）与卫星质量无关，引力加速度的方向与地心距单位矢量（$\boldsymbol{r}/r$）的方向相反。二体运动方程(1.1-1)的形式简单，但其精确求解较复杂。

早在17世纪初，通过对行星运动的精确观测和数据分析，开普勒总结出行星运动的三大定律——开普勒三大定律。

第一定律：各行星的轨道均为椭圆，太阳位于该椭圆的一个焦点上。

第二定律：行星与太阳的连线在相等时间内扫过的面积相等。

第三定律：行星轨道周期的平方与行星至太阳平均距离的三次方成正比。

二体运动方程的解与此三大定律完全符合，因此二体轨道又称为开普勒轨道。

1.1.1　卫星轨道要素

为描述卫星在空间的位置，定义赤道惯性坐标系 $OXYZ$：坐标原点 O 在地球中心；X 轴沿地球赤道面和黄道面的交线，指向春分点 Υ；Z 轴指向北极；Y 轴在赤道平面上垂直于 X 轴，见图 1.1-2。在此坐标系中卫星的运动方程式(1.1-1)可以分解为

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}+\frac{\mu x}{r^3}&=0\\ \ddot{y}+\frac{\mu y}{r^3}&=0\\ \ddot{z}+\frac{\mu z}{r^3}&=0\end{aligned}\right\}\tag{1.1-2}$$

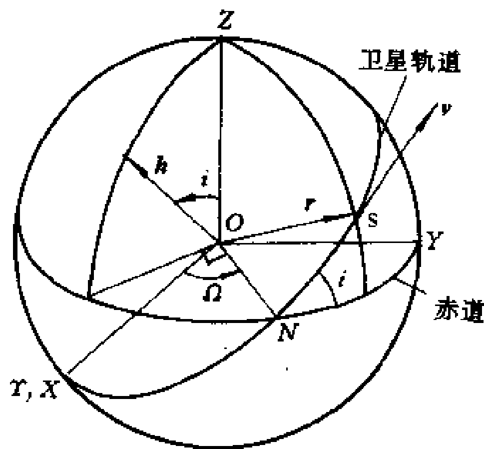


图　1.1-2

式中 $r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$。这是一个六阶的非线性微分方程，如给定了六个初始条件——t_0 时刻卫星的位置 $x(t_0)$，$y(t_0)$，$z(t_0)$ 和速度 $\dot{x}(t_0)$，$\dot{y}(t_0)$ $\dot{z}(t_0)$，则此方程组完全可解。这些初始条件确定六个积分常数，每个积分常数都描述卫星轨道的一种特性。

将方程组(1.1-2)各式交叉乘以 x,y,z，再两两相减、消去 $\frac{1}{r^3}$ 项，可得

$$x\ddot{y}-y\ddot{x}=0$$
$$y\ddot{z}-z\ddot{y}=0$$
$$z\ddot{x}-x\ddot{z}=0$$

将这三个方程式各个进行积分得

$$\left.\begin{aligned}x\dot{y}-y\dot{x}&=c_1\\ y\dot{z}-z\dot{y}&=c_2\\ z\dot{x}-x\dot{z}&=c_3\end{aligned}\right\}\tag{1.1-3}$$

c_1,c_2,c_3 是三个积分常数。再将以上各式顺序乘以 z,x,y，然后相加，得

$$c_1z+c_2x+c_3y=0$$

这是一个平面方程，它说明在二体问题中卫星绕地球运转的轨道总是在一个平面上，积分常数 c_1,c_2,c_3 确定了卫星轨道平面在空间坐标中的位置。由图1.1-2可知，卫星相对于地心的动量矩 $\boldsymbol{h}$ 等于卫星地心矩矢量和速度矢量的矢积：

$$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$$

根据矢积的公式，方程组(1.1-3)的左端是动量矩 $\boldsymbol{h}$ 在坐标轴上的分量 h_z,h_x,h_y，并有 $h_x^2+h_y^2+h_z^2=h^2$。式(1.1-3)表明，在地心中心引力场中，卫星相对地心的动量矩 $\boldsymbol{h}$ 保持恒定，其方向和幅值决定于积分常数 c_1,c_2,c_3。显然，动量矩 $\boldsymbol{h}$ 的方向和卫星轨道面的法线是平行的，称 $\boldsymbol{h}$ 和

Z 轴的夹角为轨道倾角 i；轨道平面和地球赤道面的交线为节线 ON，在图 1.1-2 中节点 N 为轨道的升交点，节线 ON 与 X 轴的夹角称为升交点赤经 Ω，这两个参数(i,Ω)确定了轨道平面在空间坐标中的方位。

从图 1.1-2 中可直接得到动量矩 $\boldsymbol{h}$ 的三个分量与 i,Ω 的关系：

$$\left.\begin{aligned} h_x &= h\sin i\sin\Omega \\ h_y &= -h\sin i\cos\Omega \\ h_z &= h\cos i \end{aligned}\right\} \tag{1.1-4}$$

或

$$i = \arccos\left(\frac{h_z}{h}\right), \qquad \Omega = \arctan\left(\frac{-h_x}{h_y}\right)$$

因此，积分常数 c_1, c_2, c_3 确定了与轨道特性直接有关的三个要素 i,Ω,h，前两个决定轨道平面的方位，第三个决定轨道的周期。

描述卫星在轨道平面内的运动只需用二维坐标。令此坐标为(ξ,η)，卫星的运动方程可写成

$$\ddot{\xi} + \frac{\mu}{r^3}\xi = 0$$

$$\ddot{\eta} + \frac{\mu}{r^3}\eta = 0$$

式中 $r=(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}$，再令 $\xi=r\cos\theta$，$\eta=r\sin\theta$，将上式化成极坐标形式，见图 1.1-3，有

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \tag{1.1-5}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \tag{1.1-6}$$

式(1.1-6)的积分是

$$r^2\dot{\theta} = h \tag{1.1-7}$$

显然，这个积分常数 h 就是卫星相对于地心的动量矩。参看图 1.1-3，卫星在轨道平面上运动时，在 Δt 时间内卫星从 B 点移动到 B' 点，相应的地心距从 $\boldsymbol{r}$ 变到 $\boldsymbol{r}'$，三角形 OBB' 的面积等于

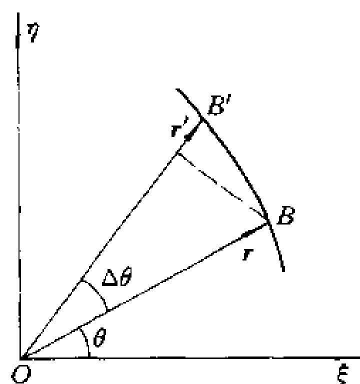


图 1.1-3

$$\Delta A = \frac{1}{2}rr'\sin\Delta\theta$$

此面积的变化率是

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}rr'\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}$$

取极限，可得

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}h \tag{1.1-8}$$

因此，式(1.1-8)的几何意义是单位时间内向径 $\boldsymbol{r}$ 在轨道平面上扫过的面积是常数，这就是开普勒第二定律。而动量矩的幅值 h 等于此面积速度的两倍。

利用式(1.1-7)，将式(1.1-5)中自变量替换为 θ，可得

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\theta^2}+\frac{2}{r^3}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\frac{1}{r}=\frac{\mu}{h^2}$$

上式可改写成$\left(\frac{1}{r}\right)$的方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\mu}{h^2}$$

它的解是调谐函数，可以写成

$$\frac{1}{r}=\frac{\mu}{h^2}[1+e\cos(\theta-\omega)]$$

e,ω 是两个积分常数，此方程又可改写成标准的极坐标形式：

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\omega)} \tag{1.1-9}$$

式中 $p=\frac{h^2}{\mu}$。这就是卫星的轨道方程，它说明卫星沿圆锥曲线运动，圆锥曲线的焦点位于极坐标的原点，也就是地心。对于地球卫星，此圆锥曲线是椭圆，而地球位于此椭圆的一个焦点上，这就是开普勒第一定律。由解析几何得知，e 是椭圆的偏心率，$e<1$；p 是椭圆的半通径，是在半个椭圆内通过焦点 F 的垂线(垂直于椭圆的长轴)的长度。见图 1.1-4，半通径 p 和偏心率 e 与椭圆半长轴 a、半短轴 b 的关系是

$$p=a(1-e^2)=b\sqrt{1-e^2} \tag{1.1-10}$$

$$e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

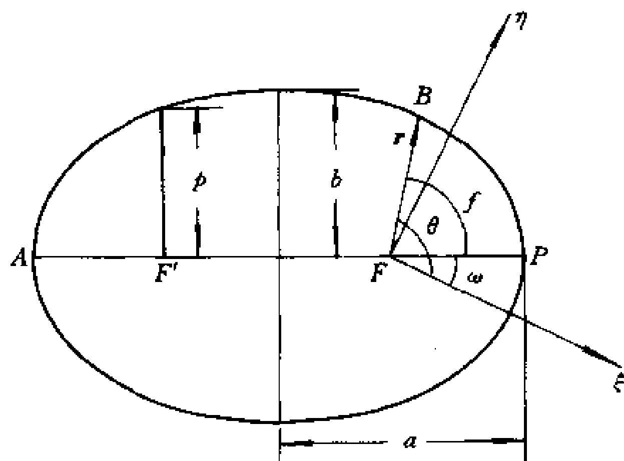


图　1.1-4

由于 $p=\frac{h^2}{\mu}$，半长轴 a 与积分常数 $h\left(h=\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}\right)$的关系是

$$a=\frac{h^2}{\mu(1-e^2)} \tag{1.1-11}$$

因为积分常数 e 是独立的，所以半长轴 a 与动量矩的幅值 h 是对应的。

在式(1.1-9)中，另一个积分常数是 ω。当 $\theta-\omega=0$ 时，卫星的地心距 r 为最小，该点称为近地点 P；当 $\theta-\omega=180°$时，地心距 r 为最大，该点称为远地点 A。显然，A，P 点必定在椭圆的长

轴上，而极角 ω 决定了此椭圆长轴在轨道平面上的方向，称 ω 为近地点幅角；卫星相对于椭圆长轴的极角称为真近点角 f，$f=\theta-\omega$，随着卫星的运转，真近点角不断地增大。轨道方程式(1.1-9)可以写成

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} \tag{1.1-12}$$

卫星近地点($f=0$)和远地点($f=180°$)的地心距 r_P，r_A 与半长轴和偏心率之间的关系是

$$r_P=a(1-e),\qquad r_A=a(1+e) \tag{1.1-13}$$

$$e=\frac{r_A-r_P}{r_A+r_P} \tag{1.1-14}$$

令卫星绕地球一圈的周期为 T，在这段时间内卫星向径扫过的面积等于椭圆的面积 πab。根据式(1.1-8)，有

$$\frac{\pi ab}{T}=\frac{1}{2}h$$

再利用式(1.1-10)，(1.1-11)可求得卫星轨道的周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \tag{1.1-15}$$

上式表明，卫星轨道周期的平方和椭圆轨道的半长轴的三次方成正比，这就是开普勒第三定律。令卫星沿椭圆轨道运行的平均速率(即真近点角的角速率平均值)为 n，则

$$n=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \tag{1.1-16}$$

以上说明了卫星运动方程式(1.1-2)的五次积分，它们的五个积分常数 i,Ω,a,e,ω 决定了卫星轨道的几何形状，定义为轨道要素。还需确定第六个要素，得出在任何时刻卫星的位置。参看图 1.1-5，卫星的椭圆轨道有一个半径为 b 的内接圆和一个半径为 a 的外接圆，如果将卫星

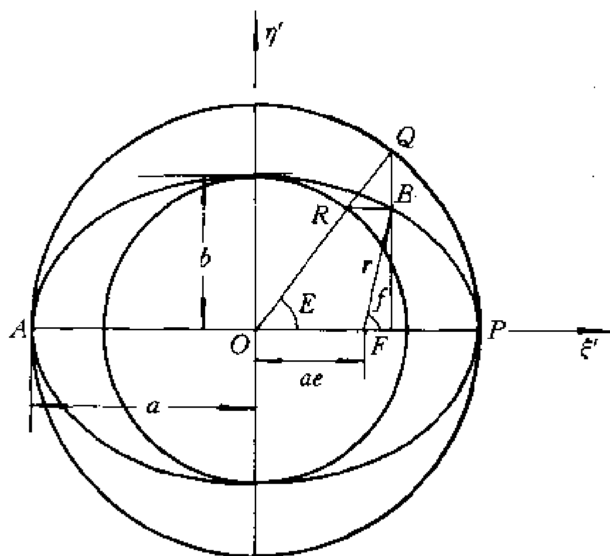


图 1.1-5

所在点 B 分别按垂直和水平方向投影到外圆和内圆上得 Q,R 两点，它们相对于椭圆中心的中心角是 E，称为卫星的偏近点角。卫星在轨道平面上的直角坐标(ξ',η')中的位置可用偏近点

角的参数方程表示：

$$\xi' = a\cos E$$
$$\eta' = b\sin E$$

从几何图形可求得偏近点角 E 与真近点角 f 的关系是

$$a\cos E = ae + r\cos f \tag{1.1-17}$$

$$b\sin E = r\sin f \tag{1.1-18}$$

由此可导出下列关系式：

$$\sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin f}{1+e\cos f} \tag{1.1-19}$$

$$\cos E = \frac{e+\cos f}{1+e\cos f} \tag{1.1-20}$$

以及它们的反函数：

$$\sin f = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E} \tag{1.1-21}$$

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1-e\cos E} \tag{1.1-22}$$

应用三角函数的倍角公式，有真近点角与偏近点角的关系：

$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}}\tan\left(\frac{E}{2}\right)$$

利用式(1.1-17)，(1.1-22)，卫星在以焦点 F(地心)为原点的坐标位置可描述为

$$\left.\begin{aligned} r\cos f &= a(\cos E - e) \\ r\sin f &= a\sqrt{1-e^2}\sin E \\ r &= a(1-e\cos E) \end{aligned}\right\} \tag{1.1-23}$$

将式(1.1-20)，(1.1-22)两边微分，利用式(1.1-19)，(1.1-21))可得出真近点角与偏近点角之间的微分关系：

$$\mathrm{d}f = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}\mathrm{d}E \tag{1.1-24}$$

$$\mathrm{d}E = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos f}\mathrm{d}f \tag{1.1-25}$$

有了上述的基本关系式，可将式(1.1-7)进行积分，由于 ω 是常数，$\dot{\theta}=\dot{f}$，式(1.1-7)的积分可改写成

$$\int_0^f r^2\mathrm{d}f = h(t-t_P)$$

式中 t_P 就是第六个积分常数，它是卫星经过近地点的时刻，对应的真近点角 $f=0$。利用式(1.1-11)，(1.1-12)和(1.1—23)，(1.1-24)等，可将上式化成

$$\begin{aligned} t - t_P &= \frac{h^3}{\mu^2}\int_0^f \frac{\mathrm{d}f}{(1+e\cos f)^2} = \frac{h^3}{\mu^2}\int_0^E \frac{1-e\cos E}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}E \\ &= \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(E - e\sin E) \end{aligned}$$

由此得到描述卫星位置与时间关系的开普勒方程：

$$n(t - t_P) = E - e\sin E \tag{1.1-26}$$

定义 $M=n(t-t_P)$ 为卫星的平近点角，它表示卫星从近地点开始按平运动速度 n 转过的角度，或者说卫星在一个假想的面积等于轨道椭圆面积的圆上以等速 n 运动，它转过的中心角就是平近点角 M。在给定的时刻 t，三种近点角 M,E,f 都是对应的。平运动速度 n 和偏心率 e 是先给定的，解开普勒方程求得 E，才能得知卫星的位置。用迭代法求解，令第 0 步的 E 值为 E_0，第一步以后的各次 E 值为

$$E_1 = M + e\sin E_0$$
$$E_2 = M + e\sin E_1$$
$$\cdots$$

如令迭代初值 $E_0=M$，并且每次迭代后进行解析运算，可得出角 E 的级数计算式：

$$E = M + \left(e - \frac{e^3}{8}\right)\sin M + \frac{1}{2}e^2\sin 2M + \frac{3}{8}e^3\sin 3M + \cdots \tag{1.1-27}$$

真近点角 f 的级数计算式是：

$$f = M + \left(2e - \frac{e^3}{4}\right)\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M + \frac{13}{12}e^3\sin 3M + \cdots \tag{1.1-28}$$

至此，给出了卫星运动方程的六个积分以及六个积分常数(a,e,i,Ω,ω,t_P)，通常称此六个常数为轨道要素。由于 t_P 和 M 是对应的，也可用 M 表示第六个要素。

1.1.2 卫星位置和速度公式

以上仅局限于分析卫星在轨道平面上的运动特性。还需分析卫星在赤道惯性坐标系中的空间位置和速度问题，用六个轨道要素描述卫星在空间中的运动特性，即卫星的向径 $\boldsymbol{r}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$ 可以表达成此六个轨道要素的函数。图 1.1-6 归纳了上述要素在空间坐标中的几何意义。

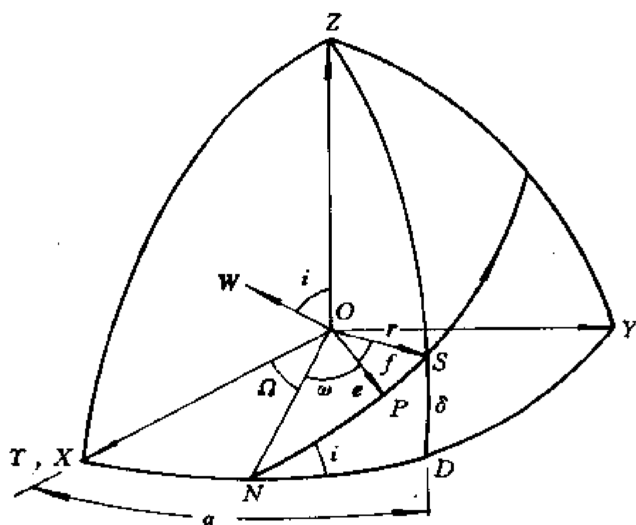


图 1.1-6

图中，$OXYZ$——赤道惯性坐标系，X 轴指向春分点 Υ；

ON——卫星轨道的节线，N 为升交点；

S——卫星的位置；

P——卫星轨道的近地点；

f——真近点角，卫星位置相对于近地点的角距；

ω——近地点幅角，近地点到升交点的角距；

i——轨道倾角，卫星通过升交点时，相对于赤道平面的速度方向；

Ω——升交点赤经，节线 ON 与 X 轴的夹角；

$\boldsymbol{e}$——偏心率矢量，从地心指向近地点，长度等于 e；

$\boldsymbol{W}$——轨道平面法线的单位矢量，沿卫星运动方向按右旋定义，它与 Z 轴的夹角为倾角 i；

a——半长轴；

α，δ——卫星在赤道惯性坐标的赤经、赤纬。

下面推导卫星的空间位置与轨道六要素的关系，这些关系式可用坐标转换矩阵求得。由于经常应用坐标转换矩阵的概念，对此作一些简要的说明。假定空间中有一点 B，在 $OXYZ$ 坐标系中的坐标是 x,y,z，如将此正交坐标系 $OXYZ$ 绕 X 轴转过一角度 θ，得到一个新坐标系 $OX'Y'Z'$，显然，X' 轴与 X 轴是重合的。在 YZ 平面内坐标轴 Y'，Z' 的方向见图 1.1-7，B' 点是 B 点在 YZ 平面上的投影。该点在新坐标系中的坐标 $Ox'y'z'$ 与在原坐标系中坐标的关系是

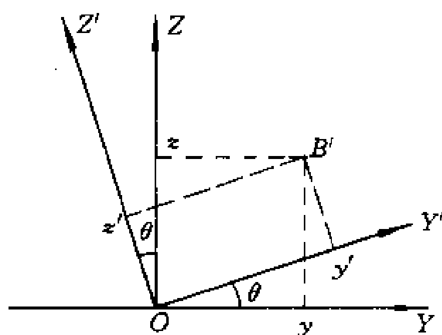


图　1.1-7

$$x' = x$$

$$y' = y\cos\theta + z\sin\theta$$

$$z' = -y\sin\theta + z\cos\theta$$

写成矩阵形式是

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_X(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{1.1-29}$$

右端的 3×3 矩阵称为坐标转换矩阵，或称旋转矩阵，常用 $R_X(\theta)$ 表示，下标 X 表示转轴，θ 表示转角。同样绕 Y 轴、Z 轴旋转时可得

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_Y(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{1.1-30}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_Z(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{1.1-31}$$

如在第一次旋转后，第二次绕新坐标系中的 Y' 轴转 φ 角，第三次绕第二次旋转后的新坐标中的 Z'' 轴转 ψ 角，则 B 点在坐标系 $OX'''Y'''Z'''$ 中的坐标可写成

$$\begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{bmatrix} = R_Z(\psi)R_Y(\varphi)R_X(\theta)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{1.1-32}$$

上式中旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的下标 X,Y,Z 表示每次坐标转动的转轴在坐标系中的序号(下同)。这里顺便指出,如令 X,Y,Z 轴的单位矢量是 $\boldsymbol{u}_x,\boldsymbol{u}_y,\boldsymbol{u}_z$,令 X',Y',Z'轴的单位矢量是 $\boldsymbol{u}_x',\boldsymbol{u}_y',\boldsymbol{u}_z'$,参看图 1.1-7,绕 X 轴转 θ 角后,同样有下列等式:

$$\boldsymbol{u}_x' = \boldsymbol{u}_x$$

$$\boldsymbol{u}_y' = \cos\theta\,\boldsymbol{u}_y + \sin\theta\,\boldsymbol{u}_z$$

$$\boldsymbol{u}_z' = -\sin\theta\,\boldsymbol{u}_y + \cos\theta\,\boldsymbol{u}_z$$

因此,经过三次转动后,新坐标系与原坐标系坐标轴单位矢量之间的转换关系有同样的形式:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_x''' \\ \boldsymbol{u}_y''' \\ \boldsymbol{u}_z''' \end{bmatrix} = R_z(\psi)R_y(\varphi)R_x(\theta)\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_x \\ \boldsymbol{u}_y \\ \boldsymbol{u}_z \end{bmatrix} \tag{1.1-33}$$

以上是坐标转换的一般性说明,下文中新坐标用字符表示,不用撇号“'''”。

定义地心轨道坐标系 $Ox_oy_oz_o$,上面提到的两个正交的表征轨道特性的矢量$\frac{1}{e}\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{W}$ 可以作为此轨道坐标系的坐标轴 x_o,z_o 的单位矢量,按右手正交定则,第三根坐标轴 y_o 在轨道平面上,参看图 1.1-6。地心轨道坐标系 $Ox_oy_oz_o$与赤道惯性坐标系 $OXYZ$ 之间的转换关系是这样的:先将地心轨道坐标系绕矢量 $\boldsymbol{W}$ 转角$(-\omega)$,转换矩阵是 $R_z(-\omega)$;再绕节线ON 转角$(-i)$,转换矩阵是 $R_x(-i)$;最后绕 Z 轴转角$(-\Omega)$,转换矩阵是 $R_z(-\Omega)$,经过这样三次旋转后,地心轨道坐标系和赤道惯性坐标系重合。在地心轨道坐标系中,卫星的位置坐标是

$$x_o = r\cos f$$

$$y_o = r\sin f$$

$$z_o = 0$$

应用坐标转换公式(1.1-29),(1.1-30),(1.1-31)导出卫星在赤道惯性坐标系中的坐标是

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega)\begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\cos i\sin\Omega & -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\cos i\sin\Omega & \sin i\sin\Omega \\ \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos i\cos\Omega & -\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos i\cos\Omega & -\sin i\cos\Omega \\ \sin\omega\sin i & \cos\omega\sin i & \cos i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r\cos f \\ r\sin f \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}\begin{bmatrix} \cos\Omega\cos(\omega+f) - \sin\Omega\sin(\omega+f)\cos i \\ \sin\Omega\cos(\omega+f) + \cos\Omega\sin(\omega+f)\cos i \\ \sin(\omega+f)\sin i \end{bmatrix} \tag{1.1-34}$$

这就是用轨道要素描述卫星位置的公式,其中真近点角 f 需解开普勒方程。

在卫星轨道分析中,常用卫星地心距矢量 $\boldsymbol{r}$ 在赤道惯性坐标系中的赤经 α 和赤纬 δ 表示卫星的位置,参看图 1.1-6,有

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\delta\cos\alpha \\ y &= r\cos\delta\sin\alpha \\ z &= r\sin\delta \end{aligned}\right\} \tag{1.1-35}$$

赤经 α 又称为恒星角或时角。从图 1.1-6 中的直角球面三角形 NDS 中，可得出赤经 α，赤纬 δ 与轨道要素的关系：

$$\left.\begin{aligned} &\sin\delta = \sin(\omega+f)\sin i \\ &\cos\delta\cos(\alpha-\Omega) = \cos(\omega+f) \\ &\cos\delta\sin(\alpha-\Omega) = \sin(\omega+f)\cos i \end{aligned}\right\} \tag{1.1-36}$$

另一种常用的描述卫星空间位置的重要方法，是先确定轨道长、短轴的方向。若记偏心率矢量的单位矢量为

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{e}\boldsymbol{e}$$

将它沿卫星运动方向转 90°就是半通径方向，它的单位矢量记为 $\boldsymbol{Q}$，则卫星位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 可以表达成

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= r\cos f\,\boldsymbol{P} + r\sin f\,\boldsymbol{Q} \\ &= a(\cos E - e)\boldsymbol{P} + a\sqrt{1-e^2}\sin E\boldsymbol{Q} \end{aligned} \tag{1.1-37}$$

利用坐标转换关系，单位矢量 $\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{Q}$ 在赤道惯性坐标系中为

$$\boldsymbol{P} = R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i \\ \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i \\ \sin\omega\sin i\end{bmatrix} \tag{1.1-38}$$

和

$$\boldsymbol{Q} = R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i \\ -\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i \\ \cos\omega\sin i\end{bmatrix} \tag{1.1-39}$$

式(1.1-37)，(1.1-38)，(1.1-39)组成卫星位置的轨道要素描述。

对式(1.1-37)进行微分，可得卫星速度的轨道要素描述，因 $\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{Q}$ 为惯性参考矢量，有

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = (\dot{r}\cos f - r\dot{f}\sin f)\boldsymbol{P} + (\dot{r}\sin f + r\dot{f}\cos f)\boldsymbol{Q}$$

由式(1.1-7)，有动量矩幅值的等式 $h=r^2\dot{f}$，再引用式(1.1-11)，轨道方程(1.1-12)的微分为

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}}\,e\sin f$$

及

$$r\dot{f} = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}}(1+e\cos f)$$

代入速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 的式子，得卫星速度的轨道要素描述为

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}}[-\sin f\boldsymbol{P} + (e+\cos f)\boldsymbol{Q}] \tag{1.1-40}$$

由上式可得出下列轨道速度公式，利用式(1.1-12)，(1.1-13)，有

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} \cdot \sqrt{\sin^2 f + (e + \cos f)^2} = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \tag{1.1-41}$$

$$\left.\begin{aligned} v_P &= \sqrt{\frac{2\mu r_A}{(r_A + r_P) r_P}} = \sqrt{\frac{\mu}{a}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} \\ v_A &= v_P \frac{r_P}{r_A} = \sqrt{\frac{\mu}{a}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)} \end{aligned}\right\} \tag{1.1-42}$$

定义卫星沿轨道的飞行角 β 为卫星速度方向与当地水平的夹角，则有飞行角与真近点角的关系式

$$\left.\begin{aligned} \cos\beta &= \frac{r}{v}\dot{f} = \frac{1 + e\cos f}{(1 + e^2 + 2e\cos f)^{\frac{1}{2}}} \\ \sin\beta &= \frac{1}{v}\dot{r} = \frac{e\sin f}{(1 + e^2 + 2e\cos f)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} \tag{1.1-43}$$

根据动量矩公式 $r^2\dot{f} = h$，并引用式(1.1-41)，卫星速度飞行角又可写为

$$\cos\beta = \frac{h}{r\mu^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}} = \left[\frac{a^2(1-e^2)}{r(2a-r)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

或

$$v^2 r^2 \cos^2\beta = \mu a(1-e^2)$$

由此，如已知卫星射入轨道时的速度 v，地心距 r 和飞行角 β，可求得卫星轨道的几个主要要素：

$$\left.\begin{aligned} e &= \left[\left(\frac{rv^2}{\mu} - 1\right)^2 \cos^2\beta + \sin^2\beta\right]^{-\frac{1}{2}} \\ a &= \frac{r}{2 - \frac{rv^2}{\mu}} \\ r_P &= \frac{r^2 v^2 \cos^2\beta}{\mu(1+e)}, \qquad r_A = \frac{r^2 v^2 \cos^2\beta}{\mu(1-e)} \end{aligned}\right\} \tag{1.1-44}$$

1.1.3 卫星轨道定轨公式

综上所述，轨道六要素中五个常量要素定义了轨道形状的空间特性，第六个变量要素指出卫星在轨道上的位置，由此可直接得出任一时刻的六个运动参数 $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$。但在工程上，轨道要素不能直接测得，可测量为卫星在某一时刻的位置和速度。卫星轨道的定轨问题是，由已知某一时刻卫星在赤道惯性坐标系中的位置 $\boldsymbol{r}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$，得出轨道要素的转换关系。

轨道六要素的五个常量要素可由轨道动力学常量——动量矩和机械能量直接导出，后者为卫星位置和速度的函数。动力学常量的公式为

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$$

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

式中 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$，$v = (\dot{x} + \dot{y} + \dot{z})^{\frac{1}{2}}$。

机械能 E 可由动力学方程直接得出，令 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 与式(1.1-1)作标积，有

$$\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}+\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}=0$$

或写成

$$\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}+\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=0$$

矢量和自身导数的标积等于矢量的幅值与幅值的导数的乘积，上式可化成

$$v\dot{v}+\frac{\mu}{r^3}r\dot{r}=0$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v^2}{2}-\frac{\mu}{r}\right)=0$$

因此，机械能 E 为常量，等于动能和势能之和。

动量矩可决定轨道平面的要素，轨道倾角为动量矩 $\boldsymbol{h}$ 与惯性坐标轴 $\boldsymbol{Z}$ 的夹角，轨道升交点赤经 Ω 为轨道节线矢量 N 与惯性坐标轴 $\boldsymbol{X}$ 的夹角，有

$$\left.\begin{aligned}i&=\arccos\frac{\boldsymbol{h}}{h}\cdot\boldsymbol{u}_z\\ \Omega&=\arccos(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{u}_x)\end{aligned}\right\}\tag{1.1-45}$$

式中轨道节线单位矢量

$$\boldsymbol{N}=(\boldsymbol{u}_z\times\boldsymbol{h})/|\boldsymbol{u}_z\times\boldsymbol{h}|\tag{1.1-46}$$

动量矩的幅值 h 还决定轨道平面的半通径 p：

$$p=\frac{h^2}{\mu}\tag{1.1-47}$$

对于椭圆轨道，在近地点 r_P，有 $r_P=a(1-e)$，$h=r_Pv_P$，机械能为

$$E=\frac{v_P^2}{2}-\frac{\mu}{r_P}=\frac{\mu a(1-e^2)}{2a^2(1-e)^2}-\frac{\mu}{a(1-e)}=-\frac{\mu}{2a}\tag{1.1-48}$$

因此，机械能 E 直接决定了轨道的半长轴 a。

半通径 p 和半长轴 a 联合决定椭圆偏心率 e：

$$e=\sqrt{1-\frac{p}{a}}\tag{1.1-49}$$

轨道平面内要素——近地点幅角 ω 等于卫星升交点幅角 u 与卫星真近点角 f 之差，前者为卫星位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 与节线矢量 N 的夹角，有

$$\omega=u-f=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{N}\right)-f\tag{1.1-50}$$

卫星真近点角 f 为第六个轨道要素，等于卫星位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 与近地点矢量 $\boldsymbol{e}$ 的夹角，有

$$f=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}}{re}\right)\tag{1.1-51}$$

由轨道椭圆方程式(1.1-12)，上式中近地点矢量 $\boldsymbol{e}$ 与卫星位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的标积为

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}=re\cos f=p-r\tag{1.1-52}$$

综上所述，式(1.1-45)～(1.1-52)构成由运动参数 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}$ 推导轨道要素的公式。

1.2 星-地空间几何

卫星应用任务，如卫星遥感、卫星通信和卫星导航等的系统设计、运行分析，都与卫星和地球之间的空间几何有关。这些几何关系表现在卫星的轨道位置、卫星的姿态，与地面观察点的位置和地球自转相位的相互关系。

1.2.1 星下点轨迹

星下点轨迹是卫星星下点在地球表面通过的路径，是卫星轨道运动和地球自转运动的合成。卫星星下点是卫星向径与地球表面交点的地心经、纬度，卫星轨道定义在赤道惯性坐标系，由卫星的位置坐标(x,y,z)可得赤经α和赤纬δ：

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

或由轨道要素得出赤经α和赤纬δ。由图1.1-6的直角球面三角形NDS，有

$$\alpha = \Omega + \arctan(\tan u \cos i)$$

$$\delta = \arcsin(\sin u \sin i) \tag{1.2-1}$$

式中，$u=\omega+f$是卫星离升交点的角距，真近点角f由求解开普勒方程得出。

卫星的地心经度λ等于卫星赤经与格林威治的恒星时角之差，即

$$\lambda = \alpha - [G_0 + \omega_e(t-t_0)]$$

G_0为起始时刻格林威治的恒星时角；ω_e为地球自旋转速，$\omega_e=7.292\ 115\ 8\times10^{-5}$ rad/s。

卫星的地心纬度φ等于卫星赤纬δ与地理纬度φ'的关系，见图1.2-1。地球的椭球模型是，地球沿子午线的截面是个椭圆，其半长轴a_e为赤道半径，其半短轴b_e为地球的极半径。椭圆的偏率f和偏心率e定义为

$$f=\frac{a_e-b_e}{a_e},\qquad e^2=\frac{a_e^2-b_e^2}{a_e^2}$$

有基本常数：

$a_e = 6\ 378.145$ km

$b_e = a_e(1-f) = 6\ 356.76$ km

$f = 1/298.257$

$e = 0.08\ 1\ 82$

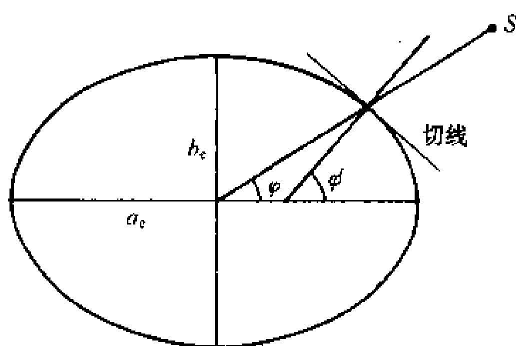


图 1.2-1

地心纬度φ和地理纬度φ'的转换式为

$$\tan\varphi = (1-f)^2\tan\varphi'$$

1.2.2 可见覆盖区

由地面观察卫星的可见范围受卫星高度角（又可称为仰角）的限制，地面观测点与卫星之

间的视线方向在当地的仰角应大于 5°。地面站覆盖区是以地面观测点 P 为中心的可观区，星下点在此圈内的卫星都为可观。参见图 1.2-2，该区是以 P 点为中心，满足仰角 E 为给定值，星下点 B 相对 P 点的分布圈。

从地面站观察卫星的高度角是在含观察点 P、地心 O 和卫星 S 的平面内，卫星视线方向与观察点 P 水平面之间的夹角 E，见图 1.2-2。在平面 OPS 内，斜距 ρ 和仰角 E 为：

$$\left.\begin{aligned}\rho &= [R_e^2 + r^2 - 2rR_e\cos\psi]^{\frac{1}{2}} \\ E &= \arccos[r\sin\psi/(R_e^2 + r^2 - 2rR_e\cos\psi)^{\frac{1}{2}}]\end{aligned}\right\} \tag{1.2-2}$$

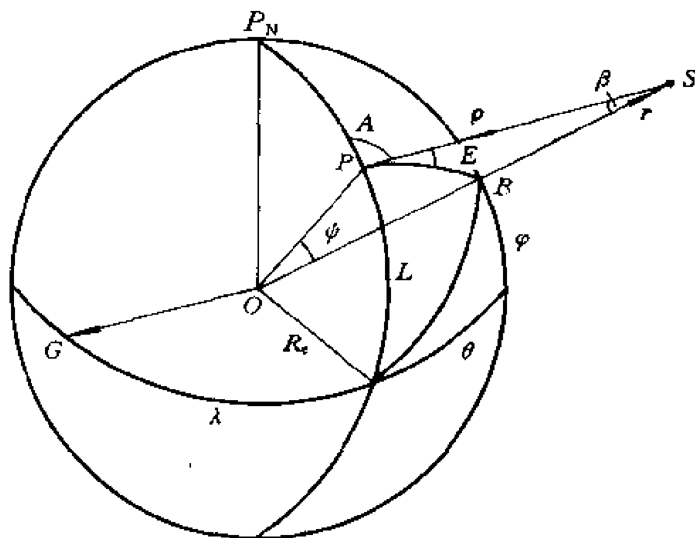


图 1.2-2

式中 ψ 角为卫星星下点 B 与观察点 P 之间的地心夹角。由图 1.2-2 的球面三角形 P_NPB，有

$$\cos\psi = \cos L\cos\varphi\cos\alpha + \sin L\sin\varphi \tag{1.2-3}$$

式中，L 为观察点的地心纬度，θ 为观察点相对卫星星下点子午线的经度。从地面站观察卫星的方位角是在当地水平面内，卫星方向相对北向的夹角 A。由图 1.2-2 的球面三角形 P_NPB，有方位角公式

$$A = \arcsin[\sin\theta\cos\varphi/\sin\psi] \tag{1.2-4}$$

对于给定倾角 E 值，覆盖圈上星下点 B 相对 P 点的经纬度关系可由图 1.2-2 球面三角形 P_NPB 得出

$$\theta = \arccos[(\cos\psi - \sin\varphi\sin L)/\cos\varphi\cos L] \tag{1.2-5}$$

式中 ψ 角是卫星可见覆盖圈的角半径，它的二倍是卫星的最大可观弧段，直接决定于卫星高度和仰角。从图 1.2-2 中可得三角关系式

$$\psi = \frac{\pi}{2} - E - \arcsin[R_e\cos E/r] = \arccos[R_e\cos E/r] - E$$

从式(1.2-5)给定观测点的地心纬度 L，可得出覆盖圈上各点 B 的纬度 φ 和相应的相对于 P 点子午线的经度 θ。

从卫星上观察地球的几何是卫星天底角 β，定义为卫星相对观察地面点 P 与星下点 B 之间的角距。由图 1.2-2 中三角形 OPS 可得，卫星天底角 β 与卫星仰角 E 的关系式

$$r\sin\beta = R_e \cos E$$

1.2.3 通信波束服务区

在静止轨道上，通信卫星波束覆盖地面的服务区与卫星天线波束指向角有关。假定卫星姿态与轨道坐标一致，令天线主轴(波束中心线)指向地面服务区中心 P 点，该点的地心纬度为 L，与卫星定点位置的经度差为 θ(见图 1.2-3)，则 P 点相对卫星星下点的地心角 ψ 为

$$\psi = \arccos[\cos L \cos \theta]$$

P 点相对卫星的天底角 β 为

$$\beta = \arctan\left[\frac{R_e \sin\psi}{r - R_e\cos\psi}\right]$$

由上两式可得出天线主轴相对卫星轨道坐标系的方向。

令 P_i 为服务区内地面某点，指向该点的波束与主波束之间的夹角为波束角 γ_i。由图 1.2-3 中三角形 SPP_i，可得计算波束角 γ_i 的公式：

$$\gamma_i = \arccos\left[\frac{\rho^2 + \rho_i^2 - \overline{PP_i}^2}{2\rho\rho_i}\right] \tag{1.2-6}$$

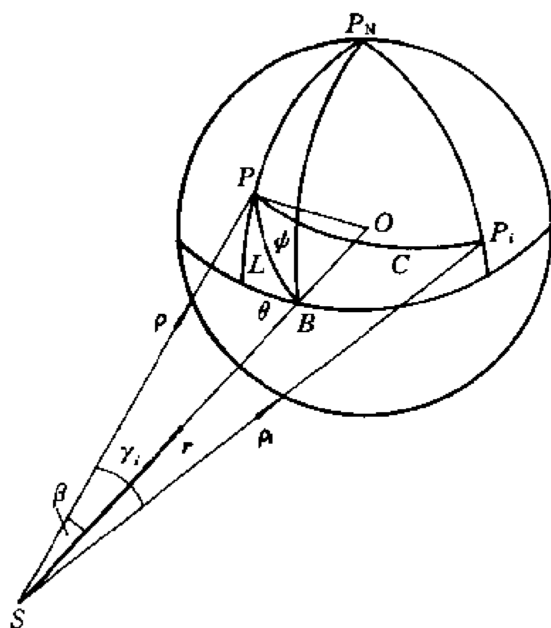


图 1.2-3

式中 ρ, ρ_i 为卫星至 P, P_i 点的斜距，利用地心角 ψ 的算式，分别有

$$\rho^2 = r^2 + R_e^2 + 2rR_e\cos L\cos\theta$$

$$\rho_i^2 = r^2 + R_e^2 + 2rR_e\cos L_i\cos\theta_i \tag{1.2-7}$$

式中 L_i, θ_i 分别为 P_i 点的地心纬度和相对卫星定点位置的经度。式(1.2-6)中，P 点与 P_i 点之间的弦长$\overline{PP_i}$可由弧长 C 换算得出，

$$\overline{PP_i} = 2R_e\sin\frac{C}{2}$$

再由图 1.2-3 中球面三角形 P_NPP_i，得上式中弧长 C 的公式：

$$\cos C = \sin L\sin L_i + \cos L\cos L_i\cos(\theta - \theta_i)$$

有如下两种模式描述天线波束服务区，两者都以天线主轴指向点 P 为中心点。

等增益圈：对于圆锥形波束，等增益圈对应等波束角。按式(1.2-6)，由点 $P_i(L_i,\theta_i)$得波束角 γ_i；再令 γ_i为定值，由式(1.2-7)得组合解(L_j,θ_j)，连接成等增益圈。

等通量密度圈：在地面服务点 P_i 接收星上天线发射的通量密度和指向该点的波束角 γ_i 与斜距 ρ_i 有关，到达地面的通量密度和天线发射功率与该方向的增益成正比，与指向该点的斜距的平方成反比。对于圆锥形波束，利用简单的迭代法即可得出地面上等通量密度服务圈：先在波束中心点 P 的经度圈上选取与服务圈的交点，计算该点的通量密度；再按等经度步长移动该点，根据等通量密度的要求，迭代求得该点的纬度，以此类推。

1.2.4　遥感图像几何定位

在遥感卫星上，光学遥感仪器获取地球辐射图像的方式有两种：点(或线)扫描式和面阵成像式。从卫星上获取地球的图像简称为卫星图像。在图像上任一像元的图像坐标对应地球表面某一被视察点(或遥感点)的地球坐标，该遥感点是扫描光轴视线(或阵列单元的视线)与地球表面的交点。由于卫星的轨道运动、仪器的扫描运动和地球自转，图像定位是空间几何和时序的结合。参见图 1.2-2，令 P 点为对应某一图像像元的地面遥感点，$\overline{SP}$即为卫星遥感光轴观察 P 点的视线矢量 $\boldsymbol{\rho}$(简称为像元视线矢量)，由卫星指向遥感点；令遥感点 P 在地球坐标的位置矢量为 $\boldsymbol{P}$，有空间几何关系

$$\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{P} \tag{1.2-8}$$

卫星的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 定义在赤道惯性坐标系，需在该坐标系中求解上述几何关系式。令像元视线矢量在赤道惯性坐标中表示为(略去表示惯性坐标的下标 i)：

$$\boldsymbol{\rho}=\rho\cdot\boldsymbol{u} \tag{1.2-9}$$

式中 $\boldsymbol{u}$ 为像元视线的单位矢量。根据像元在图像坐标上的行数和列数，再根据光学仪器的焦距，可得出像元视线在仪器坐标系的单位矢量 $\boldsymbol{u}_p$(下标 p 表示仪器坐标系)。由仪器在卫星本体上的安装矩阵 $\boldsymbol{M}$，得出像元视线在卫星本体坐标 B 中的单位矢量 $\boldsymbol{u}_B=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{u}_p$；再由卫星姿态参数——姿态矩阵 $\boldsymbol{A}$(见第五章)，得出像元视线在卫星轨道坐标 o 的单位矢量 $\boldsymbol{u}_o=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}_B$；最后，由卫星轨道参数确定的轨道坐标与赤道惯性坐标的转换矩阵 $\boldsymbol{R}_{oi}$，计算像元视线的单位矢量 $\boldsymbol{u}$，即有

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{R}_{oi}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{u}_p \tag{1.2-10}$$

按照卫星轨道坐标系的定义：x_o，z_o 轴位于轨道平面内；x_o 轴朝向速度方向，垂直于地心天底方向；z_o 轴指向地心；y_o 轴按右手正交垂直于轨道平面。由轨道运动参数 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$ 表示的轨道坐标轴方向为

$$\boldsymbol{x}_o=\boldsymbol{y}_o\times\boldsymbol{z}_o,\qquad \boldsymbol{y}_o=\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}|},\qquad \boldsymbol{z}_o=-\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

此坐标轴定义在赤道惯性坐标系，两者转换矩阵 $\boldsymbol{R}_{oi}$可直接由轨道坐标轴矢量表示为

$$\boldsymbol{R}_{oi}=[\boldsymbol{x}_o\ \boldsymbol{y}_o\ \boldsymbol{z}_o]^{\mathrm{T}} \tag{1.2-11}$$

已知像元视线矢量 $\boldsymbol{u}$，可得出遥感点 P 的地球坐标。令下标 x，y，z 表示矢量在赤道惯性坐标轴的分量，考虑到地球的扁率，P 点的坐标 P_x，P_y，P_z 符合椭球面公式：

$$\frac{P_x^2+P_y^2}{a_e^2}+\frac{P_z^2}{b_e^2}=1$$

式中 a_e,b_e分别为地球的半长轴和半短轴。引用几何关系式(1.2-8),上式展开成

$$\frac{(\rho u_x + r_x)^2 + (\rho u_y + r_y)^2}{a_e^2} + \frac{(\rho u_z + r_z)^2}{b_e^2} = 1$$

得出像元视线的距离 ρ:

$$\rho = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} \tag{1.2-12}$$

其中

$$A = 1 + du_z^2$$
$$B = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{u} + dr_z u_z$$
$$C = r^2 + dr_z^2 - a_e^2$$
$$d = \frac{a_e^2 - b_e^2}{b_e^2}$$

将式(1.2-12),(1.2-10)代入式(1.2-9),再代入式(1.2-8),得矢量 $\boldsymbol{P}$,再由地球坐标与惯性坐标的转换矩阵 $\boldsymbol{R}_{ei}$:

$$\boldsymbol{R}_{ei} = \begin{bmatrix} \cos G(t) & \sin G(t) & 0 \\ -\sin G(t) & \cos G(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $G(t)$为格林威治恒星时角,$G(t)=G_0+\omega_e(t-t_0)$。得遥感点 P 在地球坐标的矢量 $\boldsymbol{P}_e$,

$$\boldsymbol{P}_e = \boldsymbol{R}_{ei}\boldsymbol{P}$$

由此,得遥感点 P 的地心经、纬度 λ,L:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \arctan\left(\frac{P_x}{P_y}\right)_e \\ L &= \arcsin\left(\frac{P_z}{|\boldsymbol{P}|}\right)_e \end{aligned}\right\} \tag{1.2-13}$$

1.3 发射窗口

根据空间应用要求和飞行任务,在优选卫星的预定轨道和运载火箭的弹道之后,卫星制导设计的第一项任务是制定发射窗口,即发射的日期、时刻及其时间区间,在该区间内发射卫星能满足飞行任务的若干特定要求。航天器发射的要素是:发射场位置、发射方位角和发射时刻。航天器轨道的高度、椭圆度和倾角,与发射时刻无关,但轨道平面在空间的方位不仅与发射方位角有关,还决定于航天器脱离地球表面的时刻。例如,若预定轨道的倾角为 90°,在春分或秋分日,当地时间上午或下午 6:00 点发射航天器,则太阳将垂直照射轨道平面。又如,若要求航天器进入另一在轨航天器的轨道平面,则发射时间的最佳选择应是发射场随地球旋转进入该轨道平面的时刻。每一项具体的特定技术要求对应某个发射时刻,该特定要求的允许范围对应一段发射时刻的区间,两者俗称为窗口。对于地球卫星,限制发射窗口的因素有两类:与太阳方向有关的称为阳光窗口,与空间卫星组网有关的称为平面窗口和相位窗口。

1.3.1 发射三要素

利用常规运载火箭将卫星送入预定轨道,此类运载火箭的弹道在发射过程中不作横向机

动，卫星轨道平面在空间的方位直接决定于发射场 L 的地心纬度 φ、发射方位角 A 和发射时刻 t_L。

描述轨道平面方位的要素是倾角 i 和升交点经度 Ω，参见球面图 1.3-1。发射方位角 A 定义为发射点指北方向与运载火箭速度水平方向的顺时针角。有两种发射方式：一是以方位角 A 进行升轨发射，例如在球面上的位置①；另一种是，经过半天，当发射场转到球面位置②，以方位角 $A'(=180°-A)$进行降轨发射。两种方式获得同一轨道。参照图 1.3-1，对于发射场 L，轨道倾角与发射方位角的关系是

$$\cos i = \sin A \cos \varphi \qquad (1.3\text{-}1)$$

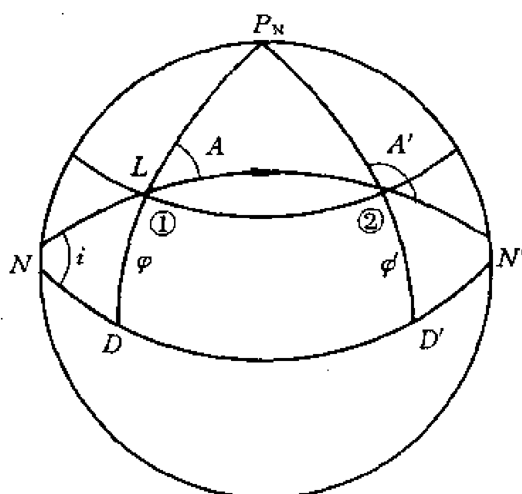


图 1.3-1

根据此基本球面三角关系，为实现给定的轨道倾角，发射方位角有双解，$A<90°$或 $A>90°$，即升轨或降轨发射，所得轨道倾角必大于发射点的地心纬度 φ。如要求轨道倾角大于 90°，则 $A<0$，升轨发射，方向西北；或 $A>180°$，降轨发射，方向西南。为实现给定的轨道升交点经度 Ω，由球面几何可得，发射时刻的发射场恒星时角应设定为

$$\left.\begin{aligned} \alpha_L &= \Omega + \Omega_D & &(\text{升轨发射}) \\ \alpha_L &= \Omega + 180° + \Omega_D & &(\text{降轨发射}) \end{aligned}\right\} \qquad (1.3\text{-}2)$$

式中 Ω_D为球面赤道上，发射时发射场子午线的节点 D 相对轨道节点 N(升交)或 N'(降交)之间的夹角(向东为正，向西为负)：

$$\Omega_D = \pm \arcsin\left(\frac{\tan \varphi}{\tan i}\right) \qquad (1.3\text{-}3)$$

对于升轨发射，取正号。如 $i<90°$，则 $\Omega_D>0$，发射场子午圈节点 D 位于升交点 N 的右侧；如 $i>90°$，则 $\Omega_D<0$，D 位于 N 的左侧。对于降轨发射，取负号。

从时序角度，发射时刻的发射场恒星时角又可等于发射日格林威治午夜的恒星时角 α_G、发射场经度 λ 及发射时刻的世界时时角 $\omega_e t_L$之和。从发射至卫星入轨经历时间 t_A，因此，实际发射时间应比设定时间提前 t_A。以升轨发射为例，为实现升交点经度为 Ω 的轨道，发射时刻的世界时 t_L应按下式确定(按小时计算)：

$$t_L = \frac{1}{15}[\Omega - \alpha_G - \lambda + \arcsin(\tan \varphi/\tan i)] - \frac{1}{60}t_A \qquad (1.3\text{-}4)$$

1.3.2 阳光窗口

1. 轨道太阳角

太阳光是卫星在空间生存和执行任务的重要条件。卫星的能源系统、温控系统要求阳光在一定角度范围和时间范围内照射卫星；为了避免阳光对光学遥感探测仪器的干扰，要求阳光不得进入卫星某角度范围；为了保证轨道机动所需的姿态测量精度，要求太阳与地球和卫星三者相互处在良好的空间几何条件下。

由于卫星姿态稳定在轨道坐标中，上述技术要求都反映到轨道太阳角 β。其定义为轨道法

线方向与太阳方向的夹角。图 1.3-2 中，S 为太阳在地心天球上的位置，太阳矢量 $\boldsymbol{S}$ 在赤道惯性坐标中的要素是赤经 α_S、赤纬 δ_S，有

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}\cos\delta_S\quad\cos\alpha_S\\ \cos\delta_S\quad\sin\alpha_S\\ \sin\delta_S\end{bmatrix}$$

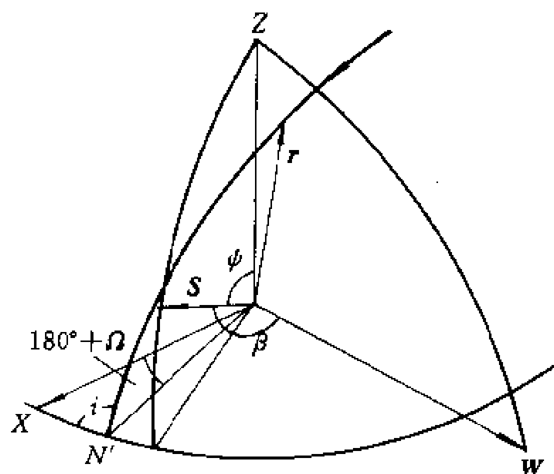


图 1.3-2

轨道平面法线矢量为 $\boldsymbol{W}$，此矢量的要素决定于轨道倾角和升交点经度，有

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}\sin i\quad\sin\Omega\\ -\sin i\quad\cos\Omega\\ \cos i\end{bmatrix}$$

由此，轨道太阳角 β 的方向余弦为

$$\cos\beta=(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{W})=\cos\delta_S\sin(\Omega-\alpha_S)\sin i+\sin\delta_S\cos i \tag{1.3-5}$$

如要求太阳位于卫星的左舷，可令 $\beta<90°$；反之，令 $\beta>90°$。如 $\beta=90°$，则太阳与轨道面重合。定义卫星位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 与太阳矢量 $\boldsymbol{S}$ 的夹角为 ψ，卫星进入地球阴影的条件可列为

$$\psi=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{S}\right)\geqslant 90°+\xi \tag{1.3-6}$$

式中 ξ 为地球阴影角，为卫星进入地影时，卫星向径与地阴边缘垂线之间的夹角，见图 1.3-3(a)，有

$$\xi=\arcsin\left[\frac{\sqrt{r^2-R_e^2}}{r}\right] \tag{1.3-7}$$

在轨道一周内，卫星受日照的比率称为受晒因子。当阳光垂直照射轨道平面时，受晒因子最大；当阳光与轨道平面重合时，受晒因子最小。受晒因子与轨道高度和轨道太阳角有关，由图 1.3-3(b)，有三角关系式

$$\cos\psi=\cos u\cos(90°-\beta)$$

由此，受晒因子 ε 与轨道太阳角 β 的关系式可列为

$$\varepsilon=\frac{u}{180}=\frac{1}{180}\arccos\left[\frac{\cos\psi}{\sin\beta}\right]$$

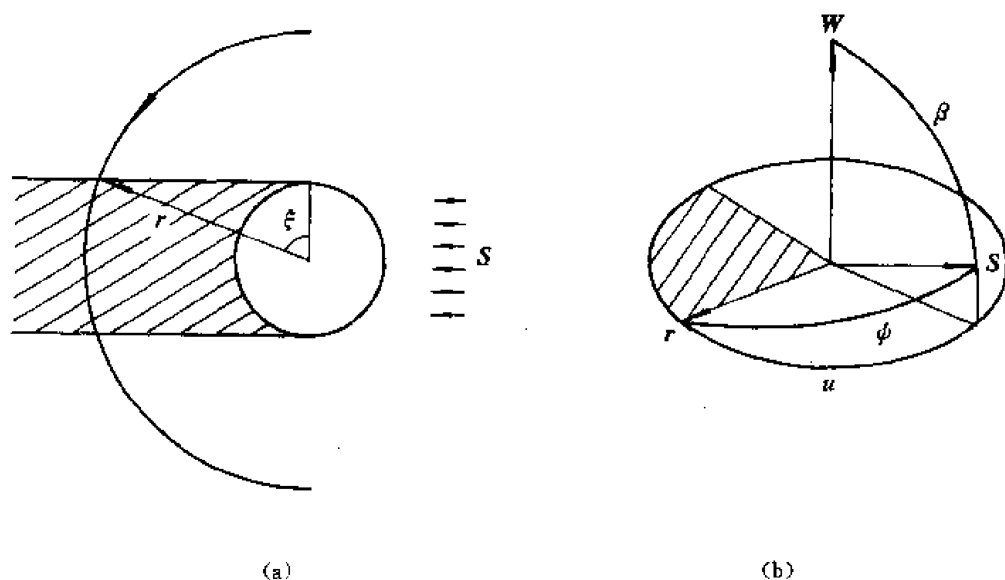


图 1.3-3

为满足轨道太阳角 β 的技术要求，发射轨道的升交点经度 Ω，或该升交点的平太阳时角 $\Omega_S(\Omega_S=\Omega-\alpha_S)$ 可由式(1.3-5)确定，即

$$\Omega_S=\arcsin\left[\frac{\sin\delta_S\cos i-\cos\beta}{\cos\delta_S\sin i}\right] \tag{1.3-8}$$

由此推算发射时刻发射场的地方平太阳时。以降轨发射为例[参见图 1.3-1 和式(1.3-1)]，如降交点的平太阳时角预定为 $180°+\Omega_S$，由轨道倾角要求，降交点 N' 与发射场经度圈的节点 D 的经度差为 Ω_D，则发射时刻的地方平太阳时 t_S 可确定为

$$t_S=12+\frac{1}{15}(180°+\Omega_S+\Omega_D)-\frac{1}{60}t_A \tag{1.3-9}$$

经度差 Ω_D 的正、负由式(1.3-3)确定，上式的单位是小时。

2. 天底太阳角

卫星对地球进行可见光观测，要求在卫星经过被观测地区时，卫星星下点处在合适的阳光照射条件下，获取清晰的遥感图像。可用天底太阳角 η 描述此项技术要求。η 的定义是卫星的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 与太阳矢量 $\boldsymbol{S}$ 的夹角。由图 1.3-4 可知，如遥感观测地区处在纬度圈 φ 上，卫星星下点 B 经过该纬度圈时，星下点的经度圈与赤道的节点 C 与轨道降交点 N' 的经度差为 Ω_C，由球面三角形 CBN'，有

$$\Omega_C=-\arcsin(\tan\varphi/\tan i) \tag{1.3-10}$$

如倾角 $i<90°$，则 $\Omega_C<0$，节点 C 位于节点 N' 的左侧。在赤道惯性坐标中，星下点 B 的单位矢量 $\boldsymbol{B}$ 可列为

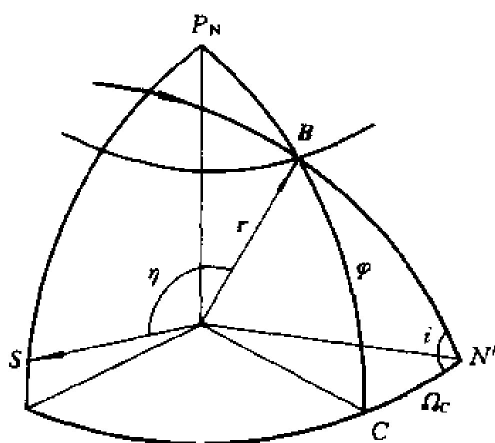


图 1.3-4

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \cos(180°+\Omega+\Omega_C)\\ \cos\varphi & \sin(180°+\Omega+\Omega_C)\\ & \sin\varphi\end{bmatrix}$$

星下点 B 的照度，即卫星天底太阳角 η 可按矢量标积得出，

$$\cos\eta=(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B})=\cos\varphi\cos\delta_S\cos(\Omega_S'+\Omega_C)+\sin\varphi\sin\delta_S \tag{1.3-11}$$

式中 Ω_S' 为降交点 N' 的平太阳时角，有

$$\Omega_S'=180°+\Omega-\alpha_S$$

如 $\Omega_S'<0$，则降交点地方时为上午；反之，为下午。

为满足在指定纬度圈上天底阳光照度的技术要求，发射轨道的降交点平太阳角 Ω_S' 由式(1.3-10)，(1.3-11)得出，即

$$\Omega_S'=\arccos\left[\frac{\cos\eta-\sin\varphi\sin\delta_S}{\cos\varphi\cos\delta_S}\right]+\arcsin\left[\frac{\tan\varphi}{\tan i}\right] \tag{1.3-12}$$

仿照式(1.3-9)，发射时刻的地方平太阳时 t_S 可确定为

$$t_S=12+\frac{1}{15}(\Omega_S'+\Omega_D)-\frac{1}{60}t_A \tag{1.3-13}$$

1.3.3 平面窗口

两颗卫星轨道共面的条件是倾角和升交点赤经都相同。发射轨道的倾角由发射方位角保证，因而，共面发射的时刻就是发射场随地球旋转而进入目标轨道的时刻，每天有两次机会，一次升轨发射，一次降轨发射，参见图 1.3-1。实际操作很难实现绝对的共面发射，以降轨发射为例(参见图 1.3-5)，在共面发射时刻，目标轨道面通过发射场，在球面上后者位于 L 点，由于发射延迟，实际发射时发射场在球面上位于 L' 点，如发射方位角为 A'，不同于共面发射的方位角 A，则发射轨道的倾角 i' 和升交点赤经 Ω' 都不同于共面发射的目标轨道要素 i,Ω，两者轨道面交线的节点为 Q，两轨道的夹角 Δi 符合球面三角形 $NN'Q$ 的角余弦公式：

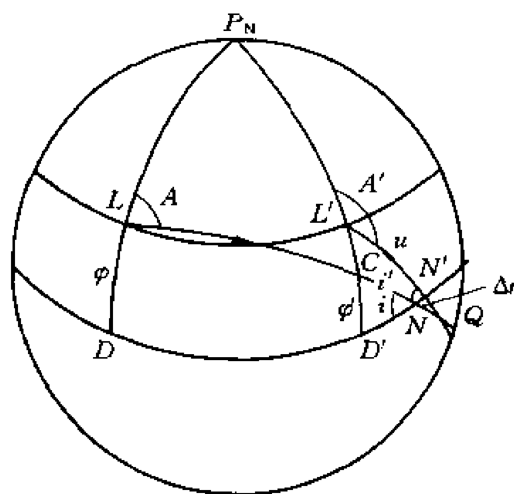


图 1.3-5

$$\cos\Delta i=\cos i\cos i'+\sin i\sin i'\cos\Delta\Omega \tag{1.3-14}$$

式中，$\Delta\Omega$ 为降交点 N 和 N' 的经度差，$\Delta\Omega=\overset{\frown}{NN'}$。

如发射方位角按共面发射的要求设定，不可变更，即 $A'=A$，则有 $i'=i,\Omega'\neq\Omega$。为满足非共面的限制范围(按轨道夹角 Δi 的最大值限制)，由球面三角形公式(1.3-14)可得平面窗口的宽度 Δt 为

$$\Delta t=\frac{2}{\omega_e}\overset{\frown}{DD'}=\frac{2}{\omega_e}\overset{\frown}{NN'}=\frac{2}{\omega_e}\Delta\Omega=\frac{2}{\omega_e}\arccos\left[\frac{\cos\Delta i-\cos^2 i}{\sin^2 i}\right] \tag{1.3-15}$$

由此可得，高倾角目标轨道允许的发射窗口比低倾角轨道短，如夹角限制 $\Delta i=1°, i=50°$，则 $\Delta t=10.4'$。

在图 1.3-5 上，令目标轨道与发射时刻发射场赤经圈的交点为 C，其纬度为 φ'，由于目标轨道为已知，其与发射经线的交点的纬度与实际发射时刻是对应的；又令两轨道面交线节点 Q 与发射点的角距为 u，由球面三角形 $L'CQ$，有关系式

$$\sin \Delta i \sin u = \sin(\varphi - \varphi') \sin C \tag{1.3-16}$$

由上式得出，如调整发射方位角(即 $A' \neq A$)，根据偏离共面发射的时差，选择最佳发射方位角 A'，使发射点至两轨道交线节点的角距 $u=90°$，使夹角 Δi 为最小。由图 1.3-5 所示，球面三角形 $CD'N$，有

$$\sin C = \frac{\cos i}{\cos \varphi'} \tag{1.3-17}$$

将上式代入式(1.3-16)，令 $u=90°$，得

$$\Delta i_{\min} = \arcsin\left[\frac{\cos i \sin(\varphi - \varphi')}{\cos \varphi'}\right]$$

再由球面三角形 $L'CQ$(其中 $u=90°$)，可得最佳发射方位角 A'：

$$A' = \arccos\left[\frac{\cos C}{\cos \Delta i_{\min}}\right] = \arccos\left[\frac{\cos^2\varphi' - \cos^2 i}{\cos^2\varphi' - \cos^2 i \sin^2(\varphi - \varphi')}\right]^{\frac{1}{2}}$$

对于给定的非共面夹角 Δi 的允许范围，平面窗口宽度可按下式计算：

$$\Delta t = \frac{2}{\omega_e} \widehat{DD'} = \frac{2}{\omega_e}(\widehat{DN} - \widehat{D'N}) \tag{1.3-18}$$

由球面三角形 LDN 和 $CD'N$，上式中的弧段 $\widehat{DN}$，$\widehat{D'N}$ 的等式为

$$\widehat{DN} = \arcsin\left[\frac{\tan \varphi}{\tan i}\right]$$

$$\widehat{D'N} = \arcsin\left[\frac{\tan \varphi'}{\tan i}\right]$$

利用式(1.3-16)(其中 $u=90°$)和式(1.3-17)，可得

$$\tan \varphi' = \frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi'} = \frac{\sin \varphi \cos i - \sin \Delta i}{\cos i \cos \varphi}$$

再代入窗口公式，可得

$$\Delta t = \frac{2}{\omega_e}\left[\arcsin\left(\frac{\tan \varphi}{\tan i}\right) - \arcsin\left(\frac{\cos i \sin \varphi - \sin \Delta i}{\sin i \cos \varphi}\right)\right]$$

例如，令 $\Delta i = 1°$，　$i = 50°$，则 $\Delta t = 13'$。

1.4　太阳同步轨道

在 1.1 节卫星轨道基本特性的叙述中，地球被视为质量均匀的圆球体，轨道六要素中五个要素，如倾角、升交点赤经等均为常值。实际地球的质量分布在赤道附近膨胀凸起，这些隆起的部分可视为附加质量，对于处在南、北半球的卫星产生附加的不通过地心的引力，形成对轨道运动的附加力矩 $\boldsymbol{M}$，使卫星相对地心的动量矩 $\boldsymbol{h}$ 在空间进动(见图1.4-1)，即卫星轨道面与赤道面的节线方向在惯性空间不再是固定不变，而是向东或向西转动，其速率不仅与代表地球质量扁平分布的参数 J_2 项有关，还与轨道高度、倾角、偏心率有关(参阅第二章)。关于轨道摄动，代表节线进动的升交点赤经变化率在轨道一周内的平均值为

$$\dot{\Omega}=-\frac{3nJ_2R_e^2}{2a^2(1-e^2)^2}\cos i \qquad (1.4\text{-}1)$$

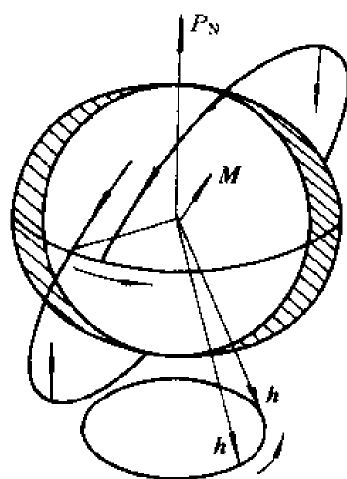


图 1.4-1

式中，n 为轨道平均转速（含引力常数 $\mu=3.986\ 006\times10^5\ \text{km}^3/\text{s}^2$），$J_2=0.001\ 082$，$\dot{\Omega}$的单位为 rad/s。对于圆轨道，上式可改写成一天内的变化增量

$$\Delta\Omega=-9.97\left(\frac{R_e}{a}\right)^{\frac{7}{2}}\cos i \qquad (1.4\text{-}2)$$

式中，$\Delta\Omega$ 的单位为(°)/d 。显然，如轨道倾角 $i<90°$，则 $\dot{\Omega}<0$，为西进轨道，又称为顺行轨道；如 $i>90°$，则$\dot{\Omega}>0$，为东进轨道，又称为逆行轨道。

如选择轨道半长轴 a 和倾角 i 的组合，使 $\Delta\Omega=0.985\ 6$ (°)/d，则轨道进动方向和速率，与地球绕太阳周年转动的方向和速率相同（即经过 365.24 平太阳日，地球完成一次 360°的周年运动），此特定设计的轨道称为太阳同步轨道。

太阳同步轨道的主要特点是太阳照射轨道面的方向在一年内基本不变。精确而言，轨道平面法线和太阳方向在赤道平面上的投影之间的夹角保持不变，即卫星经过赤道节点的地方时不变，见图 1.4-2。此类轨道特别适用于近地轨道的对地遥感卫星，主要优点是下列重要技术参数的周年变化为最小。这些参数有：

卫星太阳照射角；
太阳能源接收量；
同纬度星下点的地方平太阳时；

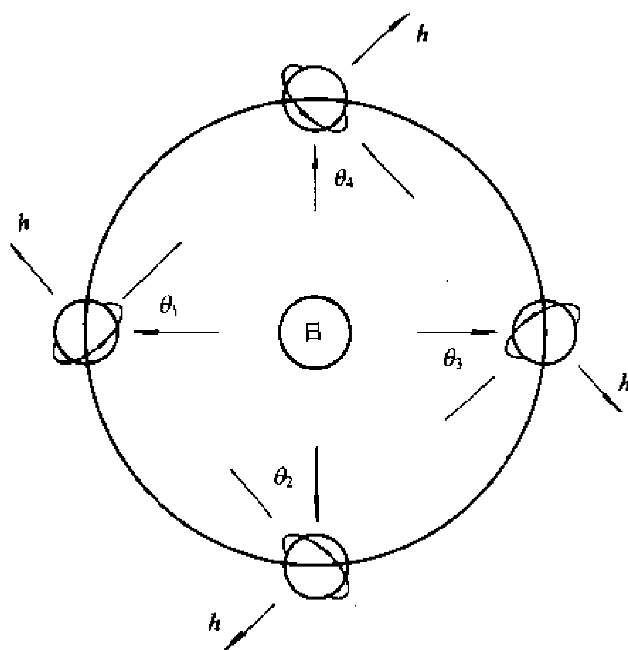


图 1.4-2

同纬度星下点的照度；

地影时间。

前两项直接决定于轨道太阳角 β——轨道法线与太阳方向视线的夹角，见图 1.3-2 和式(1.3-5)，有

$$\beta = \arccos[\sin \Omega_S \cos \delta_S \sin i + \sin \delta_S \cos i] \tag{1.4-3}$$

式中，Ω_S 为升交点的地方平太阳时角($\Omega_S = \Omega - \alpha_S$)，对太阳同步轨道 Ω_S 为常值，其数值决定于发射窗口。在式(1.4-3)中，仅有太阳赤纬 δ_S 为变量($-23.5° \leqslant \delta_S \leqslant +23.5°$)，因此轨道太阳角仅随季节变化。

第 3、4 项决定于天底太阳角——星下点的太阳高度角 η，见图 1.3-4 和式(1.3-11)，有

$$\eta = \arccos[-\cos \varphi \cos \delta_S \cos(\Omega_S + \Omega_C) + \sin \varphi \sin \delta_S] \tag{1.4-4}$$

式中 φ 为指定纬度圈的纬度，Ω_C 是经度圈节点与降交点的夹角由式(1.3-10)确定

$$\Omega_C = -\arcsin(\tan \varphi / \tan i)$$

同样，对于太阳同步轨道，卫星过指定纬度圈时，星下点的地方平太阳时和照度的变化仅与季节有关。

太阳同步轨道遥感卫星的圆轨道高度和倾角：

高度 /km	倾角 /(°)
700	98.19
800	98.60
900	99.03

高倾角的卫星通过地球极地上空，因此，太阳同步轨道又被称为极地轨道。

由于卫星轨道的进动与太阳视运动同步，地影时间的变化也为最小。如轨道升交点地方时为 6:00 AM/PM，则地影时间为最短。

1.5 临界和冻结轨道

地球质量分布在赤道附近隆起，对卫星轨道的第二种影响是，卫星穿越赤道附近时，卫星受到的引力大于其他轨道弧段，在赤道处卫星运动速度加快，轨道半径趋向减少，引起轨道拱线在轨道平面内转动，同时引起偏心率的变化。关于轨道摄动，如仅考虑 J_2 项的影响，近地点幅角 ω 和偏心率 e 的变化率为

$$\left.\begin{aligned} \dot{\omega} &= -\frac{3nJ_2R_e^2}{2a^2(1-e^2)^2}\left(\frac{5}{2}\sin^2 i - 2\right) \\ \dot{e} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.5-1}$$

拱线转动导致卫星经过同纬度的高度不断地变化，严重地影响卫星应用任务。例如，对于服务于高纬度地区的通信卫星采用大椭圆轨道，远地点高 39 420 km，近地点高 1 000 km，偏心率 0.72，轨道周期 12 h。如要求远地点始终处在北极上空，即拱线不得转动，则由式(1.5-1)，轨道倾角应满足公式

$$\frac{5}{2}\sin^2 i - 2 = 0 \tag{1.5-2}$$

即 $i = 63.43°$(或 $i = 116.57°$)。此值的倾角称为临界倾角，此类轨道称为临界轨道。

对于近地轨道的遥感卫星，倾角 63.4°不符合卫星应用要求，卫星遥感还要求偏心率很小，且为常值。引用地球扁平高阶摄动项 J_3 对轨道要素 ω, e 的影响，有[4]

$$\dot{\omega}=-\frac{3nJ_2R_e^2}{2a^2(1-e^2)^2}\left(\frac{5}{2}\sin^2 i-2\right)\left[1+\frac{J_3R_e}{2J_2a(1-e^2)}\left(\frac{\sin^2 i-e\cos^2 i}{\sin i}\right)\frac{\sin\omega}{e}\right]$$

$$\dot{e}=\frac{3nJ_3R_e^3\sin i}{4a^3(1-e^2)^2}\left(\frac{5}{2}\sin^2 i-2\right)\cos\omega$$

为使拱线不转动，可选择合适的偏心率，使中括号项为零，同时设置合适的近地幅角，使 $\dot{e}=0$。根据上式，合适的轨道设计是

$$\omega=90°$$

$$e=\frac{\sin i}{\dfrac{\cos^2 i}{\sin i}-\dfrac{2J_2a}{J_3R_e}}$$

有 $\dot{\omega}=\dot{e}=0$，近地点幅角 ω 被保持，或称被冻结在 90°。轨道的倾角和高度可以独立选择，此类轨道称为冻结轨道。例如，海洋卫星应用要求 $H=800$ km，$i=108°$，冻结轨道的参数是 $\omega=90°$，$e=0.000\ 8$[4]。

1.6 回归轨道

卫星遥感运行设计的一项重要分析工作是轨道覆盖问题。从应用角度，卫星遥感仪器对地扫过区域的合成应覆盖全球，并且周期性重复。此类卫星的轨道特性是：星下点轨迹（地理坐标）周期性重叠，即经过一定时间后，星下点轨迹又重新回到原先通过的路线，此类轨道称为回归轨道，或称重访轨道、循环轨道。此外在该周期内，在同纬度圈上相邻轨迹的距离相同[5]。

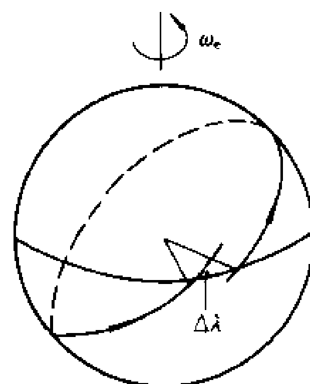


图 1.6-1

星下点轨迹在地球面上横移是地球自转、轨道节线进动和卫星轨道运动的合成，在轨道一周内星下点轨迹越过赤道的横移角，即连续相邻轨迹在赤道上的间隔 $\Delta\lambda$（见图 1.6-1）为

$$\Delta\lambda=T_N(\omega_e-\dot{\Omega}) \tag{1.6-1}$$

式中，ω_e 为地球转速；$\dot{\Omega}$为轨道节线进动的平均速率；T_N 为轨道运动的节点周期，包含轨道的平均转速 n 和地球扁平摄动 J_2 的作用项（见节二章），其式为

$$T_N=2\pi\left(\frac{a^3}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{3J_2R_e^2}{2a_2}\left(3-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\right] \tag{1.6-2}$$

如选择轨道的半长轴和倾角，使轨道周期满足下列公式：

$$RT_N(\omega_e-\dot{\Omega})=R\cdot\Delta\lambda=2\pi$$

式中 R 为正整数，则此轨道的回归周期为一天，在一天内轨道圈数为 R。

因遥感仪器的性能，近地轨道卫星的轨道高度通常是 600 km～1 000 km。一天内卫星轨道的整圈数可以是 13，14 或 15 圈，对于一天回归的轨道，相邻轨迹的角距间隔为 27.7°，25.7°或 24°，地面距离间隔约 2 850 km，远远超出星上遥感仪器对地观测的幅宽覆盖范围。因此为

实现全球覆盖，通常利用多天回归轨道，即设计轨道的半长轴和倾角使轨道周期 T_N 满足下列公式：

$$RT_N(\omega_e-\dot{\Omega})=R\cdot\Delta\lambda=N\cdot 2\pi$$

或写成

$$RT_N=ND_N \tag{1.6-3}$$

式中，R,N 均为正整数；$D_N=2\pi/(\omega_e-\dot{\Omega})$，称为节点日。

式(1.6-3)表示，轨道经过 N 天回归一次，在回归周期内共转 R 圈，每天的轨道圈数为非整数，定义 Q 为

$$Q=\frac{R}{N}=\frac{2\pi}{\Delta\lambda}=I\pm\frac{C}{N} \tag{1.6-4}$$

Q 称为回归系数，由整数和分数组成；正整数 I 为接近一天的轨道圈数；C 为另一正整数(其意义见下述)。I,N,C 构成表征回归轨道的三大要素。

第 I 圈的轨迹相对起始轨迹的相移角 α 为

$$\alpha=\pm(I\cdot\Delta\lambda-2\pi) \tag{1.6-5}$$

如$(I\cdot\Delta\lambda-2\pi)>0$，则取"＋"号，表明经过一天轨迹向东移动；如$(I\cdot\Delta\lambda-2\pi)<0$，取"－"号，表明轨迹向西移。两种情况都表明，在连续相邻轨迹的间隔 $\Delta\lambda$ 内，插入每过一天的相移轨迹。N 天覆盖又表明每个连续相邻轨迹的间隔 $\Delta\lambda$ 被 N 天内通过的轨迹等分割为 N 区，每一区间的幅宽约等于 γ：

$$\gamma=\frac{\Delta\lambda}{N} \tag{1.6-6}$$

即为任意相邻轨迹之间的间隔。根据星上遥感仪器的性能，选择周期性覆盖的天数 N，使相邻轨迹的幅宽 γ 小于仪器的观测幅宽。

设计轨道周期 T_N，可使一天的轨迹相移角 α 等于幅宽角 γ，或等于后者的整倍数，有

$$\alpha=C\gamma \tag{1.6-7}$$

将式(1.6-5)、(1.6-6)代入上式，得

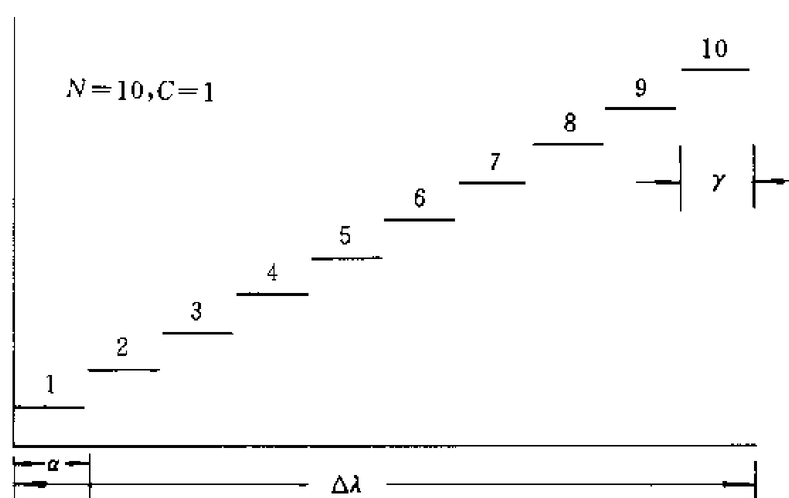
$$\frac{C}{N}=\pm\left(I-\frac{2\pi}{\Delta\lambda}\right)=\pm\left(I-\frac{D_N}{T_N}\right)$$

再由式(1.6-3)，得轨道周期的设计公式

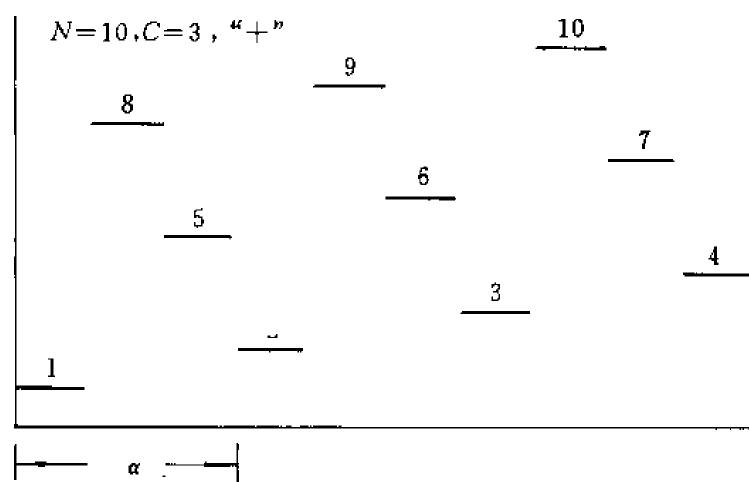
$$T_N=\frac{D_N}{I\mp\dfrac{C}{N}} \tag{1.6-8}$$

上式表明，设计回归轨道的周期，不仅决定于要求全球覆盖的周期天数、每天轨道的圈数，还与正整数 C 的选取有关。C 的正数值及其前置的符号"＋"或"－"决定了在每个连续相邻轨道间隔 $\Delta\lambda$ 内的覆盖方式。如 $C=1$，则一天轨迹相移角等于幅宽角，为连续覆盖，即在 N 天内，通过 $\Delta\lambda$ 间隔的轨迹，按日期数连续排列，形成按日期的连续覆盖。如 $C>1$，则一天轨迹相移角为幅宽角的倍数，在 N 天内，通过 $\Delta\lambda$ 间隔的轨迹不再是按日期数连续排列，形成断续式覆盖。在式(1.6-8)的分母中，取"＋"号，则轨迹东移；取"－"号，则轨迹西移。

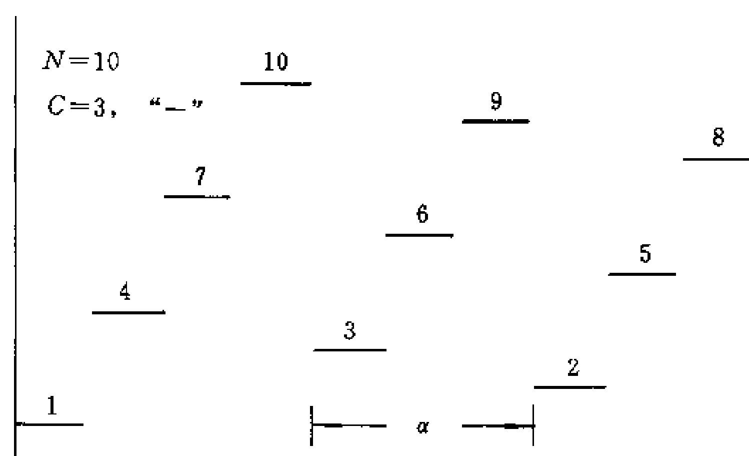
举例：令回归轨道兼为太阳同步轨道，覆盖周期为 $N=10$ 天，取回归系数为 $Q=14+\frac{1}{10}$，$Q=14+\frac{3}{10}$和 $Q=14-\frac{3}{10}$等三例，在 $\Delta\lambda$ 间隔内的覆盖排列分别见图 1.6-2(a)、(b)、(c)，图中


N=10,C=1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
γ
α
Δλ

(a)


N=10,C=3, "+"
10
9
8
7
6
5
4
3
1
α

(b)


N=10
C=3, "−"
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
α

(c)

图 1.6-2

数字1,2,3,…表示按日期的轨迹覆盖,其轨道高度 H 等轨道参数见表1.6-1。

表 1.6-1

Q	$\Delta\lambda/(°)$	γ/km	T_N/min	H/km	$i/(°)$
$14\frac{1}{10}$	25.53	284.4	102.1	860.6	98.9
$14\frac{3}{10}$	25.18	280.4	100.7	794.3	98.5
$13\frac{7}{10}$	26.27	292.6	105.1	1 001.7	99.5

1.7 静止轨道

要使一颗绕地球运转的卫星相对于地球成为静止卫星,必须将卫星送入一个特定的轨道。这种静止卫星的轨道要同时具有三种特性:

(1) 轨道的周期与地球自旋周期一致,$T=\frac{2\pi}{\omega_e}$;

(2) 轨道的形状是圆形,偏心率 $e=0$;

(3) 轨道处在地球赤道平面上,倾角 $i=0$。

处在这种轨道上卫星的星下点位置(地理经纬度)是静止不动的,卫星相对于地面上观测者的方位角、仰角也是不变的。如仅有轨道周期与地球自转周期相等,这种轨道称为地球同步轨道。但是,处在同步轨道上的卫星相对于地球并不一定是静止的。因为周期、偏心率、倾角三者是独立的。在分析静止卫星的特定问题时,有时统称卫星处在静止轨道上。所谓地球在一天内自旋一转周期为24 h,这是按地方平太阳日测定的,即平太阳连续两次通过同一子午圈的上中天的时间间隔。在这段时间内,地球在黄道上移过一个角度(见图1.7-1),因此这个时间间隔不等于卫星在空间中自转一周所需的时间。而春分点连续两次通过同一子午圈的上中天的时间间隔才是地球自转的周期。这个时间间隔称为恒星日。两者的差别是,当经过一天后,太阳落后春分点约4′才发生上中天,因此,平太阳日大于恒星日,即地球的自转周期小于24 h。由天文学得知,在一个回归年中——即太阳连续两次通过春分点的时间间隔,共有365.24个平太阳日,有366.24个恒星日,或

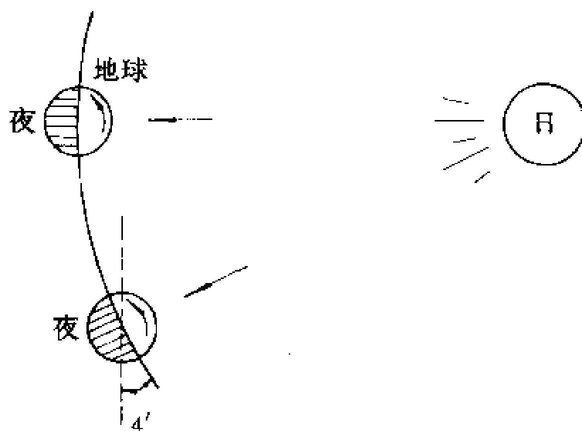


图 1.7-1

$$1\text{ 恒星日} = \frac{365.24}{366.24}\text{ 平太阳日} = 23\text{ h }56\text{ min }4.1\text{ s} = 86\ 164.1\text{ s}$$

因此地球自旋的速率是

$$\omega_e = \frac{2\pi}{\text{恒星日}} = 7.292\ 115\ 8\times10^{-5}\text{ rad/s} = 360.985\ 6\ (°)/\text{d}$$

根据引力常数 $\mu=3.986\ 004\ 4\times10^5\ \text{km}^3/\text{s}^2$,按照式(1.1-15)可求出地球同步圆轨道的半径和速度:

$$r_s = \left(\frac{\mu}{\omega_e^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 42\ 164.17\ \text{km} \tag{1.7-1}$$

$$v_s = r_s\omega_e = 3.074\ 7\ \text{km/s}$$

实际上理想的静止轨道是不存在的，卫星在轨道上受到各种摄动力的作用，如地球形状不规则、密度分布不均匀都会使卫星受到的引力发生变化，太阳、月球对卫星的引力以及太阳光辐射对卫星产生的压力等（见第二章），都使实际轨道的倾角、偏心率发生少量的变化。轨道周期也不完全与地球同步，从地面上观察，卫星不是固定不动的，而总是在东西经度方向和南北纬度方向漂移着。有下列 4 种典型轨道。

(1) 卫星轨道是非同步的赤道圆轨道，即 $i=0$，$e=0$，$a=a_s+\Delta a$，轨道半长轴 a 不等于同步半径 a_s($r_s=42\ 164$ km)。如 $a>a_s$，则轨道转速 n 小于同步转速 n_e(即 ω_e)，卫星向西漂移；如 $a<a_s$，则轨道转速 n 大于同步转速 n_e，卫星向东漂移。对轨道平转速公式进行增量微分，由卫星轨道转速定律 $n^2=\mu/a^3$，可得

$$n = n_e + \Delta n = \omega_e\left(1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{\Delta a}{a_s}\right) \tag{1.7-2}$$

和平近点角 M 的近似公式

$$M = n(t-t_P) = \omega_e(t-t_P)\left(1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{\Delta a}{a_s}\right) \tag{1.7-3}$$

式中 t_P 为过近地点时刻。由上式得，半长轴增量 Δa 引起卫星在一天内的非同步漂移量 $\Delta M = -0.013\Delta a$ (°)/km。

(2) 卫星轨道是非同步的小偏心率赤道轨道，即 $i=0,\Delta a\neq 0,e\neq 0$。按卫星径向距离公式(1.1-12)，可得线性化近似：

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} \approx a(1-e\cos f) \approx a_s + \Delta a - a_s\cdot e\cos f \tag{1.7-4}$$

再由卫星动量矩公式(1.1-7)，可得卫星真近点角 f 变化率的近似公式($\Delta a \ll a_s$，$e\ll 1$)：

$$\dot{f} = \sqrt{\mu}\,a^{-\frac{3}{2}}(1+e\cos f)^2 = \omega_e\left(\frac{a_s}{a}\right)^{\frac{3}{2}}(1+e\cos f)^2$$

$$\approx \omega_e\left(1-\frac{3}{2}\cdot\frac{\Delta a}{a_s}\right)(1+2e\cos f) \approx \omega_e\left(1-\frac{3}{2}\cdot\frac{\Delta a}{a_s}+2e\cos f\right)$$

参见 1.1 节，当 $e\ll 1$，$\Delta a\ll a_s$，有近似公式

$$\cos f \approx \cos M \approx \cos\omega_e(t-t_P)$$

因此，上式真近点角 f 的近似积分公式(积分初始为 t_P)，可列为

$$f = \omega_e(t-t_P)\left(1-\frac{3}{2}\cdot\frac{\Delta a}{a_s}\right) + 2e\sin\omega_e(t-t_P) \tag{1.7-5}$$

卫星地心经度 λ 等于卫星的恒星时角(即赤经)减去格林威治恒星时角，引用轨道要素，有近似公式($i\ll 1$)：

$$\lambda = \Omega + \omega + f - (G_0 + \omega_e(t-t_0)) \tag{1.7-6}$$

式中 G_0 是 t_0 时刻格林威治的恒星时角。将式(1.7-5)代入式(1.7-6)，得

$$\lambda = \bar{\lambda}_0 - \frac{3}{2}\cdot\frac{\Delta a}{a_s}\omega_e(t-t_0) + 2e\sin\omega_e(t-t_P) \tag{1.7-7}$$

式中

$$\bar{\lambda}_0 = \Omega + \omega + \left(1-\frac{3}{2}\cdot\frac{\Delta a}{a_s}\right)\omega_e(t_0-t_P) - G_0$$

称为 t_0 时刻卫星的平经度。偏心率和半长轴偏差引起卫星相对平经度位置的偏离运动方程为

$$\Delta r = \Delta a - a_s \cdot e\cos\omega_e(t - t_P) \tag{1.7-8}$$

$$\Delta x = -\frac{3}{2}\cdot\Delta a\omega_e(t - t_0) + 2a_s\cdot e\sin\omega_e(t - t_P) \tag{1.7-9}$$

式中 Δx 表示相对平经度的切向偏离距离。上式表明，在轨道周期为同步的情况下($\Delta a=0$)，偏心率使卫星从定点位置移开，进入围绕平经度(定点位置)的椭圆轨迹，周期为一天，其长轴沿东西方向，长轴的长度为 $4a_s\cdot e$，短轴沿径向方向，长度为 $2a_s\cdot e$。见图 1.7-2，图中 E 表示东向。偏心率引起卫星经度的东西漂移幅度为 $2e$，如 $e=10^{-3}$，则 $\Delta\lambda=0.11°$。半长轴偏差又使该椭圆的中心沿东(或西)方向漂动，见图 1.7-3。

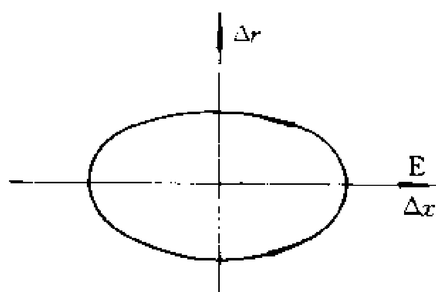


图 1.7-2

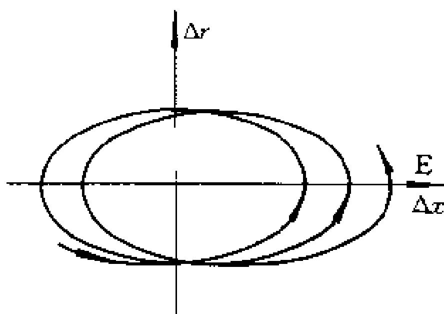


图 1.7-3

(3) 卫星轨道是小倾角的同步圆轨道，即 $i\neq0$，$\Delta a=0$，$e=0$。如图 1.7-4 所示，当卫星经过节点 N 时，其地心经度为 λ_N，从此点开始，经过时间 t，卫星到达 S 点时，转过幅角 u，节点 N 在空间固定，但格林威治子午圈转过 $\omega_e t$ 角，利用球面三角形 NDS，可得卫星的地心经纬度为

$$\lambda = \lambda_N + \arctan(\cos i\tan u) - \omega_e t \tag{1.7-10}$$

$$\varphi = \arcsin(\sin i\sin u) \tag{1.7-11}$$

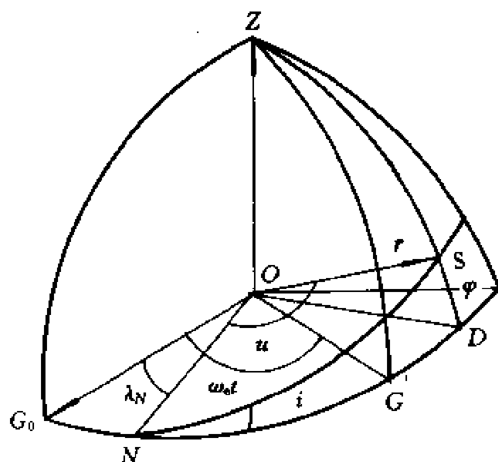


图 1.7-4

由上式可看出，由于轨道倾角在卫星运转一周中，其纬度和相对于参考点 λ_N 的经度差 $\Delta\lambda=\lambda-\lambda_N$ 是周期性变化的，卫星每天在东西、南北方向来回漂移，两者的合成运动使漂移轨迹在当

地水平面内呈 8 字形，见图 1.7-5。此 8 字形在南北方向的最大纬度等于轨道的倾角。对于小倾角的同步轨道可将式(1.7-10)改写为

$$\cos i = \tan(\omega_e t + \Delta\lambda)\cot \omega_e t$$

经三角恒等变换，上式可化成

$$1 - \cos i = -\frac{\sin \Delta\lambda}{\sin \omega_e t \cos(\omega_e t + \Delta\lambda)}$$

在小倾角的同步轨道上，$\Delta\lambda$ 为小量，引用 $\cos i$ 的级数展开式，由上式可得

$$\Delta\lambda = -\frac{i^2}{4}\sin 2\omega_e t \tag{1.7-12}$$

因此由倾角引起的东西方向最大偏差为 $i^2/4$，如 $i=1°$，则 $\Delta\lambda=0.004\ 4°$。可见小倾角引起的经度周期性漂移幅度远小于偏心率的影响。

图 1.7-5

(4) 卫星轨道是小倾角和小椭圆度的同步轨道，即 $i\neq0$，$e\neq0$，$\Delta a=0$。综合式(1.7-8)、(1.7-9)和(1.7-11)，可得小倾角、小偏心率情况下卫星偏离定点位置的运动方程为

$$\left.\begin{aligned}\Delta r &= -a_s \cdot e \cos M \\ \Delta x &= 2a_s \cdot e \sin M \\ \Delta y &= a_s \cdot i \sin(M + \omega)\end{aligned}\right\} \tag{1.7-13}$$

式中 $M=\omega_e(t-t_P)$；Δx，Δy 表示相对定点位置的切向和侧向(法向)距离。在轨道平面(Δr，Δx)内的相对轨迹呈椭圆形，见图 1.7-2。在轨道的垂直平面内相对轨道形状与近地点幅角 ω 有明显的关系。在轨道的切向垂直平面(Δy，Δx)内，相对轨迹形状见图 1.7-6。在轨道的径向垂直平面(Δy，Δr)内，相对轨迹形状见图 1.7-7。轨道倾角的作用是将图 1.7-2 的椭圆形相对轨迹扭转出轨道平面，扭转的方向决定于近地点幅角。

如 $\omega=0°$或 $180°$，则轨道倾角的作用是将原相对轨迹平面绕轨道径线转出赤道平面，即该平面与赤道平面的相交节线与轨道径线一致，相对轨迹椭圆的短轴仍沿径向方向，其长轴垂直于轨道径线，相对赤道面的倾斜角 γ 为

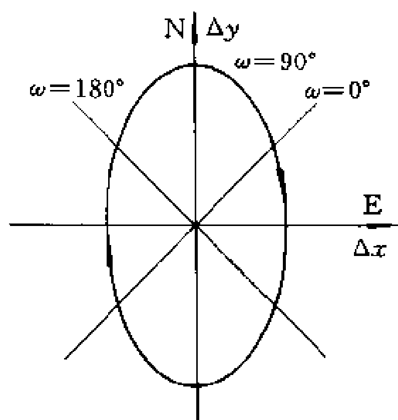


图　1.7-6

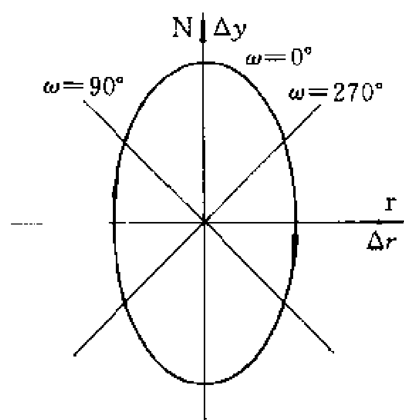


图　1.7-7

$$\gamma = \arctan\left(\frac{i}{2e}\right)$$

当侧向(赤道平面外)偏离最大时,径向偏差为零。

如 $\omega=90°$ 或 $270°$,则相对轨迹平面绕轨道切线转出赤道平面,相对轨迹椭圆的长轴沿轨道切向,椭圆短轴的倾斜角 γ 为

$$\gamma = \arctan\left(\frac{i}{e}\right)$$

当倾角和偏心率趋向零时,升交点和近地点的方向变得不确定,并且在轨道摄动方程中出现奇点(见第二章)。为设计轨道保持策略,须另选轨道要素,更方便地描述卫星的漂移运动,定义倾角矢量 $\boldsymbol{i}$——其长度等于倾角值,方向与轨道法线一致。定义偏心率矢量 $\boldsymbol{e}$——其长度等于偏心率,方向指向近地点。如图 1.7-8 所示,在赤道惯性坐标的赤道平面上 $\boldsymbol{i}_P$ 和 $\boldsymbol{e}_P$ 是倾角和偏心率矢量的投影,因 $\cos i \approx 1$,矢量 $\boldsymbol{e}$、$\boldsymbol{i}$ 的分量可列出并定义为

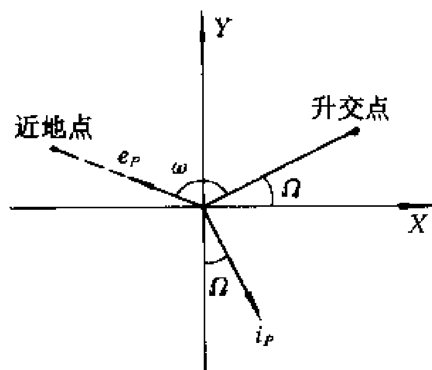


图　1.7-8

$$\left.\begin{aligned} e_x &= e\cos(\Omega+\omega) \\ e_y &= e\sin(\Omega+\omega) \\ i_x &= \sin i \sin\Omega \\ i_y &= \sin i \cos\Omega \end{aligned}\right\} \tag{1.7-14}$$

上式中,i_y 定义为倾角矢量在 $(-\overline{Y})$ 轴上的分量。

对于静止轨道 a_s 为定值,参见式(1.7-2),定义平经度漂移率 D 为等效于半长轴 a 的轨道要素:

$$D = -\frac{3}{2a_s}\cdot\Delta a \tag{1.7-15}$$

D 是量纲为 1 的量,是轨道转速偏离地球同步的量度,乘以地球转速 361(°)/d,即得到一天内漂移的角度。如 $\Delta a = 1$ km,则 $D = 0.36\times10^{-4} = 0.0128$(°)/d。如 $D>0$,则卫星向东漂;如 $D<0$,则卫星向西漂。

定义卫星的平赤经 l 为

$$l = \Omega + \omega + M \tag{1.7-16}$$

其在 t_0 时刻的平赤经 $l_0 = \Omega + \omega + M_0$，可作为替代 M_0 的第六个轨道要素。引用漂移率 D 和式(1.7-2)，有

$$M = n(t - t_P) = (1 + D)\omega_e(t - t_P)$$

以及

$$D(l - l_0) = D(M - M_0) = (D + D^2)\,\omega_e(t - t_0) \approx D\omega_e(t - t_0) \tag{1.7-17}$$

在上式中略去高阶小量 D^2。

引用定义式(1.7-14)~(1.7-16)和式(1.7-17)，由式(1.7-8)，(1.7-9)得卫星在赤道平面内的运动方程：

$$\left.\begin{aligned} r &= a_s - a_s\left(\frac{2}{3}D + e_x \cos l + e_y \sin l\right) \\ \lambda &= \bar{\lambda}_0 + D(l - l_0) + 2e_x \sin l - 2e_y \cos l \end{aligned}\right\} \tag{1.7-18}$$

再由式(1.7-13)的第三式，得卫星偏离赤道平面的运动方程：

$$\varphi = -\,i_x \cos l + i_y \sin l \tag{1.7-19}$$

因此，D，e_x，e_y，i_x，i_y，l_0 组成静止轨道的六要素。在运动方程中，时间变量 t 被替换为卫星的平恒星时角(平赤经)l。

1.8 星座轨道

1.8.1 全球连续覆盖卫星群

卫星应用任务——全球导航、通信和全球环境监测要求多卫星组网，使地球上任一地区在任一时刻被系统中某一颗卫星覆盖，或被若干颗卫星同时覆盖。文献[7]，[8]等研究结果表明，采用等高度、等倾角的圆轨道组网是一种最佳配置方案。各轨道平面相对赤道平面均匀分布，在每一轨道平面内卫星均匀分布。确定星座设计的最重要因素是轨道倾角为极轨或为倾斜轨道，以及轨道的高度和卫星的最小仰角。

本节限于论述单星覆盖的卫星群的几何分布。

单个卫星覆盖圈的面积决定于卫星的高度和卫星相对覆盖边缘的仰角。由 1.2.3 节和图 1.8-1 所示，覆盖角 ψ 与高度 H 和仰角 E 的关系式为

$$\psi = \arccos\left(\frac{R_e \cos E}{R_e + H}\right) - E \tag{1.8-1}$$

令每一轨道平面内卫星均匀分布，相邻卫星的星下点之间的角距为 $2b$，卫星群构成的覆盖带的宽度为 $2c$(见图 1.8-1)，有球面三角关系式

$$\sin b = \tan c / \tan \theta \tag{1.8-2}$$

$$\sin c = \sin \psi \sin \theta \tag{1.8-3}$$

对于极轨卫星群，各条轨道的轨道面都与地球的某一子午面重合，如各条轨道在赤道上的覆盖带衔接、覆盖全赤道带，则任一纬度地区都被相邻轨道带重叠覆盖，全球覆盖所需的轨道数 P 为

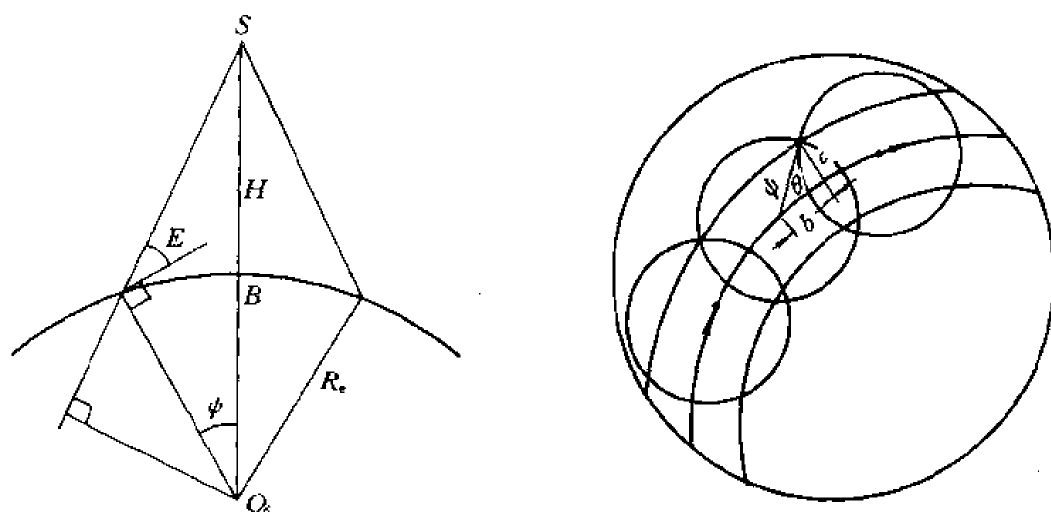


图 1.8-1

$$P=\frac{\pi}{2c} \tag{1.8-4}$$

在每一轨道面内的卫星数 q 为

$$q=\frac{\pi}{b} \tag{1.8-5}$$

引用公式(1.8-2),(1.8-3)极轨卫星群的卫星总数 N 为

$$N=P\cdot q=\frac{\pi^2}{2\arcsin(\sin\psi\sin\theta)\cdot\arcsin\left\{\frac{\tan[\arcsin(\sin\psi\sin\theta)]}{\tan\theta}\right\}} \tag{1.8-6}$$

由上式,并参见图 1.8-1,可选择最佳 θ 角,使卫星总数为最少。因 N,P,q 都为正整数,其微分虽无意义,但可得近似最佳角 θ。从图 1.8-1,直观地看出,如增大 θ 角,可扩大轨道覆盖带,即可减少轨道数,但增加轨道内的卫星数;如减小 θ 角,则增大轨道面卫星间的角距,减少卫星数,但需增加轨道平面数。因此对于给定的覆盖 ψ,可选择最佳 θ 角,即匹配选择 P 和 q 数,而覆盖角直接决定卫星的最小仰角 E。以小卫星群组成全球通信网络为例,令仰角 $E=5°$,几种典型的极轨卫星群的基本参数见表 1.8-1。

表 1.8-1

N	P	q	$\theta/(°)$	$\psi/(°)$	H/km
12	3	4	39.23	52.24	5 358
32	4	8	47.26	31.4	1 514
48	8	6	21.69	31.86	1 561
66	6	11	43.57	22.0	752

对于非极轨的倾斜轨道卫星群,在赤道上覆盖衔接的相邻轨道,在高纬度地区相邻轨迹覆盖带之间留有网眼。以偶数轨道平面为例,令 $P=6$,见图 1.8-2。轨迹①和②以及轨迹③和⑥的覆盖带交叉点为 A,C 和 D,F,在 C 点和 D 点之间为网眼。轨迹①和②的交点为 B,轨迹③

和⑥的交点为 E，因偶数对称，E 点位于赤道上。以 φ 表示各交点的纬度，由球面三角形 OBE，有三角关系式：

$$\left.\begin{aligned}\tan\varphi_B &= \tan i\sin\left(\frac{2\pi}{P}\right)\\ \sin\alpha\sin\varphi_B &= \sin i\sin\left(\frac{2\pi}{P}\right)\end{aligned}\right\}\tag{1.8-7}$$

式中角 α 是轨迹②与 $\overset{\frown}{BE}$ 的夹角。由图 1.8-2，可知各轨迹覆盖带的宽度为 $2c$，在轨迹①覆盖带的交点 B，C 区域，有三角关系式

$$\sin\alpha\sin(\varphi_B-\varphi_C)=\sin C\tag{1.8-8}$$

消去式(1.8-7)，(1.8-8)中的 α 和 φ_B，得网眼 C 点的纬度 φ_C 的公式为

$$\sin i\cos\varphi_C\sin\left(\frac{2\pi}{P}\right)-\cos i\sin\varphi_C=\sin C\tag{1.8-9}$$

同理，在轨迹③覆盖带的交点 D，E 区域，有三角关系式

$$\sin(90^\circ-i)\sin\varphi_D=\sin C\tag{1.8-10}$$

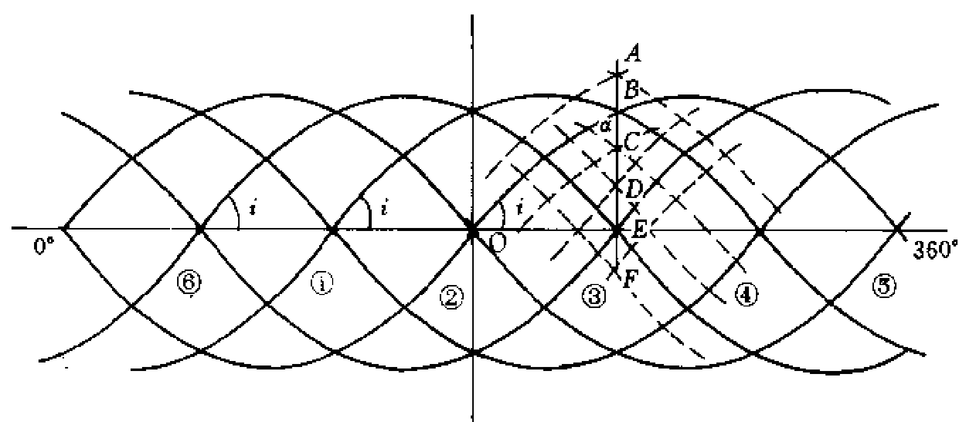


图 1.8-2

对于单星覆盖，如令交点 D，C 和纬度相等 $\varphi_C=\varphi_D$，则可实现网眼覆盖。消去式(1.8-9)和(1.8-10)中的 φ_C，φ_D，得轨迹覆盖带半宽度 c 和倾角 i 的关系式

$$\sin C=\frac{\sin i\cos i\sin\left(\frac{2\pi}{P}\right)}{\left[4\cos^2 i+\sin^2 i\sin^2\left(\frac{2\pi}{P}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

以单星覆盖为例，令卫星仰角 $E=5°$，轨道倾角 $i=55°$，卫星轨道群的基本参数见表 1.8-2。

表 1.8-2

N	P	q	$\theta/(°)$	$\phi/(°)$	H/km
18	6	3	20	61.3	9 419
36	6	6	32.3	34.4	1 842

1.8.2 地球同步卫星群

静止轨道卫星通信的一种发展方向是利用若干颗子卫星替代单颗大型卫星平台的功能，这些子卫星分布在母星(或假想的母星——定点位置)的周围，构成某种形式的星座，相互间距约几十公里。设计星座的主要考虑是避免子卫星相互碰撞和对地通信的相互遮挡，影响电波传输，以及子卫星之间星际通信的视线方向的限制范围。利用静止卫星小偏差运动方程式(1.7-18)，(1.7-19)代入同步半径数值，可列出每个卫星偏离预定位置的定量方程：

$$\Delta r = -42\,164.18 \cdot e \cos M$$
$$\Delta x = 84\,328.36[e \sin M + (\lambda_j - \lambda_0)]$$
$$\Delta y = 735.85 \cdot i \sin(M + \omega)$$

式中，Δx 为切向偏离，Δy 为侧向(偏离轨道平面)距离，λ_0 为卫星群(座)中心的定点位置，λ_j 是单个卫星的预定位置(平经度)。可见，子卫星的轨道要素的基本要求是 $e<10^{-3}$，$i<1°$。此外，为保持星座的同步性，要求各卫星的漂移率基本相同。同步卫星星座的几何构形决定于各个卫星的静止轨道要素：$\lambda_j, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{i}_j$。由小偏差线性化原理，两颗卫星之间的相对运动关系与单个卫星的小偏差运动方程(1.7-18)，(1.7-19)相似。令两颗卫星的静止轨道要素分别为$(\lambda_{01}, D_1, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{i}_1)$和$(\lambda_{02}, D_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{i}_2)$，两者之差(以标记“$\delta$”表示)为

$$\delta\lambda_0 = \lambda_{01} - \lambda_{02}, \quad \delta D = D_1 - D_2, \quad \delta \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \delta \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}_1 - \boldsymbol{i}_2 \tag{1.8-11}$$

如两者的漂移率相同，卫星间相对距离很小，则两者的平赤经 l 近似相同，两颗卫星在轨道径向、切向和侧向的相对距离方程可写成

$$\left.\begin{aligned} \delta r &= r_1 - r_2 = -a_s(\delta e_x \cos l + \delta e_y \sin l) \\ \delta x &= a_s(\lambda_1 - \lambda_2) = a_s(\delta\lambda + 2\delta e_x \sin l - 2\delta e_y \cos l) \\ \delta y &= a_s(\varphi_1 - \varphi_2) = a_s(-\delta i_x \cos l + \delta i_y \sin l) \end{aligned}\right\} \tag{1.8-12}$$

等式左端 $\delta x, \delta y$ 表示沿轨道坐标切向和侧向的相对距离，右端项的下标 x, y 表示偏心率和倾角矢量在地心赤道惯性坐标 $\overline{X}, \overline{Y}$ 轴上的分量。上式也是子卫星与母卫星(或假想母卫星)之间的相对距离方程。在卫星群的构形设计中，可令母星的偏心率和倾角均为零，因此，建立卫星星座的基本方法是分别设置子卫星的轨道要素，满足不同几何构形的要求。

(1) 经度分置模式：此为最简单的分置模式，各子卫星沿轨道经度圈分布，位于星座中心定点位置的两侧、具有不同的平经度。这种简单分置需较宽的轨道窗口，以两颗卫星为例，此分置的特点是，

$$\delta\lambda_0 > 2(e_1 + e_2), \qquad \delta D = 0$$

(2) 同平面偏心率分置模式：令各子卫星享用同一定点经度，但偏心率 $\boldsymbol{e}_j$ 各不相同。由各卫星在东西方向的相位差形成一定形式的星座。此模式的特点是

$$\delta\lambda_0 = 0, \qquad \delta D = 0, \qquad \delta e \neq 0 \tag{1.8-13}$$

卫星间的相对距离方程为

$$\left.\begin{aligned} \delta r &= -a_s(\delta e_x \cos l + \delta e_y \sin l) \\ \delta x &= 2a_s(\delta e_x \sin l - \delta e_y \cos l) \end{aligned}\right\} \tag{1.8-14}$$

一颗卫星围绕另一颗卫星的相对运动形成一椭圆，短轴沿径向，长度为 $a_s \cdot \delta e$，长轴沿切向，是短轴的两倍。如各子卫星的偏心率幅值相同，但偏心率矢量的指向不同，则各子卫星在同一椭圆上，相隔不同的相位，绕共同的平经度点周期转动。如以四颗子卫星为例，各偏心率矢量相隔

90°。图 1.8-3(a)表示各轨道在赤道惯性坐标面的空间分布。图 1.8-3(b)表示各卫星相对定点位置的相对轨迹为同一椭圆,各子卫星在椭圆上相位不同,例如子卫星 1 和 3 相对位于椭圆短轴,过 6 小时,两者转到长轴上,再过 6 小时,又回到短轴。偏心率分置的基本原则是,使任一对卫星偏心率之差 δe 达最大。见图 1.8-3(a),偏心率矢量的分布。

由于卫星群处在同一赤道面,子卫星 1 和 3,以及 2 和 4 的对地视线在一天内重叠两次,相互遮挡,影响电波通信。因此,还需设置轨道倾角,将相对轨迹移出赤道平面,形成侧向分离。

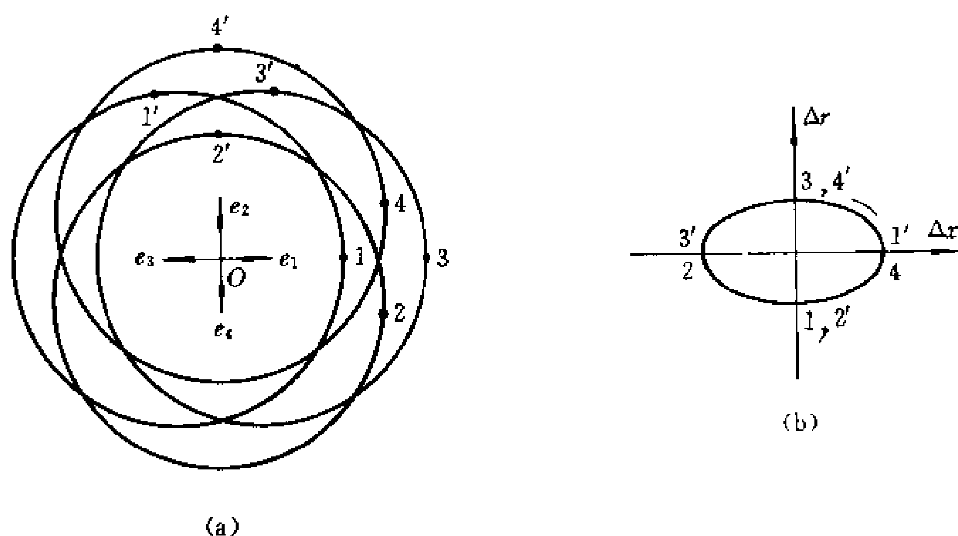


图 1.8-3

(3) 倾角与偏心率合成分置模式:令各子卫星共享同一定点经度,倾角设置使相对轨迹椭圆扭出赤道平面,参见式(1.7-19),在地球子午面上的投影运动方程可写为

$$\left.\begin{aligned}\delta r &= -a_s(\delta e_x \cos l + \delta e_y \sin l)\\ \delta y &= -a_s(\delta i_x \cos l - \delta i_y \sin l)\end{aligned}\right\} \tag{1.8-15}$$

在子午面内,卫星间相对运动与赤道面内的相对运动相似,由此,此模式的特点为

$$\delta\lambda_0 = 0,\quad \delta D = 0,\quad \delta i_x = k\delta e_x,\quad -\delta i_y = k\delta e_y \tag{1.8-16}$$

式中,k 为常值系数。各子卫星相对母星的相对轨迹处在同一倾斜平面,与地球子午面的交线为通过定点经度的直线。根据 i_x,i_y 的定义式(1.7-14),i_y 定义在赤道坐标的($-Y$)轴上,因此式(1.8-16)表示各卫星的偏心率矢量平行于自身倾角矢量在赤道面的投影。有 $\boldsymbol{i}/\!/\boldsymbol{e}$,……,参见式(1.8-12)。此模式的相对轨迹在赤道面的垂直切向面的投影也呈椭圆形,长轴沿切线方向,短轴沿侧向。按式(1.8-18)分置的四颗子卫星的相对轨迹在三维平面上的投影图 1.8-4,E 表示东切向,N 表示北侧向,r 表示径向。由于相对轨迹平面相对径向倾斜,避免在此方向上子卫星对地视线相互遮挡。

因倾角矢量在赤道面的投影滞后轨道面节线 90°,分置模式(1.8-16)可改写为

$$\delta\lambda = 0,\quad \delta D = 0,\quad \omega = 270°,\quad \Omega + \omega = \theta \tag{1.8-17}$$

即各子卫星轨道的近地点幅角均应是 270°,上式 θ 为预定设置的各子卫星轨道偏心率矢量的方向角。以图 1.8-3 为例,如令卫星座定点位置的平赤经为 0°,则四颗子卫星的分置轨道要素可设为

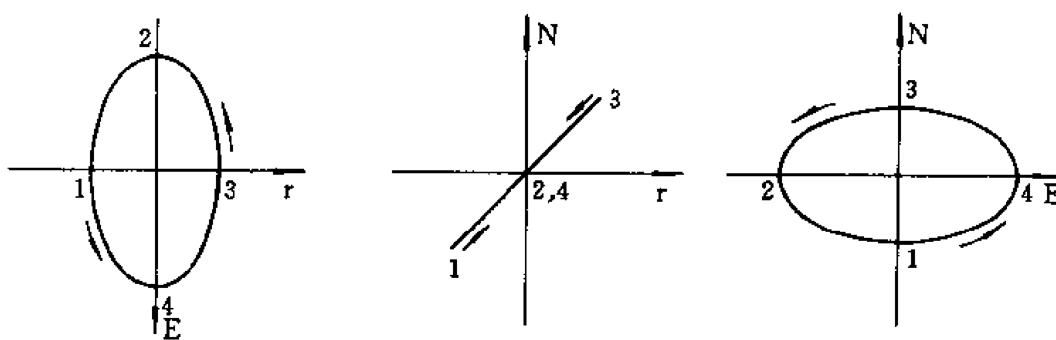


图 1.8-4

$$
\left.\begin{array}{lll}
\Omega_1 = 90^\circ & \omega_1 = 270^\circ & M_{01} = 0^\circ \\
\Omega_2 = 180^\circ & \omega_2 = 270^\circ & M_{02} = 270^\circ \\
\Omega_3 = 270^\circ & \omega_3 = 270^\circ & M_{03} = 180^\circ \\
\Omega_4 = 0^\circ & \omega_4 = 270^\circ & M_{04} = 90^\circ
\end{array}\right\} \tag{1.8-18}
$$

第二章　卫星轨道的摄动

卫星在轨道上始终受着空间环境各种摄动力的作用。这些摄动力有：地球形状非球形和质量不均匀产生的附加引力，高层大气的气动力，太阳、月球的引力，以及太阳光照射玉力等。在摄动力作用下，卫星轨道不再遵循二体轨道，其周期、偏离率、升交点赤经和倾角不断地变化着。虽然这些摄动力约为地球中心引力的十万分之一，但长时间的作用使卫星轨道偏离卫星应用任务的要求。必须采取轨道保持措施，这样又导致消耗卫星的燃料。因此，轨道摄动直接影响卫星的寿命。但是，另一方面可利用某些摄动，使卫星轨道具有特殊的性质，很有利于卫星应用任务的实践。

2.1　卫星轨道摄动方程

在分析天体（地球、太阳、月球）对卫星的引力作用时，常应用引力位函数（或称势函数），即引力场在空间任何一点的位函数 U，处在该点上单位质量的卫星受到的引力 $\boldsymbol{F}$ 是

$$\boldsymbol{F} = \mathbf{grad}\, U$$

此位函数与坐标系的选择无关，引用较方便。如天体的质量 m 集中于一点时，它的位函数是

$$U_o = \frac{Gm}{r}$$

式中，G 为引力常数；r 是集中质点到空间某点的距离。均匀质量的圆球天体对外部各点的位函数与整个球体质量集中于中心时的位函数相同，它的梯度方向总是指向球中心，这就是二体问题的基础。当考虑地球、日、月等摄动力时，位函数有两部分：

$$U = U_o + R$$

后者 R 是摄动力的位函数，称为摄动函数。卫星的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{Gm}{r^3}\boldsymbol{r} + \mathbf{gard}\, R \tag{2.1-1}$$

当摄动力不存在势时，将直接用摄动加速度表示摄动力的作用。在叙述各种摄动函数的形式及其对卫星运动的影响之前，先推导卫星的摄动方程。根据所研究的问题，运动方程式(2.1-1)的具体形式各不相同，可直接用摄动力表示或用摄动函数表示，轨道参数可以表示成球坐标的形式或轨道要素。如将卫星的喷气推力代替摄动力，这些方程就是卫星的轨道控制方程。

下文中各种作用力都归化为作用在单位卫星质量上的力，相当于加速度。

2.1.1　卫星的球坐标运动方程

用球坐标表示地球形状和质量的不均匀性比较方便、直观。研究地球引力的摄动函数及其对卫星运动的影响，常用球坐标表示卫星的运动方程。在赤道惯性坐标系 $OXYZ$ 中，卫星位置的球坐标是(r,α,φ)，$\boldsymbol{r}$ 是卫星的地心距，(α,φ)是卫星的赤经、赤纬，见图 2.1-1。卫星在固连于地球坐标系中的球坐标是(r,λ,φ)，后两者是卫星的地心经、纬度。定义以卫星质心为原点的

三个正交单位矢量：u_r 沿卫星地心距方向；u_α 沿卫星所在纬度圈的切线方向，向东为正；u_φ 沿

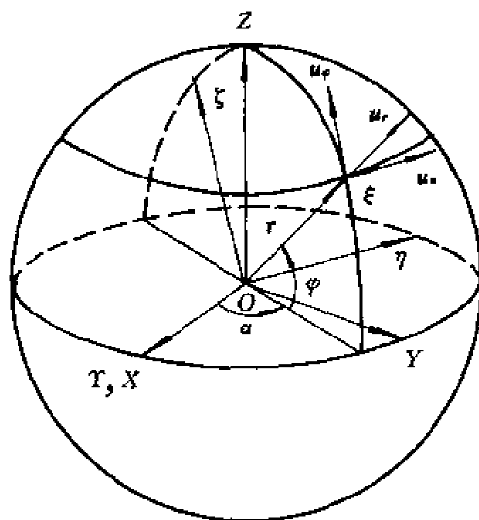


图 2.1-1

卫星所在子午圈的切线方向。以地心为原点的球面坐标系的三根坐标轴 $O\xi, O\eta, O\zeta$ 分别与 u_r，u_α，u_φ 平行，$O\xi$ 与地心距 r 的方向一致，显然，此坐标系跟随卫星在空间转动。此坐标系与赤道惯性坐标系之间的转换关系是

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\varphi & \sin\alpha\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha\sin\varphi & -\sin\alpha\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{2.1-2}$$

用 M 表示此转换矩阵，要在此转动坐标系中描述卫星的运动，必须引入坐标轴单位矢量的时间导数。令此动坐标的转速为 $\boldsymbol{\omega}$，参看图 2.1-1，不难列出此转速矢量在惯性坐标系中的各分量

$$(\boldsymbol{\omega})_\mathrm{i} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}\sin\alpha \\ -\dot{\varphi}\cos\alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

下标 i 表示惯性坐标，微分符号"·"代表相对于惯性空间的变化。应用转换矩阵 M，式(2.1-2)，得 ω 在球面坐标系中的各分量

$$(\boldsymbol{\omega})_\mathrm{s} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega})_\mathrm{i} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}\sin\varphi \\ -\dot{\varphi} \\ \dot{\alpha}\cos\varphi \end{bmatrix}$$

下标 s 表示球面坐标，该坐标轴的单位矢量在自身坐标系中可以表示为

$$(\boldsymbol{u}_r)_\mathrm{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\boldsymbol{u}_\alpha)_\mathrm{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\boldsymbol{u}_\varphi)_\mathrm{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此，单位矢量 u_r, u_α, u_φ 的变化率在动坐标中为

$$\dot{\boldsymbol{u}}_r = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}_r = \dot{\alpha}\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_\alpha + \dot{\varphi}\,\boldsymbol{u}_\varphi$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}_\alpha = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_\alpha = \dot{\alpha}\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_\varphi - \dot{\alpha}\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_r$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}_\varphi = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_\varphi = -\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_r - \dot{\alpha}\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_\alpha$$

根据上式可以导出卫星运动的速度和加速度：

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}_r + r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\,\boldsymbol{u}_r + r(\dot{\alpha}\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_\alpha + \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_\varphi)$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\alpha}^2\cos^2\varphi - r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{u}_r + (r\ddot{\alpha}\cos\varphi + 2\dot{r}\dot{\alpha}\cos\varphi - 2r\dot{\alpha}\dot{\varphi}\sin\varphi)\boldsymbol{u}_\alpha$$
$$+ (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\dot{\alpha}^2\sin\varphi\cos\varphi)\boldsymbol{u}_\varphi \tag{2.1-3}$$

因此卫星运动的球坐标方程是

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{r} - r\dot{\alpha}^2\cos^2\varphi - r\dot{\varphi}^2 = F_r \\ &r\ddot{\alpha}\cos\varphi + 2(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)\dot{\alpha} = F_\alpha \\ &r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\dot{\alpha}^2\sin\varphi\cos\varphi = F_\varphi \end{aligned}\right\} \tag{2.1-4}$$

式中F_r，F_α，F_φ是沿球面坐标轴方向作用在卫星上的力。如只考虑地球引力，则它们等于引力位函数$U(r,\alpha,\varphi)$沿这三个方向的导数，以$\mathrm{d}s_r$，$\mathrm{d}s_\alpha$，$\mathrm{d}s_\varphi$表示沿这三个方向的微分，参见图2.1-1中的几何关系，有

$$\mathrm{d}s_r = \mathrm{d}r, \qquad \mathrm{d}s_\alpha = r\cos\varphi\,\mathrm{d}\alpha, \qquad \mathrm{d}s_\varphi = r\mathrm{d}\varphi$$

因此，这三个引力分量与卫星坐标的关系是

$$F_r = \frac{\partial U}{\partial r}, \qquad F_\alpha = \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial U}{\partial\alpha}, \qquad F_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi} \tag{2.1-5}$$

当然，在F_r的公式中，$\frac{\partial U}{\partial r}$包含地球的中心引力。

2.1.2 卫星轨道要素的摄动方程

分析摄动力引起卫星轨道要素的变化，用轨道要素表示卫星的摄动方程，在天体力学中是著名的拉格朗日行星运动方程。用基本的力学原理推导出此方程[10]，力学概念表示更为清晰。定义第二卫星轨道坐标系，$ox_o'y_o'z_o'$，其原点在卫星质心上，坐标轴x_o'，y_o'，z_o'的单位矢量分别是$\boldsymbol{u}_r$，$\boldsymbol{u}_t$，$\boldsymbol{u}_n$。其中$\boldsymbol{u}_r$沿卫星地心距方向；$\boldsymbol{u}_t$在卫星的瞬时轨道平面内垂直于$\boldsymbol{u}_r$，指向卫星速度方向；$\boldsymbol{u}_n$与瞬时轨道平面的法线平行，见图2.1-2。在此坐标系内摄动力可分解为径向F_r，横向F_t，法向F_n等三个分量，即摄动力可以写成

$$\boldsymbol{F}' = \mathbf{grad}\,R = F_r\boldsymbol{u}_r + F_t\boldsymbol{u}_t + F_n\boldsymbol{u}_n \tag{2.1-6}$$

式中R是摄动函数。因此上式右端中的F_r区别于(2.1-5)式中的F_r。在摄动力作用下，卫星的轨道不再是开普勒椭圆，但在每一个瞬时，新的瞬时地心距$\boldsymbol{r}$和速度$\boldsymbol{v}$决定一个新的瞬时椭圆轨道，这一系列瞬时椭圆轨道就组成了实际轨道，不断地从一个瞬时椭圆轨道转向另一个瞬时椭圆的轨道。这些瞬时椭圆轨道要素的变化与在赤道惯性坐标系中分析卫星位置和速度的变化是等效的。从1.1节中可以看出，卫星运动的最基本特征是它的能量E和动量矩$\boldsymbol{h}$是恒定的。分析摄动力引起这两个基本量的变化，可引申出轨道要素的变化。

摄动力对卫星作的功等于卫星机械能的增量，即

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}' \cdot \boldsymbol{v} \tag{2.1-7}$$

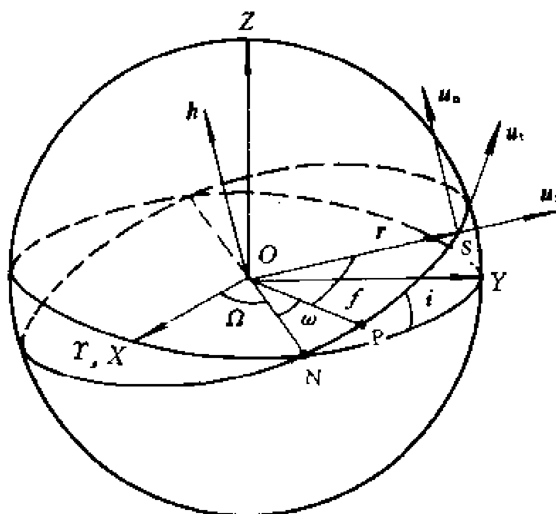


图 2.1-2

$\boldsymbol{v}$ 是卫星的瞬时速度，是在每个瞬时椭圆轨道上的速度，在轨道坐标中可列出

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\boldsymbol{u}_r + r\dot{f}\boldsymbol{u}_t = \dot{f}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}f}\boldsymbol{u}_r + r\boldsymbol{u}_t\right)$$

真近点角的变化率 $\dot{f}$ 乘以 r^2 等于动量矩的幅值 $h(=\sqrt{\mu p})$。利用距离公式(1.1-12)，速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 可以写成

$$\boldsymbol{v} = \frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}\left(\frac{re\sin f}{1+e\cos f}\boldsymbol{u}_r + r\boldsymbol{u}_t\right) \tag{2.1-8}$$

再由机械能公式 $E=-\frac{\mu}{2a}$，可知半长轴的变化与能量变化成正比：

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{2a^2}{\mu}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \tag{2.1-9}$$

将式(2.1-6)，(2.1-8)代入式(2.1-7)，再代入式(2.1-9)可得出摄动力引起半长轴的变化是

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{2e\sin f}{n\sqrt{1-e^2}}F_r + \frac{2a\sqrt{1-e^2}}{nr}F_t \tag{2.1-10}$$

摄动力使卫星相对于地心的动量矩不再守恒，动量矩的变化率等于摄动力相对于地心的力矩：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}' = rF_t\boldsymbol{u}_n - rF_n\boldsymbol{u}_t \tag{2.1-11}$$

径向摄动力产生的力矩为零，上式中不包含 F_r，而动量矩 $\boldsymbol{h}$ 的方向与 $\boldsymbol{u}_n$ 平行，它的变化率又可写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}_n + h\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_n}{\mathrm{d}t} \tag{2.1-12}$$

前一项是动量矩幅值的变化，后一项是动量矩方向的变化，沿 $\boldsymbol{u}_t$ 的负方向，比较式(2.1-11)与式(2.1-12)可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= rF_t \\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= -\frac{r}{h}F_n\end{aligned}\right\} \tag{2.1-13}$$

式中 θ 表示动量矩 $\boldsymbol{h}$ 转过的角度。根据公式(1.1-11)，瞬时椭圆轨道的偏心率 e 为

$$e = \left(1 - \frac{h^2}{\mu a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

它的变化率为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= -\frac{h}{2\mu a e}\left(2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} - \frac{h}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{2na^2e}\left(2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} - na\sqrt{1-e^2}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)\end{aligned}$$

将式(2.1-10)，(2.1-13)代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin f}{na}F_r + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\left[\frac{a^2(1-e^2)}{r} - r\right]F_t \tag{2.1-14}$$

在 1.1 节中已指出，动量矩直接决定了轨道节线的方向，动量矩在赤道平面上的投影 $\boldsymbol{h}_p$ 绕 OZ 轴的转动与轨道的节点在赤道面上的运动是等同的，见图 2.1-3。令 $\mathrm{d}\boldsymbol{h}$ 表示动量矩的增量，$(\mathrm{d}\boldsymbol{h})_p$ 表示此增量在赤道面上的投影，此投影在 $\boldsymbol{h}_p$ 垂直方向上的分量等于

$$\|(\mathrm{d}\boldsymbol{h})_p \times \boldsymbol{h}_p\| \frac{1}{h_p}$$

因此节线转动的角速率，即升交点赤经 Ω 的变化率等于这个分量除以 $h_p\mathrm{d}t$，有

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{h_p^2}\left\|\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}t}\right)_p \times \boldsymbol{h}_p\right\| \tag{2.1-15}$$

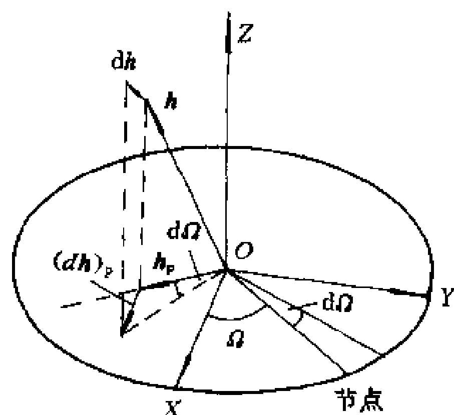


图 2.1-3

公式(2.1-13)，(2.1-11)说明，只有法向摄动力才能改变动量矩 $\boldsymbol{h}$ 的方向，变化方向沿 $\boldsymbol{u}_r$ 的负方向，因此动量矩投影的变化率等于

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}t}\right)_p = \left(h\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}_r\right)_p \tag{2.1-16}$$

令 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 表示赤道惯性坐标轴的单位矢量，它与轨道坐标系的单位矢量 $\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{u}_t,\boldsymbol{u}_n$ 之间的转换关系是(参照图 2.1-2)

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_r\\ \boldsymbol{u}_t\\ \boldsymbol{u}_n\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\cos(\omega+f) & \sin(\omega+f) & 0\\ -\sin(\omega+f) & \cos(\omega+f) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos i & \sin i\\ 0 & -\sin i & \cos i\end{bmatrix} \\ &\quad\times\begin{bmatrix}\cos\Omega & \sin\Omega & 0\\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{k}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.1-17}$$

因此单位矢量 $\boldsymbol{u}_t$ 在赤道平面上的投影可以写成

$$(\boldsymbol{u}_t)_p = (-\cos(\omega+f)\cos i\sin\Omega - \sin(\omega+f)\cos\Omega)\boldsymbol{i} + (\cos(\omega+f)\cos i\cos\Omega - \sin(\omega+f)\sin\Omega)\boldsymbol{j} \tag{2.1-18}$$

动量矩 $\boldsymbol{h}$ 在赤道平面上的投影是

$$\boldsymbol{h}_p = h\sin i(\sin\Omega\,\boldsymbol{i} - \cos\Omega\boldsymbol{j}) \tag{2.1-19}$$

将式(2.1-16),(2.1-18)和(2.1-19)代入式(2.1-15)得出在摄动力作用下轨道升交点经度的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \frac{r\sin(\omega+f)}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}F_n \tag{2.1-20}$$

从瞬时轨道节点的转动可得出轨道倾角的变化,如图 2.1-4 所示。初始轨道为(0),轨道要素是 i_0, Ω_0, ω_0, f_0,在 B 点卫星受摄动力的作用将沿轨道(1)运行,此新轨道的根数是 i_1, Ω_1, ω_1, f_1。

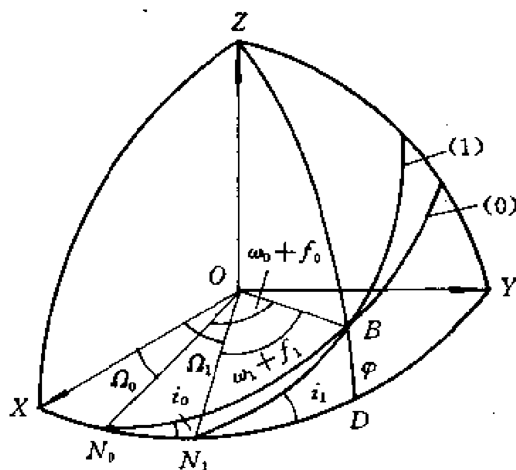


图 2.1-4

在单位圆球面上的直角球面三角形 N_0BD, N_1BD 中,有下列三角关系式:

$$\sin i_0\sin(\omega_0+f_0) = \sin i_1\sin(\omega_1+f_1)$$

$$\cos i_0\sin(\omega_0+f_0) = \cos\varphi\sin\widehat{N_0D}$$

$$\cos i_1\sin(\omega_1+f_1) = \cos\varphi\sin(\widehat{N_0D}-\Delta\Omega)$$

$$\cos(\omega_0+f_0) = \cos\varphi\cos\widehat{N_0D}$$

式中 $\Delta\Omega=\Omega_1-\Omega_0$ 为升交点赤经的增量,利用上面的三角关系,倾角增量 $\Delta i=i_1-i_0$ 的正弦可以化成

$$\begin{aligned}\sin\Delta i &= \sin i_1\cos i_0 - \cos i_1\sin i_0\\ &= \frac{\sin i_0}{\sin(\omega_1+f_1)}[\cos i_0\sin(\omega_0+f_0)(1-\cos\Delta\Omega) + \cos(\omega_0+f_0)\sin\Delta\Omega]\end{aligned}$$

两边除以 Δt,并取极限 $\Delta\Omega\to0$,得

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{\sin i}{\sin(\omega+f)}\cos(\omega+f)\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{r\cos(\omega+f)}{na^2\sqrt{1-e^2}}F_n \tag{2.1-21}$$

近地点幅角 ω 是近地点 P 与升交点 N 之间的角距(见图 1.1-6),有两种因素导致幅角 ω 的变化。一是在瞬时椭圆轨道平面内的摄动力,使椭圆旋转,改变在新的椭圆轨道面内新的近地点的相对位置;另一个因素是法向摄动力,使升交点在空间中移动。这两种摄动的影响可以分别独立地分析。在后一种情况,可认为真近点角没有改变,在图 2.1-4 中,应有 $f_1=f_0$,球面三角形 N_0BN_1 的三角关系为

$$\cos(\omega_1+f_0)=\cos\Delta\Omega\cos(\omega_0+f_0)+\sin\Delta\Omega\sin(\omega_0+f_0)\cos i_0$$

两边取对时间的导数,令 $\Delta\Omega\to0$,可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)_2=-\cos i\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=-\frac{-r\sin(\omega+f)\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}F_n \tag{2.1-22}$$

下标"2"表示由第二种因素决定的近地点幅角的变化。在瞬时椭圆轨道平面内的摄动力将改变卫星在此平面内的速度,决定新瞬时椭圆的形状。在分析这种力学因素的影响时,可认为轨道的节点没有移动,卫星的瞬时位置没有变化,因此近地点幅角的变量等于真近点角变量的负值,见图 2.1-5,即

$$\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)_1=-\frac{\partial f}{\partial t} \tag{2.1-23}$$

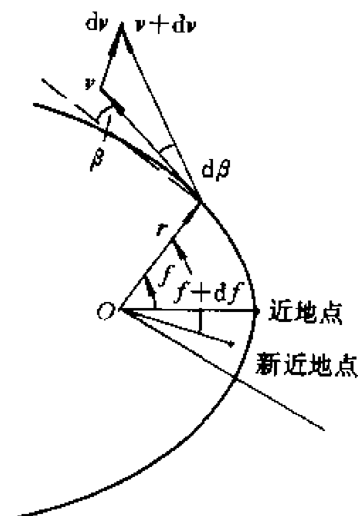


图 2.1-5

下标"1"表示第一种因素。这里的$\frac{\partial f}{\partial t}$是指由摄动力产生的变化,不包含开普勒椭圆轨道上真近点角的转动。在摄动力

$$F_r\boldsymbol{u}_r+F_t\boldsymbol{u}_t$$

的作用下,速度从 $\boldsymbol{v}$ 变为

$$\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v}$$

飞行角的增量是 $\Delta\beta$,β 是速度矢量与横向单位矢量之间的夹角。速度值 v 与飞行角增量的乘积等于垂直于 v 方向的摄动力的冲量,即

$$v(\Delta\beta)=(F_r\cos v-F_t\sin\beta)\Delta i \tag{2.1-24}$$

引用二体轨道上的速度公式(1.1-41),速度 v 为

$$v=\frac{h\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}{r(1+e\cos f)}$$

将上式代入式(2.1-24),飞行角的变化是

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}=\frac{r(1+e\cos f)}{h(1+2e\cos f+e^2)}[(1+e\cos f)F_r-(e\sin f)F_t] \tag{2.1-25}$$

再利用二体轨道飞行角公式(1.1-42),两边对时间取导数后可得真近点角的变量与飞行角变量之间的关系式:

$$-\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{1+2e\cos f+e^2}{e(e+\cos f)}\left[\frac{\sin f}{1+2e\cos f+e^2}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\right]$$

将公式(2.1-25)和(2.1-14)代入上式，再代入式(2.1-23)，便得到在轨道面内摄动力产生的近地点幅角的变化：

$$\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)_1=\frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-(\cos f)F_r+\sin f\left(1+\frac{1}{1+e\cos f}\right)F_t\right] \tag{2.1-26}$$

近地点幅角的总变化率等于公式(2.1-22)，(2.1-26)之和。有了上述基本公式，不难导出平近点角的非匀速变化，根据平近点角公式(1.1-26)和真近点角与偏近点角的关系式(1.1-21)和(1.1-22)，可得平近点角的变化。

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=n+\frac{1-e^2}{1+e\cos f}\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}-\frac{\sin f}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right) \tag{2.1-27}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos f}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}-\frac{\sin f}{1-e^2}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right) \tag{2.1-28}$$

最后将六个轨道要素的摄动方程(2.1-10)，(2.1-14)，(2.1-20)，(2.1-21)，(2.1-22)，(2.1-26)，(2.1-27)，(2.1-28)稍加变换，汇总在一起：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}&=\frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}[F_r e\sin f+F_t(1+e\cos f)]\\
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}&=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}[F_r\sin f+F_t(\cos E+\cos f)]\\
\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}&=\frac{r\sin(\omega+f)}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}F_n\\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}&=\frac{r\cos(\omega+f)}{na^2\sqrt{1-e^2}}F_n\\
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}&=\frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-F_r\cos f+F_t\frac{2+e\cos f}{1+e\cos f}\sin f\right]-\cos i\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}&=n-\frac{1-e^2}{nae}\left[F_r\left(\frac{2er}{p}-\cos f\right)+F_t\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\right]
\end{aligned}\right\} \tag{2.1-29}$$

对于二体运动 $F_r=F_t=F_n=0$，因而$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=n$，其余五个轨道要素都是常值。

在分析地球形状，日、月和太阳光压的摄动因素时，有时用摄动函数更为方便，而且这些摄动函数是轨道要素的函数，因此需给出以要素表示的摄动函数与摄动力之间的关系。摄动函数 R 对于任一轨道要素 c_k 的偏导数是

$$\frac{\partial R}{\partial c_k}=\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c_k}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c_k}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c_k}=\mathbf{grad}\,R\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial c_k} \tag{2.1-30}$$

式中 x,y,z 是卫星地心距在赤道惯性坐标系中的分量，有

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=r\boldsymbol{u}_r$$

利用轨道坐标单位矢量与赤道惯性坐标单位矢量之间的关系式(2.1-17)，求出地心距对轨道要素的偏导数[11]。

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial a} &= \frac{r}{a}\boldsymbol{u}_r \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial e} &= -a\cos f\boldsymbol{u}_r + r\left(\frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^2}\right)\sin f\,\boldsymbol{u}_t \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \Omega} &= r\cos i\boldsymbol{u}_t - r\cos(\omega + f)\sin i\,\boldsymbol{u}_n \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial i} &= r\sin(\omega + f)\boldsymbol{u}_n \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \omega} &= r\boldsymbol{u}_t \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial M} &= \frac{ae\sin f}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\boldsymbol{u}_r + \frac{a^2}{r}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}_t
\end{aligned}\right\} \tag{2.1-31}$$

将式(2.1-6),(2.1-31)代入式(2.1-30),求得摄动函数 R 对轨道要素的偏导数与摄动力之间的关系式为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial a} &= \frac{r}{a}F_r \\
\frac{\partial R}{\partial e} &= -F_r a\cos f + F_t\frac{2 + e\cos f}{1-e^2}r\sin f \\
\frac{\partial R}{\partial \Omega} &= F_t r\cos i - F_n\cos(\omega + f)\sin i \\
\frac{\partial R}{\partial i} &= F_n r\sin(\omega + f) \\
\frac{\partial R}{\partial \omega} &= F_t r \\
\frac{\partial R}{\partial M} &= F_r\frac{ae}{\sqrt{1-e^2}}\sin f + F_t\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r}
\end{aligned}$$

利用上面的关系式,将摄动方程(2.1-29)改用摄动函数表示,即

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial M} \\
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= \frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \omega} \\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\csc i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \Omega} \\
\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i} \\
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i} \\
\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} &= n - \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}
\end{aligned}\right\} \tag{2.1-32}$$

这就是著名的拉格朗日行星运动方程。

在第一章中已说明,对于近赤道的近圆和近同步轨道,应选用非奇异的轨道要素 a, e_x, e_y, i_x, i_y, l。这些要素的定义见1.7节,有

$$
\begin{aligned}
& a \\
& e_x = e\cos(\Omega+\omega) \\
& e_y = e\sin(\Omega+\omega) \\
& i_x = \sin i \sin\Omega \\
& i_y = \sin i \cos\Omega \\
& l = \Omega+\omega+M
\end{aligned}
$$

根据上述定义和式(2.1-29)，可以导出以这些要素为变量的摄动方程，略去二阶小量后，写成

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{n}[F_r e\sin f + F_t(1+e\cos f)] \\
\frac{\mathrm{d}e_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{na}[F_r\sin(\omega+f+\Omega) + F_t(\cos(\omega+f+\Omega) \\
&\qquad + \cos(\omega+E+\Omega))] \\
\frac{\mathrm{d}e_y}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{na}[-F_r\cos(\omega+f+\Omega) + F_t(\sin(\omega+f+\Omega) \\
&\qquad + \sin(\omega+E+\Omega))] \\
\frac{\mathrm{d}i_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{rF_n}{na^2}[\cos i\cos(\omega+f)\sin\Omega + \sin(\omega+f)\cos\Omega] \\
\frac{\mathrm{d}i_y}{\mathrm{d}t} &= \frac{rF_n}{na^2}[\cos i\cos(\omega+f)\cos\Omega - \sin(\omega+f)\sin\Omega] \\
\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} &= n - \frac{2r}{na^2}F_r + \frac{e(a+r)}{2na^2}F_t\sin f + \frac{r}{na^2}F_n\sin(\omega+f)\tan\frac{i}{2}
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.1-33}
$$

对于静止卫星有进一步的近似等式，$a\approx r_s$，$n\approx\omega_e$，$E\approx f$，$M\approx f$ 和 $e\ll 1$，$i\ll 1$，上式可进一步简化，得静止轨道的摄动方程：

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{1}{r_s}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{v_s}F_t \\
\frac{\mathrm{d}e_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{v_s}(F_r\sin l + 2F_t\cos l) \\
\frac{\mathrm{d}e_y}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{v_s}(-F_r\cos l + 2F_t\sin l) \\
\frac{\mathrm{d}i_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{v_s}F_n\sin l \\
\frac{\mathrm{d}i_y}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{v_s}F_n\cos l \\
\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} &= \omega_e - \frac{2}{v_s}F_r
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.1-34}
$$

2.2　地球形状摄动

2.2.1　地球引力场的位函数

当认为地球是均匀球体时，地球对卫星的径向引力只与地心距平方成反比，与卫星的经、

纬度无关。在此假定下，卫星在地球中心引力场中运行，卫星的运动特性由开普勒定律描述。但事实上，地球的质量分布是不均匀的，它的形状是不规则的扁状球体，赤道半径超过极轴的半径约 21.4 km，同时赤道又呈轻微的椭圆状。这些现象使卫星在轨道的切线和法线方向也受到引力作用，而且径向引力不仅与距离有关，还与卫星的经、纬度有关。这些附加的力学因素统称为地球形状摄动。因此，地球引力的等位面不是等球面，在引力位函数中，要附加一系列球面调和函数，这些函数称为摄动函数。

有大量文献[12~14]讨论卫星受地球形状摄动的问题。地球引力位函数的一般形式是

$$U=\frac{\mu}{r}\left\{1-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R_e}{r}\right)^n\left[J_nP_n(\sin\varphi)-\sum_{m=1}^{n}J_{nm}P_{nm}(\sin\varphi)\times\cos m(\lambda-\lambda_{nm})\right]\right\} \tag{2.2-1}$$

式中，$\mu=Gm_e$；r，λ，φ分别是卫星在球坐标上的位置——地心距，地心经、纬度；R_e 是地球的平均赤道半径；P_n，P_{nm}是勒让德多项式：

$$P_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$$

$$P_{nm}(z)=(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}P_n(z)$$

如取 $n=2$，$m=2$，有

$$P_2(\sin\varphi)=\frac{3}{2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}$$

$$P_{22}(\sin\varphi)=3\cos^2\varphi$$

$P_n(\sin\varphi)$是 $\sin\varphi$ 的多项式，阶次为 n，有 n 个零点。在位函数式(2.2-1)中包含 $P_n(\sin\varphi)$项的正、负号，在$-90°\leqslant\varphi\leqslant90°$范围内交变 n 次，这些项与卫星的经度无关，它使位函数沿纬度方向呈现出正、负值交替的环带，如图 2.2-1(a)所示。这是由地球的扁状引起的，这些项称为带谐项，J_n 为带谐项系数。在式(2.2-1)中，包含 $P_{nm}(\sin\varphi)\cos m(\lambda-\lambda_{nm})$的各项，在$-90°<\varphi<90°$范围内有 $n-m$ 个零点，在 $0°\leqslant\lambda-\lambda_{nm}\leqslant180°$范围内有 $2m$ 个零点，它使位函数沿经度和纬度方向交替变化，形成正、负值交替出现的田块(见图 2.2-1(b))，它表明在经度方向地球的形状不等同。这些田块在球面上是对称的，λ_{nm}是这些对称主轴 nm 的相位经度，因此称这些项为田谐项，J_{nm}为田谐项系数。从下文中可以看到，虽然与带谐项相比，田谐项是小量，但对于静止卫星，田谐项却起重要影响。

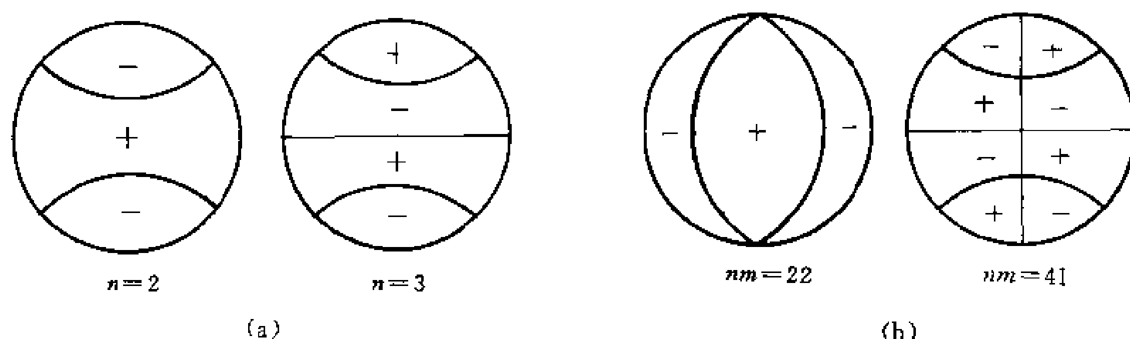


图 2.2-1

在文献[15]中介绍了通过对静止卫星长时间观察后得到的地球模型和带谐项、田谐项的

数值。表 2.2-1 列出四阶以内的参数值。

表 2.2-1

n	$J_n\times10^{-6}$	$n\ m$	$J_{nm}\times10^{-6}$	$\lambda_{nm}/(°)$
2	1 082.63	22	1.812 22	−14.545
3	−2.535 6	31	2.207 92	7.080 5
4	−1.623 36	32	0.371 90	−17.464 9
		33	0.219 84	21.209 7
		41	0.456 00	−138.756
		42	0.168 06	31.033 5
		43	0.060 30	−3.845 9
		44	0.007 54	30.792 0

2.2.2　近地轨道的地球形状摄动

对于近地球轨道，地球摄动的主要因素是地球的扁状，在地球引力位函数中，可以略去田谐项。如仅考虑四阶带谐项引力位函数，可以展成

$$U=\frac{\mu}{r}\left[1-\frac{J_2R_e^2}{2r^2}(3\sin^2\varphi-1)-\frac{J_3R_e^3}{2r^3}(5\sin^3\varphi-3\sin\varphi)\right.$$
$$\left.-\frac{J_4R_e^4}{8r^4}(35\sin^4\varphi-30\sin^2\varphi+3)\right] \tag{2.2-2}$$

由于不考虑地球赤道的椭圆状，可直接得出此位函数在赤道惯性坐标系的梯度，作为对卫星的引力加速度，代入地心纬度等式 $\sin\varphi=r/z$，卫星的运动方程可写为

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial r}\frac{x}{r}$$
$$=-\frac{\mu x}{r^3}\left[1+\frac{3}{2}J_2\left(\frac{R_e}{r}\right)^2\left(1-5\frac{z^2}{r^2}\right)+\frac{5}{2}J_3\left(\frac{R_e}{r}\right)^3\left(3\frac{z}{r}-7\frac{z^3}{r^3}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{5}{8}J_4\left(\frac{R_e}{r}\right)^4\left(3-42\frac{z^2}{r^2}+63\frac{z^4}{r^4}\right)\right]$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial r}\frac{y}{r}=\frac{d^2x}{dt^2}\frac{y}{x}$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{\partial U}{\partial r}\frac{z}{r}$$
$$=-\frac{\mu z}{r^3}\left[1+\frac{3}{2}J_2\left(\frac{R_e}{r}\right)^2\left(3-5\frac{z^2}{r^2}\right)+\frac{5}{2}J_3\left(\frac{R_e}{r}\right)^3\left(6\frac{z}{r}-7\frac{z^3}{r^3}-\frac{3}{5}\frac{r}{z}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{5}{8}J_4\left(\frac{R_e}{r}\right)^4\left(15-70\frac{z^2}{r^2}+63\frac{z^4}{r^4}\right)\right] \tag{2.2-3}$$

式中 $r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$。

分析地球扁状摄动对轨道要素的直接影响。以仅考虑带谐项 J_2 为例，由式(2.2-2)摄动位

函数(略去中心引力项)可列为

$$\Delta U = -\frac{\mu J_2 R_e^2}{2r^3}(3\sin^2\varphi - 1)$$

按照式(2.1-5),得摄动力在球坐标的分量

$$\left.\begin{aligned} F_r &= \frac{\partial(\Delta U)}{\partial r} = \frac{3}{2}J_2\frac{\mu R_e^2}{r^4}(3\sin^2\varphi - 1) \\ F_\alpha &= \frac{\partial(\Delta U)}{\partial \alpha}\frac{1}{r\cos\varphi} = 0 \\ F_\varphi &= \frac{\partial(\Delta U)}{\partial \varphi}\frac{1}{r} = -\frac{3}{2}J_2\frac{\mu R_e^2}{r^4}\sin 2\varphi \end{aligned}\right\} \tag{2.2-4}$$

卫星球坐标($r\ \alpha\ \varphi$)与第二轨道坐标 $ox_0'y_0'z_0'$ 的关系见 2.1.2 节,由图 2.1-2 可见,在两者的径向摄动力相同,切向和法向摄动力 F_t 和 F_n 的转换关系为

$$\left.\begin{aligned} F_t &= F_\varphi\cos\beta \\ F_n &= F_\varphi\sin\beta \end{aligned}\right\} \tag{2.2-5}$$

式中 β 角为轨道面与卫星所在点子午面的夹角。由球面三角形 NBD(图 1.1-6)有关系式

$$\left.\begin{aligned} \cos i &= \cos\varphi\sin\beta \\ \sin\varphi &= \sin i\sin(\omega + f) \\ \cos\beta &= \tan\varphi\cot(\omega + f) \end{aligned}\right\} \tag{2.2-6}$$

综合式(2.2-4)~(2.2-6),得轨道坐标的带谐项摄动力

$$\left.\begin{aligned} F_r &= -\frac{3}{2}J_2\frac{\mu R_e^2}{r^4}[1 - 3\sin^2 i\sin^2(\omega + f)] \\ F_t &= -\frac{3}{2}J_2\frac{\mu R_e^2}{r^4}\sin^2 i\sin 2(\omega + f) \\ F_n &= -\frac{3}{2}J_2\frac{\mu R_e^2}{r^4}\sin 2i\sin(\omega + f) \end{aligned}\right\} \tag{2.2-7}$$

将摄动力代入轨道要素摄动方程式(2.1-29),沿轨道积分一圈,可得在地球扁状摄动作用下、轨道要素在轨道圈内的平均摄动,以轨道升交点赤经 Ω 为例,有

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} &= \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)dt \\ &= \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r\sin(\omega + f)}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}F_n\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}df \\ &= \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-3J_2\mu R_e^2\cos i}{n^2a^5(1-e^2)^2}(1 + e\cos f)\sin^2(\omega + f)df \\ &= -\frac{3}{2}\frac{nJ_2}{(1-e^2)^2}\left(\frac{R_e}{a}\right)^2\cos i \end{aligned} \tag{2.2-8}$$

上式的单位为 rad/s。在上式推导中,利用式 $r^2\dot{f} = h$,引入 dt 和 df 的转换关系:

$$dt = \frac{1}{h}\left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}df$$

由式(2.2-8)可得一天内圆轨道升交点赤经摄动的增量 $\Delta\Omega$:

$$\Delta\Omega = -9.97\left(\frac{R_e}{a}\right)^{\frac{7}{2}}\cos i \tag{2.2-9}$$

上式的单位是(°)/d。同理,与式(2.2-8)相似,可列出其他轨道要素的平均摄动:

$$\dot{\omega}=-\frac{3nJ_2}{2(1-e^2)^2}\left(\frac{R_e}{a}\right)^2\left(\frac{5}{2}\sin^2 i-2\right) \tag{2.2-10}$$

$$\begin{aligned}\dot{M}&=n+\dot{m}\\&=n-\frac{3nJ_2}{2\sqrt{(1-e^2)^3}}\left(\frac{R_e}{a}\right)^2\left(\frac{3}{2}\sin^2 i-1\right)\end{aligned}$$

地球扁状摄动 J_2 项不引起轨道倾角、偏心率和半长轴的变化,因而轨道的密切周期 T(按半长轴计算的周期值)为常值,但地球扁状摄动使轨道的交点周期(连续两次通过赤道面的时间间隔)不同于密切周期[16],交点周期 T_N 为

$$T_N=T\cdot\left[1-\frac{3J_2}{2(1-e^2)^2}\left(\frac{R_e}{a}\right)^2\left(3-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\right] \tag{2.2-11}$$

2.2.3　静止轨道的地球形状摄动

对于地球静止轨道,除带谐项摄动外还须考虑田谐项的因素。在文献[17]中,分析四阶摄动函数对轨道的影响。取二阶摄动函数时,地球引力的位函数简化成

$$U=\frac{\mu}{r}\left[1-\frac{J_2R_e^2}{2r^2}(3\sin^2\varphi-1)+\frac{3J_{22}R_e^2}{r^2}\cos^2\varphi\cos 2(\lambda-\lambda_{22})\right] \tag{2.2-12}$$

式中 $J_2>0$, $J_{22}>0$。这个简单模型表明地球赤道($\varphi=0$)的形状近似地为椭圆,$r=R_e[1+3J_{22}\cos 2(\lambda-\lambda_{22})]$,$\lambda_{22}$是二阶田谐项主轴的地理经度,即赤道椭圆长轴的方位。根据表 2.2-1 中的数据,赤道长半轴与短半轴之差为 69.4 m。用位函数式(2.2-12)表示的地球模型简称为地球的三轴性。在赤道惯性坐标中,卫星的经度用赤经 α 表示,参见图 2.2-2,位函数式(2.2-12)的地心经度可替换为赤经,即有式

$$\lambda-\lambda_{22}=\alpha-\alpha_{22} \tag{2.2-13}$$

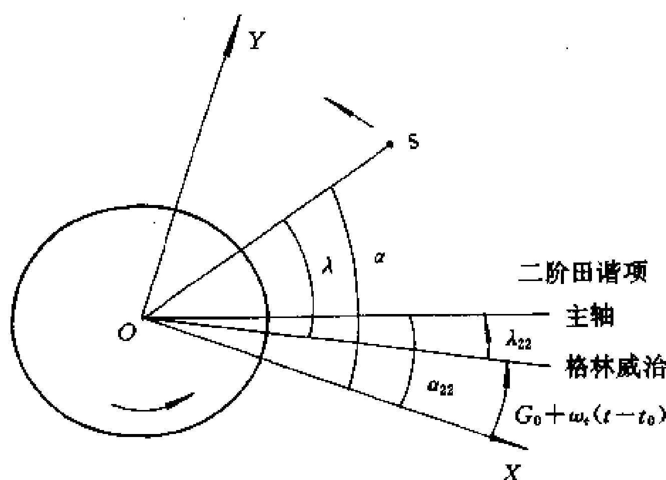


图　2.2-2

在球面坐标中(图 2.1-1),地球引力在球面坐标的三个分量是式(2.1-5)。将位函数式(2.2-12)代入式(2.1-5),求得地球引力在径向、经度向和纬度向的分量,再代入式(2.1-4)的卫星球坐标运动方程式,并利用式(2.2-13),便得到卫星在三轴性地球引力作用下的运动方程

式：

$$\ddot{r}-r(\cos^2\varphi\dot{\alpha}^2+\dot{\varphi}^2)=-\frac{\mu}{r^2}+\frac{3\mu J_2R_e^2}{2r^4}(3\sin^2\varphi-1)$$

$$-\frac{9\mu J_{22}R_e^2}{r^4}\cos^2\varphi\cos 2(\alpha-\alpha_{22}) \tag{2.2-14a}$$

$$r\cos\varphi\ddot{\alpha}+2(\cos\varphi\dot{r}-r\sin\varphi\dot{\varphi})\dot{\alpha}$$

$$=-\frac{6\mu J_{22}R_e^2}{r^4}\cos^2\varphi\sin 2(\alpha-\alpha_{22}) \tag{2.2-14b}$$

$$r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}+r\sin\varphi\cos\varphi\dot{\alpha}^2=-\frac{3\mu J_2R_e^2}{r^4}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$-\frac{6\mu J_{22}R_e^2}{r^4}\cos\varphi\sin\varphi\cos 2(\alpha-\alpha_{22}) \tag{2.2-14c}$$

从上式中可以看出，带谐项摄动（又称为地球扁状摄动）产生径向和法向摄动。当轨道面与赤道面重合时，法向摄动等于零。径向摄动相当于加大了地球对卫星的中心引力（相对于均匀球体而言），对于 100 kg 质量的卫星，此引力约有 83×10^{-5} N，静止轨道的半径将增大。田谐项摄动（又称为地球椭状摄动）主要产生径向和切向摄动，产生的径向加速度是一阶小量，比带谐项产生的加速度小得多，通常可以忽略。但是切向摄动加速度不可忽略，其与卫星的经度位置有关，使卫星受到的摄动漂移是不恒定的，对于 100 kg 质量的卫星，最大切向力约有 0.6×10^{-5} N，而且，在轨道上存在着若干个切向摄动加速度为零的平衡点。

令标称静止轨道的半径为 r_c，这个值不同于当地球为均匀球体时的同步半径 r_s。令方程式(2.2-14a)中的 $\ddot{r}=0,\ \varphi=0,\ r=r_c,\ \dot{\alpha}=\omega_e$，则有

$$r_c\omega_e^2-\frac{\mu}{r_c^2}-\frac{3\mu J_2R_e^2}{2r_c^4}-\frac{9\mu J_{22}R_e^2}{r_c^4}\cos 2(\alpha-\alpha_{22})=0 \tag{2.2-15}$$

由于 $J_{22}\ll J_2$，可以忽略最后一项，已知地球转速 $\omega_e^2=\frac{\mu}{r_s^3}$，上式中 r_c 的近似解是

$$r_c=r_s\left(1+\frac{J_2R_e^2}{2r_s^2}\right) \tag{2.2-16}$$

代入 J_2 的数值，即可算出地球的扁状附加质量增大了地球引力，使同步半径增大了 522.3 m。如果考虑 J_{22} 的影响，同步半径的差别约为几米。如把标称同步轨道的半径定为 r_s，则地球扁状摄动使卫星发生恒定的经度漂移，向东漂。这就是地球形状摄动中的带谐项产生的长期摄动：

长期漂移速率 $\dot{\lambda}=2.44\ (°)/$ 年

克服长期摄动的最简方法是调整卫星的高度。这样，卫星在轨道平面内的摄动仅与田谐项有关。

为说明方程式(2.2-14a，14b，14c)在半径为 r_c 的赤道圆轨道附近的扰动解，令

$$\left.\begin{aligned} r&=r_c+\Delta r\\ \lambda&=\lambda_0+\Delta\lambda\\ \varphi&=\varphi_0+\Delta\varphi\\ \lambda_0-\lambda_{22}&=\gamma_{22}\end{aligned}\right\} \tag{2.2-17}$$

式中，λ_0，φ_0 是卫星的初始经、纬度，有 $\varphi_0=0$；γ_{22}是卫星在初始时刻离赤道椭圆主轴的角距。将式(2.2-17)代入式(2.2-14)，线性化后得

$$\Delta\ddot{r}-\left(\omega_e^2+\frac{2\mu}{r_c^3}+\frac{6\mu J_2R_e^2}{r_c^5}+\frac{36\mu J_{22}R_e^2}{r_c^5}\right)\Delta r-2r_c\omega_e\Delta\dot{\lambda}-\frac{18\mu J_{22}R_e^2}{r_c^4}\Delta\lambda\sin 2\gamma_{22}$$

$$=-\frac{\mu}{r_c^2}+r_c\omega_e^2-\frac{3\mu J_2R_e^2}{2r_c^4}-\frac{9\mu J_{22}R_e^2}{r_c^4}\cos 2\gamma_{22} \tag{2.2-18a}$$

$$r_c\Delta\ddot{\lambda}+\frac{12\mu J_{22}R_e^2}{r_c^4}\Delta\lambda\cos 2\gamma_{22}+2\omega_e\Delta\dot{r}-\frac{24\mu J_{22}R_e^2}{r_c^5}\Delta r\sin 2\gamma_{22}$$

$$=-\frac{6\mu J_{22}R_e^2}{r_c^4}\sin 2\gamma_{22} \tag{2.2-18b}$$

$$r_c\Delta\ddot{\varphi}+r_c\omega_e^2\Delta\varphi+\frac{3\mu J_2R_e^2}{r_c^4}\Delta\varphi+\frac{6\mu J_{22}R_e^2}{r_c^4}\Delta\varphi\cos 2\gamma_{22}=0 \tag{2.2-18c}$$

从此扰动方程式可看出，在简化的三轴地球引力模型中，卫星在轨道平面内的运动和轨道面的变化是不耦合的，并且在(2.2-18c)式中，包含 J_2，J_{22}项的系数比 $r_c\omega_e^2$ 小得多。方程式(2.2-15)的左端与方程式(2.2-18a)的右端是等同的。如果同步半径是式(2.2-15)的解，并且有 $\sin 2\gamma_{22}=0$，则在轨道平面内的摄动方程(2.2-18a)，(2.2-18b)右端项为零，有平衡解

$$\Delta r=\Delta\lambda=0,\qquad \Delta\dot{r}=\Delta\dot{\lambda}=0$$

因此，静止卫星在半径为 r_c 的赤道同步轨道上有四个平衡位置。符合 $\sin 2\gamma_{22}=0$，根据地球三轴性模型，平衡位置的经度是 14.5° W，165.5° E，75.5° E，104.5° W。前两个位于赤道椭圆的长轴上，后两个位于短轴上。

在分析式(2.2-18a)，(2.2-18b)的摄动运动时，令同步半径 r_c 是式(2.2-16)的解，因此式(2.2-18a)右端前三项之和为零。引入新变量 $\Delta r_1=\frac{\Delta r}{r_c}$，$\tau=\omega_e t$，将式(2.2-18a)，(2.2-18b)进一步简化，得

$$\Delta r_1''-3\Delta r_1-2\Delta\lambda'-18k_2^2\Delta\lambda\sin 2\gamma_{22}=-9k_2^2\cos 2\gamma_{22}$$

$$\Delta\lambda''+12k_2^2\Delta\lambda\cos 2\gamma_{22}+2\Delta r_1'-24k_2^2\Delta r_1\sin 2r_{22}=-6k_2^2\sin 2\gamma_{22} \tag{2.2-19}$$

式中"′"号表示对 τ 的导数。根据表 2.2-1 中的参数，上式中系数 k_2^2 的数值为

$$k_2^2=J_{22}\left(\frac{R_e}{r_c}\right)^2=0.414\times 10^{-7}\,\mathrm{d}^{-2}$$

摄动方程式(2.2-19)的特征方程可分解为

$$(s^2+12k_2^2\sin 2\gamma_{22}s+1)(s^2-12k_2^2\sin 2\gamma_{22}s-36k_2^2\cos 2\gamma_{22})=0$$

其特征根近似为

$$\left.\begin{aligned} s_{1,2}&=-6k_2^2\sin 2\gamma_{22}\pm i\\ s_{3,4}&=6k_2^2\sin 2\gamma_{22}\pm 6k_2\sqrt{\cos 2\gamma_{22}}\,i\end{aligned}\right\} \tag{2.2-20}$$

当卫星处在赤道椭圆的长轴上，有

$$\sin 2\gamma_{22}=0,\qquad \cos 2\gamma_{22}=1$$

特征方程含正实根，因此，在赤道椭圆长轴上的两个平衡位置是不稳定的。

当卫星处在赤道椭圆的短轴上，有

$$\sin 2\gamma_{22}=0,\qquad \cos 2\gamma_{22}=-1$$

特征根均为复数，因此，在赤道椭圆短轴上两个平衡位置是稳定的。

卫星偏离短轴的扰动运动是周期性的，特征根 $s_{1,2}$决定短周期，特征根 $s_{3,4}$决定长周期，有

$$\left.\begin{aligned} &\text{短周期：} T_1 = 1\ \text{d(天)} \\ &\text{长周期：} T_2 = \frac{1}{6k_2} = 2.24\ \text{a(年)} \end{aligned}\right\} \tag{2.2-21}$$

以上用比较直观的方法分析了静止卫星在地球三轴性摄动作用下的运动特性。虽然局限于小范围的漂移情况，但说明了地球形状摄动对静止卫星运动影响的基本规律。

由于卫星经度的短周期（以天为单位）漂移的幅度很小，长周期（以年为单位）漂移的速度在一天内变化很小，因此分析卫星平经度的变化已足够精确，而且便于说明卫星在大范围内的漂移运动。平经度是卫星在一天内的平均经度，用 $\bar{\lambda}$ 表示，其变率 $\dot{\bar{\lambda}}$ 与平赤经的 $\dot{l}$ 等同，有

$$\dot{\bar{\lambda}} = n - \omega_e = \Delta n \tag{2.2-22}$$

n 为卫星轨道的平均转速，Δn 为卫星轨道转速的摄动。由卫星轨道转速定律 $n^2 = \mu/a^3$，可得轨道平转速摄动与半长轴摄动的关系：

$$\Delta n = -\frac{3n}{2a}\Delta a \tag{2.2-23}$$

在切向摄动力作用下，半长轴的变率与摄动力成正比，沿轨道积分一圈，得一天内半长轴的增量，对于静止卫星，上式中 $a = r_s$，$n = \omega_e = r_s v_s$。由摄动方程(2.1-34)的第一式和式(2.2-22)，可得一天内的轨道平转速的增量

$$\Delta n = -\frac{3\omega_e}{2r_s}\int_0^T \frac{2r_s}{v_s}F_t\,\mathrm{d}t = -\frac{6\pi}{v_s}F_t \tag{2.2-24}$$

因此，当切向摄动力为正，沿轨道运动方向，卫星能量不断增加，半长轴增大，而轨道平运动速度减慢，$\ddot{\bar{\lambda}} = \Delta n < 0$。

根据地球引力位函数 U 的公式(2.2-1)，取二阶和取四阶函数 U 时，切向摄动加速度与卫星位置经度的关系曲线，见图 2.2-3[18]。从图中可以看出，二阶田谐项摄动是最主要的，占

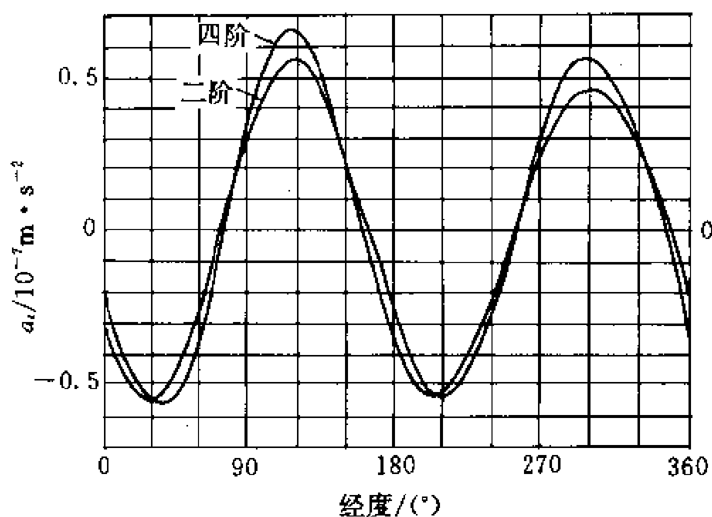


图 2.2-3

85%。两者的切向摄动加速度等于零的平衡点的经度之差小于 3.3°。因此，对于轨道控制问题，可以只取二阶田谐项。根据摄动力的公式(2.1-5)和位函数的简化公式(2.2-12)，沿轨道切线方向的摄动力为

$$F_t = \frac{1}{r_s}\frac{\partial U}{\partial \lambda} = -\frac{6\mu J_{22}R_e^2}{r_s^4}\sin 2(\lambda-\lambda_{22}) \tag{2.2-25}$$

将上式代入式(2.2-24)，得出一天内半转速的增量，也就是一天内半经度漂移速率的增量，即平经度漂移加速度

$$\begin{aligned}\ddot{\lambda} &= 36\pi\omega_e J_{22}\left(\frac{R_e}{r_s}\right)^2\sin 2(\lambda-\lambda_{22})\\ &= 72\pi^2 J_{22}\left(\frac{R_e}{r_s}\right)^2\sin 2(\lambda-\lambda_{22})\\ &= \frac{1}{2}k^2\sin 2(\lambda-\lambda_{22})\end{aligned} \tag{2.2-26}$$

式中$\frac{1}{2}k^2=0.001\ 68$，单位是(°)/d²。

已知 λ_{22}是赤道椭圆长轴的方位经度，从上式可看出，卫星漂移的加速度总是朝向距离卫星位置较近的那个短轴方向，因此位于短轴上的平衡位置是稳定的，见图 2.2-4。

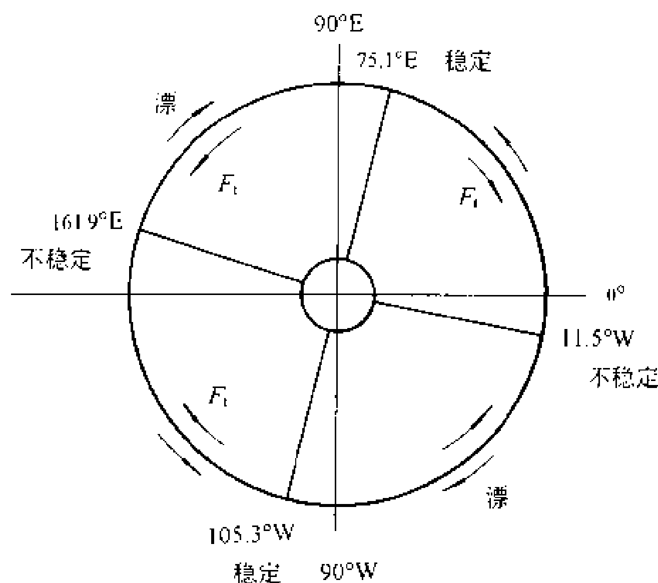


图 2.2-4

令 $\gamma=\lambda-\lambda_{22}\pm\frac{\pi}{2}$是卫星相对于短轴的经度差，漂移方程(2.2-26)可改写成

$$\ddot{\gamma}+\frac{1}{2}k^2\sin 2\gamma = 0 \tag{2.2-27}$$

如令 $\gamma=\frac{1}{2}\alpha$，$k^2=\frac{g}{l}$，上式是一个单摆方程。

$$\ddot{\alpha}+\left(\frac{g}{l}\right)\sin\alpha = 0 \tag{2.2-28}$$

式中，α，l 是摆角和摆长。如摆的初始位置和速率超过一定数值，单摆将绕过顶点作圆周运动。将方程式(2.2-27)两端乘以 $\dot{\gamma}$，它的一次积分是

$$\dot{\gamma}^2-\frac{1}{2}k^2\cos 2\gamma = \dot{\gamma}_0^2-\frac{1}{2}k^2\cos 2\gamma_0 \tag{2.2-29}$$

式中，γ_0，$\dot{\gamma}_0$ 是经度漂移的初始条件。由于 $\dot{\gamma}^2$ 总大于零，当卫星漂移的初始条件满足不等式

$$|\dot{\gamma}_0^2| < \left|\frac{1}{2}k^2 \cos 2\gamma_0\right|$$

则卫星经度漂移的范围不会超出离短轴±45°。当 $\dot{\gamma}=0$ 时，漂移达最大值 $\pm\gamma_{max}$：

$$\pm \gamma_{max} = \frac{1}{2}\arccos\left(\cos 2\gamma_0 - \frac{2}{k^2}\dot{\gamma}_0^2\right)$$

图 2.2-5 表示了卫星在大范围内的漂移运动。卫星在地球赤道短轴的两侧来回漂移。如果卫星的位置和速度的初始条件超过一定范围，则卫星挣脱短轴的"束缚"，沿圆周漂移。利用上式以及方程式(2.2-29)可得出

$$\dot{\gamma}^2 = k^2(\sin^2\gamma_{max} - \sin^2\gamma) \quad (2.2\text{-}30)$$

以及

$$dt = \pm \frac{1}{k}(\sin^2\gamma_{max} - \sin^2\gamma)^{-\frac{1}{2}}d\gamma \quad (2.2\text{-}31)$$

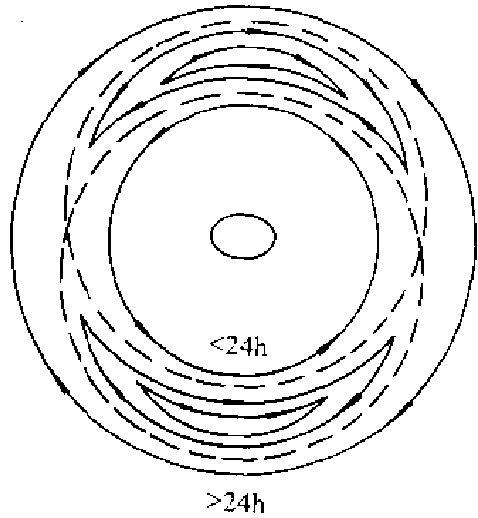


图 2.2-5

根据式(2.2-30)和(2.2-27)，最大漂移速度 $\dot{\gamma}_{max} = 0.31$ (°)/d，在式(2.2-31)中令 $\sin\gamma = \sin\gamma_{max}\sin\xi$，可导出卫星经度漂移的周期为

$$T = \frac{4}{k}\int_0^{\gamma_{max}} \frac{d\gamma}{\sqrt{\sin^2\gamma_{max} - \sin^2\gamma}} = \frac{4}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \sin^2\gamma_{max}\sin^2\xi}}$$

$$= \frac{4}{k}K\left(\sin\gamma_{max}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$K\left(\sin\gamma, \frac{\pi}{2}\right)$ 是第一类椭圆积分。当卫星很靠近短轴时，γ_{max} 很小，积分值 $K\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \approx \frac{\pi}{2}$，卫星经度漂移的周期

$$T = \frac{2\pi}{k} = 818 \text{ d}$$

与上节线性化分析的结果是一致的。

在长周期的漂移过程中，卫星地心距的变化可用半长轴表示，根据公式(2.2-23)，(2.2-30)，半长轴的增量为

$$\Delta a = -\frac{2a}{3n}\dot{\gamma} = \pm \frac{2a}{3n}k(\sin^2\gamma_{max} - \sin^2\gamma)^{\frac{1}{2}}$$

当 $\dot{\gamma}>0$，上式取负值，反之取正值。在最大可能周期性漂移范围内，半长轴变化量的最大值是

$$\Delta a = \frac{2ak}{3n} = 4R_e\sqrt{J_{22}} \approx 34 \text{ km}$$

地球扁状带谐项产生的径向摄动，提高地球同步轨道的高度；带谐项产生的法向摄动，使轨道面绕地轴进动。法向摄动力 F_n 的公式见式(2.2-7)，对静止轨道，可令式中 $r=r_s$，$\mu=n_e^2r_s^3(n_e=\omega_e)$，$\cos i=1$，按静止轨道要素的定义，法向摄动力可写成

$$F_n = -3J_2\frac{\mu R_e^2}{r_s^4}(\sin\alpha\cdot i_y - \cos\alpha\cdot i_x) \tag{2.2-32}$$

式中 α 为卫星的赤经。代入倾角摄动方程(2.1-34)，以卫星赤经 α 取代平赤经 l，有

$$\frac{\mathrm{d}i_x}{\mathrm{d}t} = -3n_eJ_2\left(\frac{R_e}{r_s}\right)^2(\sin^2\alpha\cdot i_y - \sin\alpha\cos\alpha\cdot i_x)$$

$$\frac{\mathrm{d}i_y}{\mathrm{d}t} = -3n_eJ_2\left(\frac{R_e}{r_s}\right)^2(\sin\alpha\cos\alpha\cdot i_y - \cos^2\alpha\cdot i_x)$$

将上式沿轨道积分一圈，得一天内倾角摄动的平均速率

$$\frac{\delta i_x}{\delta t} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\mathrm{d}i_x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}\alpha = -\frac{3}{2}n_eJ_2\left(\frac{R_e}{r_s}\right)^2\cdot i_y$$

$$\frac{\delta i_y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\mathrm{d}i_y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}\alpha = \frac{3}{2}n_eJ_2\left(\frac{R_e}{r_s}\right)^2\cdot i_x$$

引用常数

$$J_2\left(\frac{R_e}{r_s}\right)^2 = 2.48\times10^{-5}$$

轨道倾角的摄动方程化成

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta i_x}{\delta t} &= n_e(-3.72\,i_y)\times10^{-5}\\ \frac{\delta i_y}{\delta t} &= n_e(3.72\,i_x)\times10^{-5}\end{aligned}\right\} \tag{2.2-33}$$

轨道倾角要素 i_x，i_y 为周期性解，其角频率为 $3.72\,n_e\times10^{-5}$，等于 4.89 (°)/年，即为轨道面绕地轴进动的速度，并为逆进动。

2.3 日、月摄动

静止卫星的地心距约为地球半径的 6.6 倍，处在这样高轨道上的卫星受到太阳、月球的引力与地球的摄动力是同一个量级，必须考虑它的影响。分析地球，日、月同时对卫星产生的引力作用是多体问题。由于地球在黄道平面上运动，卫星相对于地球的运动加速度不仅与地球、日、月对卫星的引力有关，还与日、月对地球的引力有关。

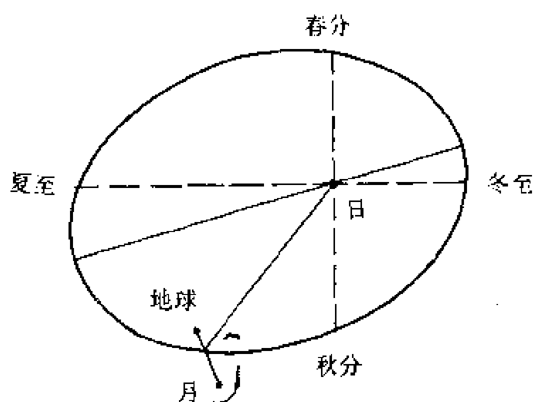


图 2.3-1

2.3.1 日、月天文常数

在具体分析日、月对卫星轨道的影响之前，简单重复天文学中的知识。地-月系统绕太阳在黄道面公转，周期是 365.25 天，月球的自转周期是 27.3 天，它同时又以同样周期绕地球公转，并且自转、公转的方向相同，如图 2.3-1 所示。地球的赤道平面倾斜于黄道面 $i_S=23.45°$，月球的赤道平面相对于黄道面的倾角较小，约为 1.5°，月球绕地球的白道和黄道相夹 $i_{mS}=5.15°$(图 2.3-2)。月球白道面与黄道面相交的节线绕黄极在

空间中进动，周期是 18.6 年，进动方向与地球运动方向相反，因此白、黄的节线每年向后移动 19.4°。

下面列举一些常用的天文常数：

太阳质量$=3.32\times10^5$ 地球质量；

太阳平均距离$=2.34\times10^4$ 地球赤道半径；

太阳视运动的平均速率$=0.017\ 2$ rad/d；

太阳视运动轨道偏心率$=0.016\ 7$；

月球质量$=1.23\times10^{-2}$地球质量；

月球平均距离$=60.2$ 地球赤道半径；

月球运动的平均速度$=0.23$ rad/d；

月球轨道偏心率$=0.054\ 9$；

地球自转速率$=6.3$ rad/d；

恒星日$=0.997\ 27$ d。

如图 2.3-2 所示，i_{mS}，Ω_{mS}是白道与黄道的夹角和白道升交点的黄经，i_m，Ω_m是白道与赤道的夹角和白道升交点的赤经，i_S 是黄道的倾角，在图 2.3-2 上的球面三角形中，可列出正、余弦公式：

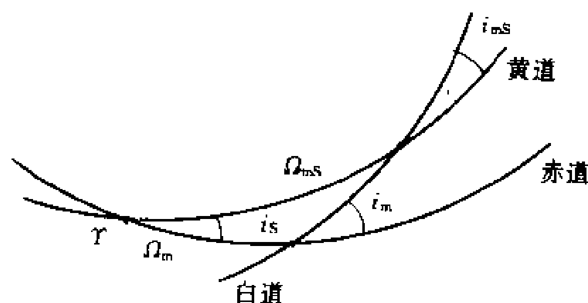


图 2.3-2

$$\cos i_{mS}=\cos i_m\cos i_S+\sin i_m\sin i_S\cos\Omega_m$$
$$\cos i_m=\cos i_{mS}\cos i_S-\sin i_{mS}\sin i_S\cos\Omega_{mS}$$
$$\sin i_m\sin\Omega_m=\sin i_{mS}\sin\Omega_{mS}$$

代入天文常数 i_S，i_{mS}，由上式可得

$$\left.\begin{aligned}\cos i_m&=0.913\ 7-0.035\ 7\cos\Omega_m\\ \sin i_m\sin\Omega_m&=0.089\sin\Omega_{mS}\\ \sin i_m\cos\Omega_m&=0.396+0.082\cos\Omega_{mS}\end{aligned}\right\}\tag{2.3-1}$$

由于 Ω_{mS}在 0°～360°之间变化，由上式可得出白道相对于赤道的倾角是在 $18.3°\leqslant i_m\leqslant28.6°$范围内变化，白道升交点的赤经变化范围是$-13.0°\leqslant\Omega_m\leqslant13.0°$。

关于日、月摄动问题在许多文献中有详细的分析，如文献[19～21]。本节着重说明日、月摄动对静止卫星轨道影响的基本规律，为位置保持的控制问题建立受控对象的特性。

2.3.2 日、月摄动引力

用下标 l，e，S，m 分别代表卫星、地球、太阳和月亮，它们的质量为 m_l，m_e，m_S，m_m。它们相对于惯性空间某一个无加速运动的基准点 O_1 的距离矢量是 $\boldsymbol{\rho}_l$，$\boldsymbol{\rho}_e$，$\boldsymbol{\rho}_S$，$\boldsymbol{\rho}_m$。它们相对于地球的距离矢量是 $\boldsymbol{r}_{el}$，$\boldsymbol{r}_{eS}$，$\boldsymbol{r}_{em}$，前一个下标表示矢量始点的位置，后一个下标表示矢量端点的位置。日、月相对于地球的距离表示法相同。参看图 2.3-3，有关系式

$$\boldsymbol{r}_{el} = -\boldsymbol{r}_{le} = \boldsymbol{\rho}_l - \boldsymbol{\rho}_e = \boldsymbol{r}_{eS} - \boldsymbol{r}_{lS} = \boldsymbol{r}_{em} - \boldsymbol{r}_{lm} \tag{2.3-2}$$

卫星、地球受到的引力加速度是

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\rho}}_l &= \frac{1}{m_l}(\boldsymbol{F}_{le} + \boldsymbol{F}_{lS} + \boldsymbol{F}_{lm}) \\ \ddot{\boldsymbol{\rho}}_e &= \frac{1}{m_e}(\boldsymbol{F}_{el} + \boldsymbol{F}_{eS} + \boldsymbol{F}_{em}) \end{aligned} \tag{2.3-3}$$

根据中心引力定律，引力 F 为

$$\begin{aligned} F_{le} &= -F_{el} = -G\frac{m_l m_e}{r_{el}^3}\boldsymbol{r}_{el} \\ F_{lS} &= G\frac{m_l m_S}{r_{lS}^3}\boldsymbol{r}_{lS} \end{aligned} \tag{2.3-4}$$

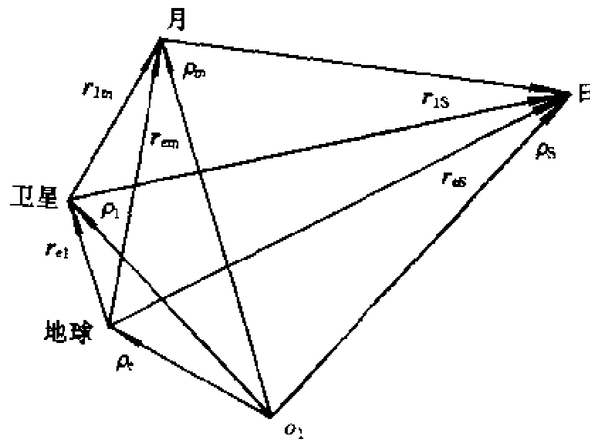


图 2.3-3

其它引力公式与其相似。利用式(2.3-2)，(2.3-3)，(2.3-4)，卫星相对于地球的加速度为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{el} = \ddot{\boldsymbol{\rho}}_l - \ddot{\boldsymbol{\rho}}_e = -G(m_l + m_e)\frac{\boldsymbol{r}_{el}}{r_{el}^3} + Gm_S\left(\frac{\boldsymbol{r}_{lS}}{r_{lS}^3} - \frac{\boldsymbol{r}_{eS}}{r_{eS}^3}\right) + Gm_m\left(\frac{\boldsymbol{r}_{lm}}{r_{lm}^3} - \frac{\boldsymbol{r}_{em}}{r_{em}^3}\right) \tag{2.3-5}$$

上式右面第一项是地球对卫星的引力加速度(包括地球形状的摄动力)。由于 $m_l \ll m_e$，在二体问题中 $G(m_e+m_l)=Gm_e=\mu$。第二项和第三项分别是日、月对卫星的摄动加速度，具有相同的形式，它们对卫星运动的影响是简单的叠加关系。卫星的地心距比地球离日、月的距离小得多，为近似地估计日、月摄动值，可假定有近似式 $r_{lS} \approx r_{eS}$，$r_{lm} \approx r_{em}$。由式(2.3-5)可得日、月摄动加速度的幅值近似等于

$$Gm_S\left(\frac{r_{el}}{r_{eS}^3}\right), \qquad Gm_m\left(\frac{r_{el}}{r_{em}^3}\right)$$

因此，日、月摄动力与地球对卫星的中心引力之比是

$$\frac{m_S}{m_e}\left(\frac{r_{el}}{r_{eS}}\right)^3, \qquad \frac{m_m}{m_e}\left(\frac{r_{el}}{r_{em}}\right)^3$$

根据天文学中的数据，日、月对于同步卫星的摄动力与地球中心引力之比分别是 0.75×10^{-5} 和 1.63×10^{-5}。在分析地球形状摄动时已计算得知，地球带谐项的摄动力与地球中心引力之比是 3.7×10^{-5}。因此，三者是同一量级的。令地球自转、太阳视运动的平均转速和月球绕地球的平均转速统一用 n 表示，有

$$n_e=\left(\frac{Gm_e}{r_e^3}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad n_S=\left(\frac{Gm_S}{r_{OS}^3}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad n_m=\left(\frac{Gm_m}{\sigma r_{em}^3}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.3-6}$$

r_{OS}是地-月系统质心到太阳的平均距离；月球绕地球平均转速公式中的系数 σ 为

$$\sigma=\frac{m_m}{m_e+m_m}=\frac{1}{82.3}$$

由于地-月系统质心距地心的距离比地球距太阳的距离小得多，可直接用 r_{eS}代替 r_{OS}。

日、月轨道转速与地球自转转速之比是常用的天文常数，有等式

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{n_S}{n_e}\right)^2&=0.75\times10^{-5}\\ \sigma\left(\frac{n_m}{n_e}\right)^2&=1.63\times10^{-5}\end{aligned}\right\} \tag{2.3-7}$$

引用式(2.3-6)，可将式(2.3-5)的日、月摄动加速度分别改写成

$$n_S^2\left[\left(\frac{r_{eS}}{r_{lS}}\right)^3\boldsymbol{r}_{lS}-\boldsymbol{r}_{eS}\right], \qquad \sigma n_m^2\left[\left(\frac{r_{em}}{r_{lm}}\right)^3\boldsymbol{r}_{lm}-\boldsymbol{r}_{em}\right] \tag{2.3-8}$$

两者的形式完全相同，推导过程也相同，可以单独分析，注明下标即可，统一用撇号"'"代表日、月的有关参数，如图 2.3-4。$\boldsymbol{r}'$ 表示日、月相对地球的距离矢量（由地球指向日、月），$\boldsymbol{r}'_l$ 表示卫星指向日、月的距离矢量。卫星、地球和日、月之间的几何关系可统一写成

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}'_l&=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\\ r_l'^2&=r^2+r'^2-2rr'\cos\xi'\end{aligned}\right\} \tag{2.3-9}$$

ξ'是日、月与卫星相对地心的张角，有

$$\cos\xi'=\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\frac{\boldsymbol{r}'}{r'}\right) \tag{2.3-10}$$

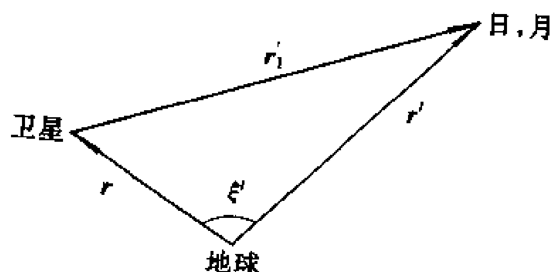


图 2.3-4

以作用在单位质量的 $\boldsymbol{F}'$ 表示日、月作用在单位质量的卫星的摄动力，并统一表示成

$$\boldsymbol{F}'=n'^2\left[\left(\frac{r'}{r_l'}\right)^3\boldsymbol{r}'_l-\boldsymbol{r}'\right] \tag{2.3-11}$$

对于月球，上式的n'^2代表σn_m^2。根据式(2.3-9)，应用勒让德多项式[12,13]，将$\frac{1}{r'_1}$展开成

$$\frac{1}{r'_1}=\frac{1}{r'\left[1-2\left(\frac{r}{r'}\right)\cos\xi'+\left(\frac{r}{r'}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$
$$=\frac{1}{r'}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\xi')\left(\frac{r}{r'}\right)^n$$
$$=\frac{1}{r'}\left[1+\left(\frac{r}{r'}\right)\cos\xi'+\left(\frac{r}{r'}\right)^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\xi'-\frac{1}{2}\right)+\cdots\right]$$

将上式代入式(2.3-11)，因卫星的地心距$r\ll r'$，可略去$\left(\frac{r}{r'}\right)$的平方项，引用星-地-日、月的几何关系式(2.3-9)，可得日、月摄动力$\boldsymbol{F}'$的简化式

$$\boldsymbol{F}'=r\,n'^2\left[3\cos\xi'\left(\frac{\boldsymbol{r}'}{r'}\right)-\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\right]\tag{2.3-12}$$

与式(2.3-11)相比，上式仅含日、月相对地球的方向矢量。根据第二卫星轨道坐标系$ox_0'\ y_0'\ z_0'$，其原点位于卫星质心。见图2.1-2，坐标轴矢量$\boldsymbol{u}_r$沿卫星地心距方向；$\boldsymbol{u}_t$位于轨道平面内，垂直于$\boldsymbol{u}_r$，指向卫星速度方向；$\boldsymbol{u}_n$垂直轨道平面。日、月摄动力(2.3-12)在此坐标系分量式为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{F}'\cdot\boldsymbol{u}_r&=rn'^2(3\cos^2\xi'-1)\\ \boldsymbol{F}'\cdot\boldsymbol{u}_t&=3rn'^2\cos\xi'\left(\frac{\boldsymbol{r}'}{r'}\cdot\boldsymbol{u}_t\right)\\ \boldsymbol{F}'\cdot\boldsymbol{u}_n&=3rn'^2\cos\xi'\left(\frac{\boldsymbol{r}'}{r'}\cdot\boldsymbol{u}_n\right)\end{aligned}\right\}\tag{2.3-13}$$

以太阳视运动的黄经β_S和黄道倾角i_S表示太阳在地球赤道惯性坐标系的方向为

$$\boldsymbol{S}=\frac{\boldsymbol{r}_{eS}}{r_{eS}}=\begin{bmatrix}\cos\beta_S\\ \sin\beta_S\cos i_S\\ \sin\beta_S\sin i_S\end{bmatrix}\tag{2.3-14}$$

以β_m表示月球在月球轨道上相距白道升交点的角距，月球方向在地球赤道惯性坐标系为

$$\boldsymbol{M}=\frac{\boldsymbol{r}_{em}}{r_{em}}=\begin{bmatrix}\cos\beta_m\cos\Omega_m-\sin\beta_m\sin\Omega_m\cos i_m\\ \cos\beta_m\sin\Omega_m+\sin\beta_m\cos\Omega_m\cos i_m\\ \sin\beta_m\sin i_m\end{bmatrix}\tag{2.3-15}$$

单位矢量式(2.3-14)和(2.3-15)即为引力等式(2.3-13)中的$(\boldsymbol{r}'/r')$，也是地球相对卫星和日、月张角ξ'的余弦等式(2.3-10)中的$(\boldsymbol{r}'/r')$，可由卫星轨道参数(或赤经α和赤纬φ)，确定余弦等式(2.3-10)的卫星矢量$(\boldsymbol{r}/r)$、摄动力式(2.3-13)中的轨道切向矢量$\boldsymbol{u}_t$和法向矢量$\boldsymbol{u}_n$(参见2.1.2节)。

2.3.3 轨道平面内摄动

产生轨道平面内摄动的引力是径向和切向摄动引力，与地球形状摄动类似，通过调整同步轨道高度，平衡径向摄动力，而切向摄动力引起轨道偏心率周期性变化。对于静止轨道，分析轨道平面内轨道要素的摄动，可略去小倾角的影响，则轨道径向和切向矢量有最简式

$$\boldsymbol{u}_r=\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\\ 0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{u}_t=\begin{bmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\\ 0\end{bmatrix}$$

代入径向摄动力等式(2.3-13),引用太阳方向的方向余弦式(2.3-14),得太阳引力产生的径向摄动力

$$F_r = r_S n_S^2 [3(\cos^2\alpha \cos^2\beta_S + 2\sin\alpha \cos\alpha \sin\beta_S \cos\beta_S \cos i_S + \sin^2\alpha \sin^2\beta_S \cos^2 i_S) - 1]$$

径向摄动力是卫星赤经 α 的三角函数,沿轨道积分一圈,得一天内的平均径向摄动力,有

$$\overline{F}_r = r_S u_S^2 \left[\frac{3}{2}(\cos^2\beta_S + \sin^2\beta_S \cos^2 i_S) - 1\right] \tag{2.3-16}$$

地球中心引力包含两项,即均匀地球的中心引力 $\frac{\mu}{r^2}$ 和摄动引力 F_r,太阳摄动的径向引力与地球中心引力反向,地球同步轨道的半径 r_c 应符合条件

$$r_c n_e^2 = \frac{\mu}{r_c^2 - F_r}$$

令 $r_c = r_S(1+\Delta)$,从上式可得同步半径增量的比值

$$\Delta = \frac{-F_r}{3(\mu/r_S^2)} \tag{2.3-17}$$

此比值等于摄动引力与均匀地球同步引力之比的 1/3。代入摄动力式(2.3-16),得同步半径的增量为

$$(\Delta r)_S = \frac{-1}{3} r_S \left(\frac{n_S}{n_e}\right)^2 \left[\frac{3}{2}(\cos^2\beta_S + \sin^2\beta_S \cos^2 i_S) - 1\right]$$

当月球白道升交点通过春分点,$\Omega_m = 0$,月球引力的结果与上式等同,仅需将太阳下标 S 替代为 m。引用天文常数式(2.3-7)得日、月摄动引起的同步高度的降低量小于

$$(\Delta r)_S \leqslant 52.7 \text{ m}$$

$$(\Delta r)_m \leqslant 114.5 \text{ m}$$

太阳引力产生的切向摄动力具有类似的简化等式,由式(2.3-13),(2.3-14)可得

$$F_t - 3r_S n_S^2 [\sin\alpha \cos\alpha(-\cos^2\beta_S + \sin^2\beta_S \cos^2 i_S) + (-\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\sin\alpha_S \cos\alpha_S \cos i_S]$$

代入偏心率摄动方程

$$\frac{de_x}{dt} = \frac{1}{v_S} F_t \cos\alpha$$

$$\frac{de_y}{dt} = \frac{1}{v_S} F_t \sin\alpha$$

方程右端为卫星赤经 α 的三角函数,沿轨道的积分为零,即一天内太阳引力引起的偏心率平均变化率为零,但在一天内偏心率周期性变动,周期为半天。

月球引力的切向摄动产生的结果与上述等同。

2.3.4 轨道倾角摄动

由于静止卫星的轨道基本上位于赤道面,与太阳视运动轨道的几何关系比较固定,因此,太阳引力摄动较有规律。

假定轨道的倾角为零,则轨道径向和法向矢量有最简式

$$\boldsymbol{u}_r = \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = \begin{bmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_n = \begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix}$$

代入太阳摄动引力式(2.3-13),法向引力可写成

$$F_n^S = 3r_S n_S^2(\cos\alpha\cos\beta_S + \sin\alpha\sin\beta_S\cos i_S)\sin\beta_S\sin i_S \tag{2.3-18}$$

在静止轨道上,卫星受的引力摄动是交变的。当 $\beta_S=\pm 90°$,即在夏至或冬至,太阳处于赤道坐标的 YZ 平面,见图 2.3-5。由式(2.3-18),在赤经 0°~180°的半圈内,卫星总是受北向引力,而在 180°~360°的半圈内,卫星总是受南向引力,由此形成沿 X 轴方向的力矩,迫使轨道的倾角矢量 $\boldsymbol{i}$(即动量矩 $\boldsymbol{h}$ 的单位矢量)倒向春分方向。在春分、秋分季日,无法向引力。当太阳处在其他季节,引力情况相似,倾角矢量倒向太阳恒星时角的垂直方向。

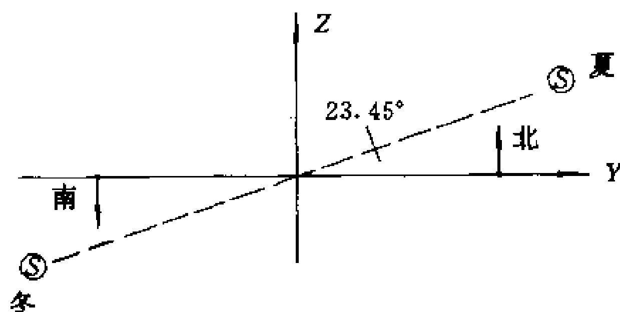


图 2.3-5

如轨道倾角为 $i\ll 1$,卫星纬度 φ 为小量,在卫星轨道坐标矢量的等式中,可令 $\cos\varphi=1$,按轨道升交点球面三角形,可引用 $\sin\varphi$ 的公式

$$\sin\varphi = \sin i\sin(\omega+f) = \sin i\sin(\alpha-\Omega) = \sin\alpha\cdot i_y - \cos\alpha\cdot i_x$$

卫星轨道径向和法向矢量的表达式为

$$\boldsymbol{u}_r = \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = \begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\\ \sin\alpha\cdot i_y - \cos\alpha\cdot i_x\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{u}_n = \begin{bmatrix}-\cos\alpha\sin\alpha\cdot i_y + \cos^2\alpha\cdot i_x\\ -\sin^2\alpha\cdot i_y + \cos\alpha\sin\alpha\cdot i_x\\ 1\end{bmatrix}$$

为书写简便,令太阳方向表达式(2.3-14)表示为

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix}S_x\\ S_y\\ S_z\end{bmatrix}$$

太阳摄动的法向引力式(2.3-13)的两项主要成分可写成

$$\cos\xi_S = (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u}_r)[\cos\alpha\cdot S_x + \sin\alpha\cdot S_y + (\sin\alpha\cdot i_y - \cos\alpha\cdot i_x)S_z]$$

$$(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u}_n) = [(-\cos\alpha\sin\alpha\cdot i_y + \cos^2\alpha\cdot i_x)S_x + (-\sin^2\alpha\cdot i_y + \cos\alpha\sin\alpha\cdot i_x)S_y + S_z]$$

在太阳引力作用下,轨道倾角摄动方程见式(2.1-34),列为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}i_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{3r_S}{v_S}n_S^2\cos\xi_S\sin\alpha\,(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u}_n)\\ \frac{\mathrm{d}i_y}{\mathrm{d}t} &= \frac{3r_S}{v_S}n_S^2\cos\xi_S\cos\alpha(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u}_n)\end{aligned}\right\} \tag{2.3-19}$$

将太阳方向的方向余弦式(2.3-14)代入上式倾角摄动方程,右端是含卫星赤经 α 的三角函数,沿轨道积分一圈,得一天内倾角变化的平均速率,有

$$\frac{\delta i_x}{\delta t} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\mathrm{d}i_x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}\alpha$$

$$=3n_e\left(\frac{n_S}{n_e}\right)^2\left[\left(\frac{1}{4}S_xS_y\right)i_x+\left(-\frac{1}{8}S_x^2-\frac{3}{8}S_y^2+\frac{1}{2}S_z^2\right)i_y+\frac{1}{2}S_yS_z\right]$$

$$\frac{\delta i_y}{\delta t}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\mathrm{d}i_y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}\alpha$$

$$=3n_e\left(\frac{n_S}{n_e}\right)^2\left[\left(\frac{1}{8}S_x^2+\frac{3}{8}S_y^2-\frac{1}{2}S_z^2\right)i_x-\left(\frac{1}{4}S_xS_y\right)i_x+\frac{1}{2}S_xS_z\right] \qquad (2.3\text{-}20)$$

引用太阳方向 $\boldsymbol{S}$ 的方向余弦公式(2.3-14)，有

$$S_x{}^2=\cos^2\beta_S$$
$$S_y^2=\sin^2\beta_S\cos i_S$$
$$S_z^2=\sin\beta_S\sin i_S$$
$$S_xS_y=\sin\beta_S\cos\beta_S\cos i_S$$
$$S_yS_z=\sin^2\beta_S\sin i_S\cos i_S$$
$$S_xS_z=\sin\beta_S\cos\beta_S\sin i_S$$

因此可看出，倾角摄动方程(2.3-20)右端都含有 $2\beta_S$ 的正余弦函数，表明倾角摄动随太阳视运动而周期性交变，周期为半年。将此倾角摄动方程沿太阳视运动轨道积分一圈，得一年内倾角摄动的平均速率，有

$$\frac{\Delta i_x}{\Delta t}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\delta i_x}{\delta t}\right)\mathrm{d}\beta_S=3n_e\left(\frac{n_S}{n_e}\right)^2\left[\left(-\frac{1}{16}-\frac{3}{16}\cos^2 i_S+\frac{1}{4}\sin^2 i_S\right)i_y+\frac{1}{4}\sin i_S\cos i_S\right]$$

$$\frac{\Delta i_y}{\Delta t}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\delta i_y}{\delta t}\right)\mathrm{d}\beta_S=3n_e\left(\frac{n_S}{n_e}\right)^2\left[\frac{1}{16}+\frac{3}{16}\cos^2 i_S-\frac{1}{4}\sin^2 i_S\right]i_x \qquad (2.3\text{-}21)$$

代入天文常数(2.3-7)，可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta i_x}{\Delta t}&=n_e(-0.405\,i_y+0.205)\times10^{-5}\,\mathrm{rad/s}\\\frac{\Delta i_y}{\Delta t}&=n_e(0.405\,i_x)\times10^{-5}\,\mathrm{rad/s}\end{aligned}\right\} \qquad (2.3\text{-}22)$$

由此看出，太阳引力使轨道面进动，同时使轨道倾角矢量 $\boldsymbol{i}$ 倒向春分方向，一年内的平均倾倒速率为

$$\frac{\Delta i_x}{\Delta t}=0.205\,n_e\times10^{-5}\,\mathrm{rad/s}=0.27\ (^\circ)/\text{年}$$

月球引力作用的几何关系较复杂，因为月球轨道面绕黄极方向进动，白道与赤道的升交点的方向每年不同，但基本规律与太阳引力作用类同，即平面外的引力导致轨道倾角摄动。

在月球引力作用下，轨道倾角摄动方程与太阳引力作用的摄动方程(2.3-19)有相同的形式，式中 n_S^2，ξ_S 和 $\boldsymbol{S}$ 应替代为 σn_m^2，ξ_m 和 $\boldsymbol{M}$，其中月球方向 $\boldsymbol{M}$ 的公式见(2.3-15)。将摄动速率沿轨道积分一圈，同样得出一天内倾角变化的平均速率，与式(2.3-20)形式相同，其中 S_x，S_y，S_z 替代为 m_x，m_y，m_z——月球方向的方向余弦式(2.3-15)。

如令摄动方程右端的 $i_x=0$，$i_y=0$，则有一天平均倾角变化的简化式

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta i_x}{\delta t}&=\frac{3}{2}n_e\sigma\left(\frac{n_m}{n_e}\right)^2(\cos\beta_m\sin\Omega_m+\sin\beta_m\cos\Omega_m\cos i_m)\sin\beta_m\sin i_m\\\frac{\delta i_y}{\delta t}&=\frac{3}{2}n_e\sigma\left(\frac{n_m}{n_e}\right)^2(\cos\beta_m\cos\Omega_m-\sin\beta_m\sin\Omega_m\cos i_m)\sin\beta_m\sin i_m\end{aligned}\right\} \qquad (2.3\text{-}23)$$

当白道的升交点不在春分方向上，$\Omega_m \neq 0$。在月球周期一圈内，倾角变化率有两次最大值，方向相反，倾角的主要变化方向朝向春分点。将上式沿月球轨道积分，得月球周期内倾角摄动的平均速率

$$\frac{\Delta i_x}{\Delta t} = \frac{3}{4} n_e \sigma \left(\frac{n_m}{n_e} \right)^2 \cos \Omega_m \sin i_m \cos i_m$$

$$\frac{\Delta i_y}{\Delta t} = -\frac{3}{4} n_e \sigma \left(\frac{n_m}{n_e} \right)^2 \sin \Omega_m \sin i_m \cos i_m$$

引用天文常数(2.3-7)和公式(2.3-1)，月球引力作用的轨道倾角摄动的平均变率可列为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta i_x}{\Delta t} &= n_e \times (0.443 + 0.074 \cos \Omega_{mS}) \times 10^{-5} \\ \frac{\Delta i_y}{\Delta t} &= n_e \times (-0.099 \sin \Omega_{mS}) \times 10^{-5} \end{aligned} \right\} \tag{2.3-24}$$

月球引力产生的轨道倾角摄动与月球轨道面的方位有关，即与月球轨道升交点的黄经有关。在18.6年的周期中，月球轨道与赤道的夹角在23.45°±5.15°范围内变化，月球引力产生年平均倾角变率最大值为0.68 (°)/年(当 $\Omega_{mS}=0°$)，最小值为0.48 (°)/年(当 $\Omega_{mS}=180°$)。

月球引力同样使轨道面进动，保留摄动方程(2.3-21)右端的 i_x，i_y，引用月球方向的方向余弦(2.3-15)，以上述相同步骤可得月球引力使轨道面进动的角频率为 $0.943\, n_e \times 10^{-5}$rad/s。

合成地球带谐项摄动和日、月摄动作用的轨道倾角摄动方程，由式(2.3-22)，(2.3-24)，有平均摄动总方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_x}{dt} &= n_e(-4.93\, i_y + 0.074 \cos \Omega_{mS} + 0.648) \times 10^{-5}\ \text{rad/s} \\ \frac{di_y}{dt} &= n_e(5.21\, i_x - 0.099 \sin \Omega_{mS}) \times 10^{-5}\ \text{rad/s} \end{aligned} \right\} \tag{2.3-25}$$

轨道要素 i_x，i_y 的解包含周期项和长期项，前者主要由地球扁状摄动引起(占3.72)，后者由于日、月引力的作用(占0.648)。略去 $\cos \Omega_{mS}$，$\sin \Omega_{mS}$项，摄动方程(2.3-25)式的解是

$$\left. \begin{aligned} i_x &= i_x(0) \cos \omega_i t - 0.973\, i_y(0) \sin \omega_i t + 0.128 \sin \omega_i t \\ i_y &= 1.028\, i_x(0) \sin \omega_i t + i_y(0) \cos \omega_i t + 0.131(1 - \cos \omega_i t) \end{aligned} \right\} \tag{2.3-26}$$

式中，$i_x(0)$，$i_y(0)$是轨道倾角的初始值；ω_i 是轨道平面周期性进动的角频率：

$$\omega_i = 5.068 n_e \times 10^{-5} \quad \text{s}^{-1}$$

从上式看出，如初始倾角为零，则在地球、日、月摄动作用下，静止轨道的法线在一个近似圆锥面上进动，圆锥中心线的倾角是7.5°，并倒向黄极方向，$\Omega=0°$，进动周期是54年，最大倾角可达15°，且在初始时刻，轨道的法线倒向春分点方向。如初始倾角是 $i_y(0)=0$，$i_x(0)=-\varepsilon$(ε 是正的小量)，则轨道法线单位矢量端点的赤道面上的投影(即进动轨迹)近似地如图2.3-6所示，轨道倾角的变化是先减后增。因此在南北位置保持的问题中，通常使初始轨道具有小量倾角偏置，并且升交点的赤经接近270°。

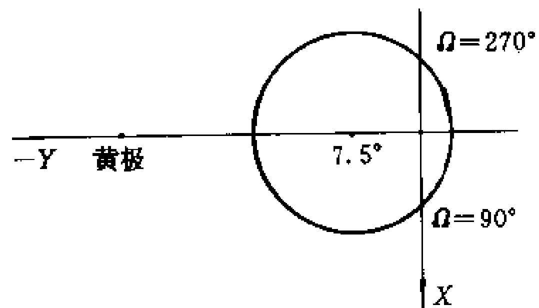


图 2.3-6

倾角的变化率与月球白道在黄道上的升交点位置有关，当此升交点在春分点方向上($\Omega_{mS}=0$)，倾率变化率最大，等于 0.95 (°)/年，而在负方向上($\Omega_{mS}=180°$)，倾角变化率最小，等于 0.75 (°)/年。根据天文年历的数据，得知某年月球白道在黄道上升交点的赤经，就可算得当年静止卫星轨道倾角的漂移率。

2.4 太阳光压摄动

卫星受到太阳光照射时，太阳辐射能量的一部分被吸收，另一部分被反射，这种能量转换使卫星受到力的作用，称为太阳辐射压力，简称光压。作用在卫星单位表面积 dA 上的辐射压力

$$dF = p\, dA|\cos\alpha|[(1-c)]u_I - c'u_F]$$

式中，p 为太阳光压强度；α 为太阳光入射角；u_I，u_F 为入射光、反射光方向的单位矢量；c，c' 为表面吸收率和反射率。

卫星表面对太阳光的反射比较复杂，有镜面反射和漫反射。在讨论太阳光压对卫星轨道的影响时，可以认为光压的方向与太阳光的入射方向一致，作用在单位卫星质量上的光压可以统一地写成

$$F_S = -F_S = -Kp\left(\frac{A}{m}\right)S \tag{2.4-1}$$

式中，A 是垂直于太阳光的卫星截面积；m 是卫星的质量；系数 K 与卫星表面材料、形状等性质有关，如全吸收，则 $K=1$；太阳光压强度等于单位面积的阳光辐射功率与光速的比值，取阳光单位面积的平均辐射功率为 1.4 kW/m²，得太阳光压强度为 $p=4.65\times10^{-6}$ N/m²；S 是地心指向太阳的单位矢量，由于卫星的地心距与太阳的地心距的比值很小(10^{-4})，可以直接用 S 代替卫星到太阳的方向。

在同步轨道上卫星受到的光压 F_S 与地心中心引力 F_e 之比为

$$\frac{F_S}{F_e} = \frac{Kp}{g}\left(\frac{A}{m}\right)\left(\frac{r_S}{R_e}\right)^2$$

如卫星的面质比$\frac{A}{m}=0.1$ m²/kg，则光压 $F_S=0.2\times10^{-5}F_e$，它和地球形状摄动，日、月摄动属同一量级。

太阳光压使轨道变化的趋向，如图 2.4-1 所示。当卫星处在圆轨道上沿下半圈运行时，光压的作用使卫星加速，经过半圈的积累，相当于在点①处顺速度方向施加一个速度增量 Δv_1；当卫星在上半圈运行时，光压起减速作用，半圈积累的结果相当于在点②处反方向作用一个 Δv_2 的速度增量。Δv_1 使上半圈的地心距增大，Δv_2 使下半圈的地心距减小，轨道呈椭圆状，点②逐渐上升成为远地点，点①逐渐下降为近地点。由于$|\Delta v_1|=|\Delta v_2|$，轨道的半长轴变化很小，轨道的拱线(①，②的联线)垂直于光压方向。随着地球的公转，卫星轨道的偏心率矢量 e(沿拱线指向近地点)的方向在赤道坐标面上不断地旋转，并且增长；半年后光压从反方向射来，偏心率矢量 e 继续旋转，但长度缩短，因此太阳光压使轨道偏心率发生长周期摄动。

图 2.4-2 表示初始轨道是圆轨道的情况($e_x(0)=e_y(0)=0$)，太阳的初始位置在春分点方向，轨道的偏心率矢量 e 的端点在一年内沿太阳视运动方向画出一个圆，称为偏心率摄动圆。

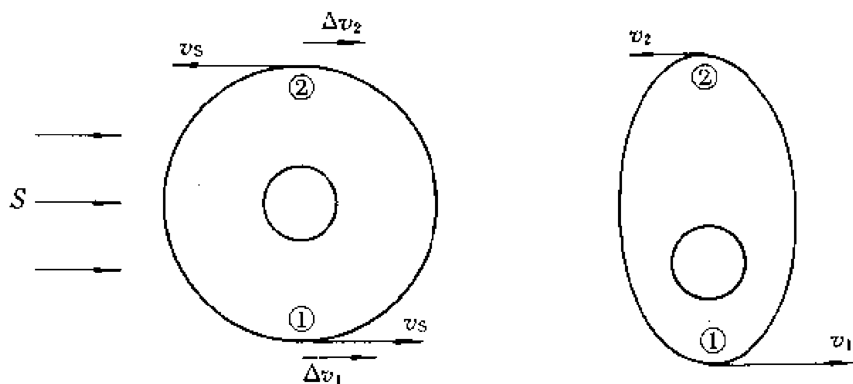


图　2.4-1

偏心率的增量 Δe 垂直于光压的方向。因此，偏心率矢量的赤经大于太阳的赤经。光压作用半年后偏心率达最大值，偏心率矢量的赤经开始小于太阳的赤经时，偏心率的摄动量将减少，一年后偏心率又回到零，轨道的拱线一年内在空间旋转 180°，偏心率的最大增量为 2ρ。

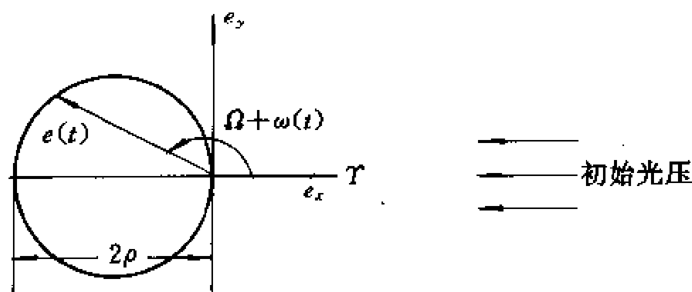


图　2.4-2

作用在卫星上的光压在卫星轨道坐标系中的分量是

$$\left.\begin{aligned} F_r &= -F_S(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u}_r) \\ F_t &= -F_S(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u}_t) \\ F_n &= -F_S(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u}_n) \end{aligned}\right\} \tag{2.4-2}$$

式中 $\boldsymbol{u}_r$，$\boldsymbol{u}_t$，$\boldsymbol{u}_n$ 是卫星所在点的径向、横向和法向的单位矢量。它们在赤道惯性坐标系中的分量见式(2.1-17)。

太阳方向 $\boldsymbol{S}$ 在赤道惯性坐标系中可用赤经 α_S 和赤纬 δ_S 表示，或借助于图2.4-3上的球面三角形，可以用太阳视运动轨道根数表示太阳的方向：

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \cos l_S \\ \sin l_S \cos i_S \\ \sin l_S \sin i_S \end{bmatrix} \tag{2.4-3}$$

式中，l_S 是太阳在黄道上的黄经；i_S 是黄赤的夹角。将上式和式(2.1-17)代入式(2.4-2)，可得出当卫星轨道倾角很小时，光压摄动在三个坐标方向的分量：

$$\left.\begin{aligned}F_r &= -\frac{F_S}{2}[(1-\cos i_S)\cos(\Omega+u+l_S)] + (1+\cos i_S)\cos(\Omega+u-l_S)]\\ F_t &= \frac{F_S}{2}[(1-\cos i_S)\sin(\Omega+u+l_S) + (1+\cos i_S)\sin(\Omega+u-l_S)]\\ F_n &= -F_S\sin i_S\sin l_S\end{aligned}\right\}\tag{2.4-4}$$

式中 $u=\omega+f$。在光压作用下，轨道摄动主要表现在轨道面内轨道要素 e_x，e_y 的变化。对于静止轨道，有 $e\ll1$，$n\approx\omega_e$，$f\approx M$，轨道要素 e_x，e_y 的摄动方程可简化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{de_x}{dt} &= \frac{1}{v_S}(F_r\sin l + 2F_t\cos l)\\ \frac{de_y}{dt} &= \frac{1}{v_S}(-F_r\cos l + 2F_t\sin l)\end{aligned}\right\}\tag{2.4-5}$$

式中 $l=\Omega+\omega+M$ 为卫星的平赤经。

在静止轨道上的卫星，每年有 275 天处在连续全日照状态，在剩余天数内，每天星蚀时间

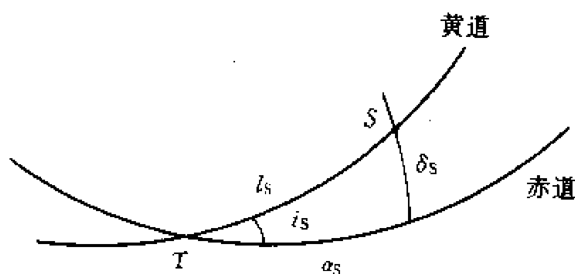


图 2.4-3

少于 4.8%，因此，可将上式直接积分，在轨道一圈内取平均值。将式(2.4-4)代入式(2.4-5)，沿轨道积分一圈(假定轨道一圈内 l_S 为常值)，得每天偏心率的变化率为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta e_x}{\delta t} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{de_x}{dt}\right)dl = -\frac{3F_S}{2v_S}\sin l_S\cos i_S\\ \frac{\delta e_y}{\delta t} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{de_y}{dt}\right)dl = \frac{3F_S}{2v_S}\cos l_S\end{aligned}\right\}\tag{2.4-6}$$

略去黄赤交角的因子 $\cos i_S$，一天内偏心率的变化方向为 $l_S+90°$，垂直于太阳方向，变化率的幅值为(假定 $K=1$)

$$\dot{e} = \frac{3p}{2v}\cdot(86\ 141) = 1.95\times10^{-4}\left(\frac{A}{m}\right)\mathrm{d}^{-1}$$

再分析一年内偏心率的变化，将式(2.4-6)沿太阳视运动轨道进行积分，令 $l_S=n_S(t-t_0)=l_S(t)-l_S(t_0)$，得

$$\left.\begin{aligned}e_x(t) &= e_x(t_0) + \frac{3F_S}{2v_Sn_S}[\cos l_S(t) - \cos l_S(t_0)]\cos i_S\\ e_y(t) &= e_y(t_0) + \frac{3F_S}{2v_Sn_S}[\sin l_S(t) - \sin l_S(t_0)]\end{aligned}\right\}\tag{2.4-7}$$

式中 $e_x(t_0)$，$e_y(t_0)$ 为初始偏心率，右端第二项为偏心率增量 $\Delta e_x(t)$，$\Delta e_y(t)$。在赤道坐标面上，后两项随太阳视运动描述一个通过坐标原点的圆周，圆心在太阳方向上，位于[$-\cos l_S(t_0)$，

$-\sin l_S(t_0)$],圆半径 ρ 为

$$\rho = \frac{3F_S}{2v_S}\left(\frac{365.25}{2\pi}\right) = 0.011\left(\frac{A}{m}\right) \tag{2.4-8}$$

式(2.4-7)的合成见图 2.4-4,光压使偏心率 $\boldsymbol{e}$ 的端点在偏心率圆上移动,偏心率圆的圆心位置与初始 $\boldsymbol{e}(t_0)$和 $l_S(t_0)$有关,位于通过矢量 $\boldsymbol{e}(t_0)$端点沿光压方向的直线上。如初始偏心率 $\boldsymbol{e}(t_0)$指向太阳,幅值又等于偏心率圆半径 ρ,则式(2.4-7)化为

$$e_x(t) = \rho\cos l_S(t)$$

$$e_y(t) = \rho\sin l_S(t)$$

即在光压作用下,偏心率的幅值保持常值,但方向跟随太阳旋转。

黄赤交角使偏心率圆呈椭圆状,其主轴与春分点方向垂直。

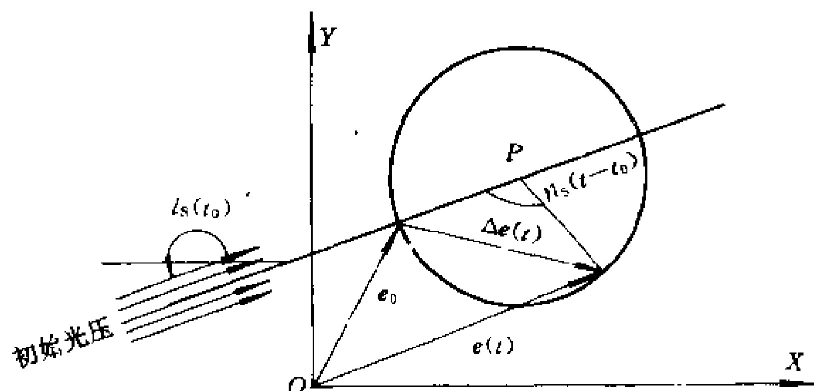


图　2.4-4

如取卫星面质比为 0.1 m²/kg,一年内偏心率增量 $\Delta e(t)$的最大幅值为 0.002 2,由此引起卫星在一天内东西方向漂移的幅度为±0.26°。

2.5　大气摄动

在近地轨道上,与地球表面相比,大气相当稀薄,但卫星以很高速度且长时间在高层大气中穿行,微小大气阻力的积累最终显出其影响的重要性,导致轨道衰减。以大气分子撞击卫星表面建立阻力模型,可近似认为入射能量被完全吸收,气动阻力产生的阻力可列为

$$F_A = \frac{1}{2}c_d\rho S v^2 \tag{2.5-1}$$

式中,c_d 为气动系数,可近似取为 1;ρ 为大气密度;S 为迎风面积,即几何面积乘以面积外法线与速度的方向余弦。气动阻力沿轨道速度的负方向,在轨道径向和切向坐标的分量为

$$\left.\begin{aligned} F_r &= -F_A\sin\beta \\ F_t &= -F_A\cos\beta \end{aligned}\right\} \tag{2.5-2}$$

β 为飞行角,即卫星速度与当地水平线的夹角。在椭圆轨道上,卫星速度和飞行角与真近点角的关系见式(1.1-41),(1.1-42)。气动力主要引起卫星轨道半长轴和偏心率的摄动,将式(2.5-2)代入轨道要素摄动等式(2.1-29),令卫星质量为 m,并利用式(1.1-41),(1.1-42),可得

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=-\left(\frac{c_d\rho S}{m}\right)\frac{na^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(1+e^2+2e\cos f)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=-\left(\frac{c_d\rho S}{m}\right)\frac{na}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}(e+\cos f)(1+e^2+2e\cos f)^{\frac{1}{2}}$$

再由轨道动量矩式 $r^2\dot{f}=\sqrt{\mu a(1-e^2)}$，得 $\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}f$ 的关系式

$$\mathrm{d}t=\frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{n(1+e\cos f)^2}\,\mathrm{d}f$$

利用上式，由于大气摄动是长周期摄动，在轨道一圈内半长轴和偏心率的变化为小量，半长轴和偏心率的增量为

$$\left.\begin{aligned}\Delta a&=-\left(\frac{c_d\rho S}{m}\right)a^2\int_0^{2\pi}\frac{(1+e^2+2e\cos f)^{\frac{3}{2}}}{(1+e\cos f)^2}\mathrm{d}f\\ \Delta e&=-\left(\frac{c_d\rho S}{m}\right)a(1-e^2)\int_0^{2\pi}\frac{(1+e^2+2e\cos f)^{\frac{1}{2}}}{(1+e\cos f)^2}(e+\cos f)\mathrm{d}f\end{aligned}\right\}\tag{2.5-3}$$

对于圆轨道，从长周期性角度，可用能量法估计轨道高度的衰减，大气摄动对卫星的作功为 $-v\cdot F_A$，等于轨道能量的变化 $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$，根据能量式 $E=-\mu/2a$，

$$\frac{\mu}{2a^2}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=-vF_A\tag{2.5-4}$$

对于圆轨道有式 $a=r$，$v=\sqrt{\mu/r}$，再引入高层大气密度的指数近似模式

$$\rho=\rho_0\mathrm{e}^{-(r-R_e)/h_0}\tag{2.5-5}$$

式中 h_0 为高层大气的标高，式(2.5-4)可化成

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-\left(\frac{c_dS}{m}\right)\sqrt{\mu r}\,\rho_0\mathrm{e}^{-(r-R_e)/h_0}\tag{2.5-6}$$

令 $r-R_e=H$ 为轨道高度，上式的积分可列为

$$\int_{H_0}^{H}\frac{\mathrm{e}^{H/h_0}}{\sqrt{R_e+H}}\mathrm{d}H=-\sqrt{\mu}\left(\frac{c_dS}{m}\right)\rho_0(t-t_0)$$

式中 t_0，H_0 为初始时间和初始轨道高度。对于近地圆轨道可引用近似关系 $R_e\gg H$，由上式的积分得轨道高度的衰减过程，

$$H(t)=H_0\ln\left[\mathrm{e}^{H_0/h_0}-\frac{1}{h}\sqrt{\mu R_e}\left(\frac{c_dS}{m}\right)\rho_0(t-t_0)\right]$$

第三章 卫星轨道的控制

根据卫星运行任务的需求，卫星轨道的控制可概括为两类。一类是轨道机动、轨道转移或简称变轨，卫星从运载分离后，由卫星自身的制导和推进系统，进行若干次轨道机动控制，使卫星进入预定轨道。另一类是轨道保持，为克服空间环境对轨道的摄动，需间断地对轨道进行修正控制，使卫星轨道保持和符合卫星应用任务的要求。

对于采用化学推进剂的系统，由于发动机具备一定的推力，所需发动机的推进工作时间，与轨道运行周期相比是相当短暂的，因此，通常可视为脉冲变轨方式，即推力脉冲使卫星速度有突变式的增量 $\Delta \boldsymbol{v}$，但不引起卫星向径 $\boldsymbol{r}$ 的突变。为完成预定轨道控制任务的脉冲变轨模式（或称策略）包含四项内容：共需脉冲变轨数；各次脉冲作用的时刻（即在轨道上的脉冲作用点）；各次脉冲的方向；各次脉冲的幅值分配。确定轨道控制模式的设计工作有两项主要内容：一是轨道控制的建模，包括轨道参数的描述方式、轨道控制的动力学方程以及控制量的描述；另一是轨道控制的优化过程，由此得出具体的控制模式和控制规律。优化方法在现代控制理论中有诸多论述。本章主要概述控制建模和轨道控制动力学的基本规律。

3.1 轨道机动的基本关系

3.1.1 单脉冲变轨

单脉冲变轨是轨道射入问题。如已知卫星在某一时刻 t_0 的位置 $\boldsymbol{r}_0$ 和速度 $\boldsymbol{v}_0$，在该时刻施加脉冲式速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 之后，卫星进入另一轨道的轨道要素直接由轨道射入参数 $\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{v}_0, \Delta \boldsymbol{v}$ 确定。图 3.1-1 所示是共面变轨，令下标 0 表示脉冲变轨时刻卫星的运动参数，下标 1 表示脉冲

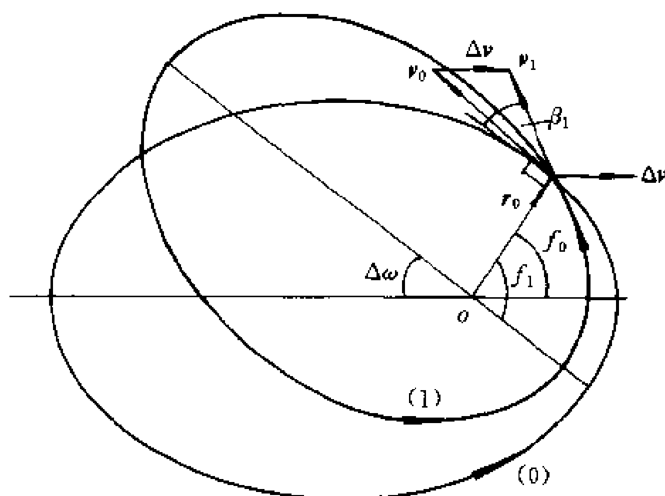


图 3.1-1

作用后新轨的运动参数和轨道要素。脉冲变轨的基本特征为

$$t_1 = t_0, \quad \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_0, \quad \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0 + \Delta \boldsymbol{v}$$

脉冲变轨后，速度 $\boldsymbol{v}_1$ 与当地水平的飞行角为 β，因此，轨道射入参数归结为 r_1, $\boldsymbol{v}_1$, β_1。变轨点的卫星真近点角为 f_1，有

$$v_1 \cos\beta_1 = r_1 \dot{f}_1$$

$$v_1 \sin\beta_1 = \dot{r}_1$$

由机械能公式(1.1-46)直接可得新轨的半长轴 a_1：

$$a_1 = \frac{r_1}{2 - \left(\dfrac{r_1 v_1^2}{\mu}\right)} \tag{3.1-1}$$

由动量矩公式

$$h_1 = r_1 v_1 \cos\beta_1$$

得半通径 p_1 和偏心率 e_1 与射入参数的关系：

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{h_1^2}{\mu} = \frac{1}{\mu} r_1^2 v_1^2 \cos^2\beta_1 \\ e_1 &= \left(1 - \frac{p_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{r_1 v_1^2}{\mu} - 1\right)^2 \cos^2\beta_1 + \sin^2\beta_1\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{3.1-2}$$

由轨道的椭圆方程式(1.1-12)及其微分可得

$$\cos f_1 = \frac{1}{e_1}\left(\frac{h_1^2}{\mu r_1} - 1\right)$$

$$\sin f_1 = \frac{1}{e_1}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\, \dot{r}_1 = \frac{1}{e_1}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\, v_1 \sin\beta_1$$

上两式给出真近点角 f_1 与射入参数的关系

$$\tan f_1 = \frac{\left(\dfrac{r_1 v_1^2}{\mu}\right) \cos\beta_1 \sin\beta_1}{\left(\dfrac{r_1 v_1^2}{\mu}\right) \cos^2\beta_1 - 1} \tag{3.1-3}$$

脉冲变轨后，轨道拱线转过角度 $\Delta\omega$(参见图 3.1-1)：

$$\Delta\omega = f_1 - f_0 \tag{3.1-4}$$

如脉冲增量使变轨速度 $\boldsymbol{v}_1$ 的飞行角 $\beta_1 = 0$，则有

$$f_1 = \arctan\left(\frac{0}{\left(\dfrac{r_1 v_1^2}{\mu}\right) - 1}\right) = 0°,\ 180°$$

如 $r_1 v_1^2/\mu = 1$，则 $e = 0$，f_1 不确定，轨道成为圆轨道；如 $r_1 v_1^2/\mu > 1$，则 $f_1 = 0°$，变轨点成为近地点；如 $r_1 v_1^2/\mu < 1$，则 $f_1 = 180°$，变轨点成为远地点。比较分析式(3.1-1)和(3.1-2)，半长轴和偏心率方程包含三个射入参数 r_1, v_1, β_1，因此，单脉冲可以独立地修正轨道的半长轴和偏心率。例如，调整轨道周期(即半长轴)，而又不引起偏心率的变化，选择变轨点 r_1，由式(3.1-1)，为获得半长轴 a_1，脉冲变轨的速度 v_1 是

$$v_1 = \left(\frac{2\mu}{r_1} - \frac{\mu}{a_1}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.1-5}$$

为保持原轨道的偏心率 e_0 不变，由式(3.1-2)，脉冲变轨点速度 v_1 的飞行角 β_1 应是

$$\cos\beta_1 = \left[\frac{1-e_0^2}{2\dfrac{r_1v_1^2}{\mu}-\left(\dfrac{r_1v_1^2}{\mu}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.1-6}$$

由图 3.1-1，脉冲速度增量的幅值可列出为

$$\Delta v = [v_0^2 + v_1^2 - 2v_0v_1\cos(\beta_1-\beta_0)]^{\frac{1}{2}}$$

略去式(3.1-5)的下标，此式的微分为

$$2v\cdot\Delta v = \frac{\mu}{a^2}\cdot\Delta a$$

该式表明，在近地点修正轨道半长轴的效率最高，因该点的速度最大，所需速度增量 Δv 最小。

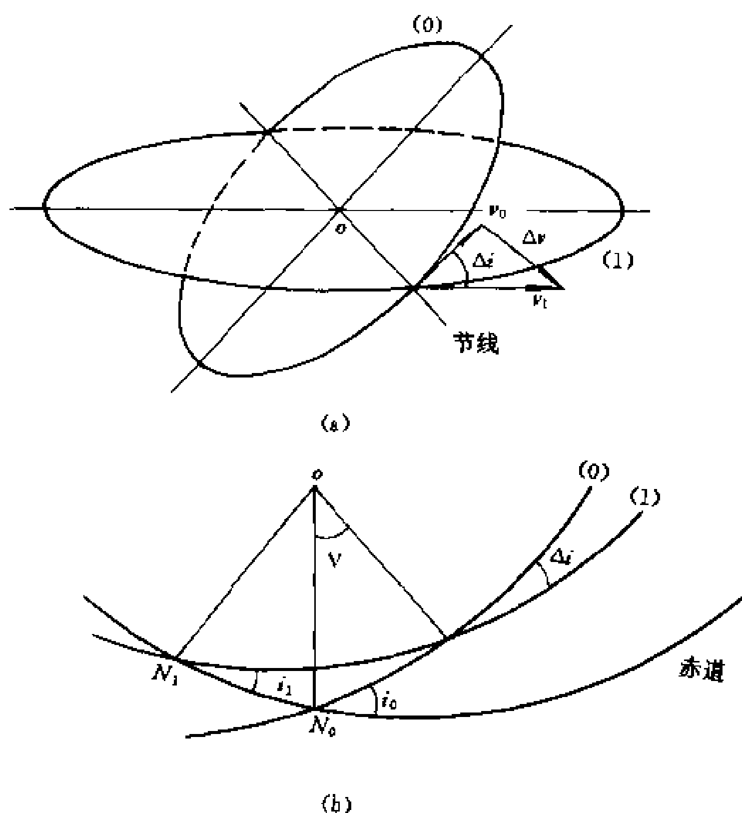


图　3.1-2

单脉冲变轨的另一作用是轨道倾角控制，图 3.1-2(a)所示，原轨道为(0)，预定轨道为(1)。

如仅改变轨道倾角，不改变轨道的升交点经度，则最佳变轨点在两轨道相交的节点，脉冲速度增量 Δv，使轨道面(0)绕节线转过 Δi 角，所需速度增量 Δv 为

$$\Delta v = (v_1^2 + v_0^2 - 2v_0v_1\cos\Delta i)^{\frac{1}{2}}$$

如原轨道(0)和预定轨道(1)的倾角和升交点经度分别为 i_0，Ω_0 和 i_1，Ω_1，则倾角控制作用点距原轨道升交点的 γ 角和倾角修正量 Δi 的关系式(见图 3.1-2(b))为

$$\left.\begin{aligned}\cos\Delta i &= \cos i_0 \cos i_1 + \sin i_0 \sin i_1 \cos(\Omega_0 - \Omega_1) \\ \sin\gamma &= \frac{\sin i_1 \sin(\Omega_0 - \Omega_1)}{\sin\Delta i}\end{aligned}\right\} \tag{3.1-7}$$

3.1.2 双脉冲——霍曼变轨

单脉冲变轨的主要特点是新轨道必定与原轨道相交，双脉冲变轨能使新轨道完全脱离原轨道。在两个共面圆轨道之间的最佳变轨方式为霍曼变轨；在两个圆轨道之间的最佳过渡轨道是霍曼椭圆，此椭圆分别与两个圆轨道相切，切点即是过渡轨道的近地点和远地点，见图3.1-3。

设内圆轨道的半径和速度为 r_1，v_1，外圆轨道的半径和速度为 r_2，v_2。假定在内圆上脉冲

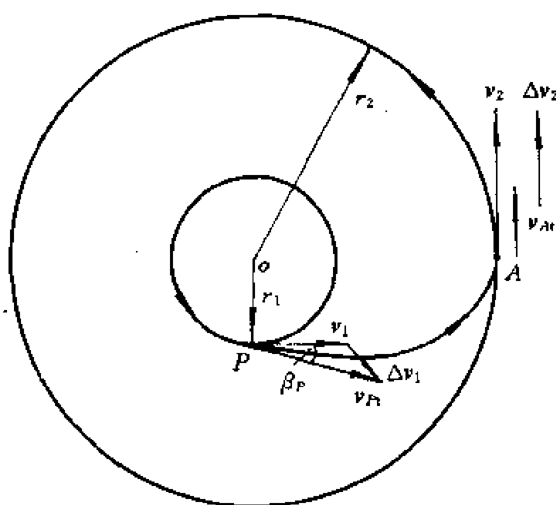


图 3.1-3

Δv_1 变轨后，过渡轨道以速度 v_{Pt}脱离内圆轨道，与内圆轨道切线的夹角为 β_P。为简化论述，令过渡轨道与外圆相切，在该点过渡轨道的速度为 v_{At}。这样，第二次脉冲不含径向分量，可认为是最佳模式，更全面的论证见文献[23]。

根据机械能和动量矩守恒，对于过渡轨道，有

$$v_{Pt}^2 - \frac{2\mu}{r_1} = v_{At}^2 - \frac{2\mu}{r_2} \tag{3.1-8}$$

$$v_{Pt}\, r_1 \cos\beta_P = v_{At}\, r_2 \tag{3.1-9}$$

令 $c=(r_1/r_2)\cos\beta_P$，将式(3.1-9)代入式(3.1-8)，得

$$v_{Pt}^2 = \frac{2\mu}{(1-c^2)}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

由此，可得 v_{Pt}和 v_{At}之差

$$v_{Pt} - v_{At} = \left[2\mu\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}(1-c^2)^{-\frac{1}{2}}(1-c) \tag{3.1-10}$$

最佳变轨要求两次脉冲的增量$(v_{Pt}-v_1)+(v_2-v_{At})$为最小，由于 v_1，v_2 为给定值，增量可写为

$$v_{Pt} - v_{At} = \Delta v_{\min}$$

式(3.1-10)的微分是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}(v_{Pt}-v_{At})=\left[2\mu\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}(1-c^2)^{-\frac{3}{2}}(c-1)$$

此微分总是负值。当 c 取最大值时(即 $\beta_P=0$)，所需的速度增量为最小。因此，霍曼变轨是两次切向脉冲变轨：第一次切向脉冲作用在内圆轨道上，形成椭圆轨道，其远地点到达外圆上；第二次切向脉冲作用在此远地点，将轨道圆化。霍曼椭圆转移轨道的三个独立的轨道要素为

$$a_T=\frac{1}{2}(r_1+r_2),\qquad e_T=\frac{r_2-r_1}{r_1+r_2},\qquad \omega_T=u(t_0)$$

式中 $u(t_0)$ 为第一次变轨点卫星距升交点的角距。其他变轨参数(参见式(1.1-41))，为

$$\left.\begin{aligned}&v_{Pt}^2=\frac{2\mu\, r_2}{r_1(r_1+r_2)},\qquad v_{At}^2=\frac{2\mu\, r_1}{r_2(r_1+r_2)}\\&\Delta v_1=v_{Pt}-v_1=\left(\frac{\mu}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{2r_2}{r_1+r_2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]\\&\Delta v_2=v_2-v_{At}=\left(\frac{\mu}{r_2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1-\left(\frac{2r_1}{r_1+r_2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\end{aligned}\right\}\tag{3.1-11}$$

另一种最佳脉冲共面变轨是双椭圆三脉冲方式。当外圆半径大于 11.98 倍内圆半径时，三脉冲比霍曼变轨有利，见文献[25]。

霍曼变轨原则可推广到非共面圆轨道之间的变轨。霍曼椭圆过渡轨道的主轴与两轨道平面的相交节线一致，椭圆的近、远地点分别与两轨道相接，椭圆过渡轨道平面介于两平面之间，两次脉冲不仅改变轨道的半长轴，同时起到改变轨道平面的作用。

在图 3.1-4 上，令两轨道面的夹角为 θ，第一脉冲得到的过渡轨道面与原轨道(1)面相夹 θ_1 角，第二脉冲将过渡轨道(T)面改变 $(\theta-\theta_1)$ 角，与目标轨道(2)重合。由式(3.1-11)可知，椭圆

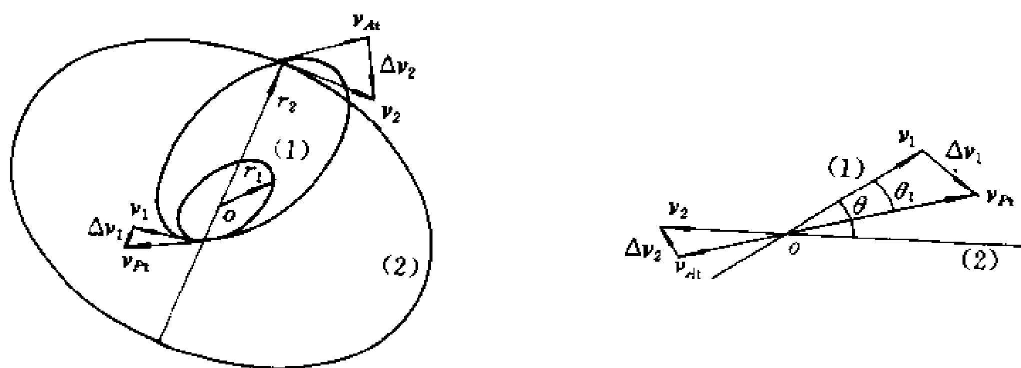


图　3.1-4

过渡轨道的近、远地点速度应为 v_{Pt}，v_{At}，因此，两次脉冲增量 Δv_1，Δv_2 应符合下列公式：

$$\left.\begin{aligned}&\Delta v_1^2=v_1^2+v_{Pt}^2-2v_1v_{Pt}\cos\theta_1\\&\Delta v_2^2=v_2^2+v_{At}^2-2v_2v_{At}\cos(\theta-\theta_1)\end{aligned}\right\}\tag{3.1-12}$$

选取最佳 θ_1 角，使两次脉冲增量之和为最小，令

$$\Delta v=\Delta v_1+\Delta v_2$$

有微分公式

$$\frac{\mathrm{d}(\Delta v)}{\mathrm{d}\theta_1}=\frac{\mathrm{d}(\Delta v_1)}{\mathrm{d}\theta_1}+\frac{\mathrm{d}(\Delta v_2)}{\mathrm{d}\theta_1}$$
$$=\frac{1}{2\cdot\Delta v_1}\cdot\frac{\mathrm{d}(\Delta v_1^2)}{\mathrm{d}\theta_1}+\frac{1}{2\cdot\Delta v_2}\cdot\frac{\mathrm{d}(\Delta v_2^2)}{\mathrm{d}\theta_1}$$
$$=\frac{v_1 v_{P_t}}{\Delta v_1}\sin\theta_1+\frac{v_2 v_{At}}{\Delta v_2}\sin(\theta-\theta_1)$$

式中霍曼椭圆近、远地点的速度仅与两圆轨道半径有关。将式(3.1-11)代入上式，并令上式微分为零，则有

$$\frac{(r_2)^{\frac{1}{2}}}{r_1\cdot\Delta v_1}\sin\theta_1+\frac{(r_1)^{\frac{1}{2}}}{r_2\cdot\Delta v_2}(\sin\theta_1\cos\theta-\cos\theta_1\sin\theta)=0 \tag{3.1-13}$$

由此可得最佳 θ_1 角：

$$\cot\theta_1=\cot\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\Delta v_2}{\Delta v_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{3.1-14}$$

式中 Δv_1，Δv_2 为 θ_1 角的函数，用迭代法可求得最佳的第一脉冲的轨道面变化角 θ_1。

3.1.3 双脉冲——拱线变轨

共面椭圆轨道的变轨是更为一般性的轨道控制，其主要内容是椭圆拱线转动控制，另两个独立变量——偏心率和半长轴可保持定值或按相应要求变化。双脉冲拱线转动控制是共面椭圆变轨的一种最佳控制模式，其简化模式是两脉冲180°对称周向控制，见文献[24,25]。根据目标椭圆轨道半长轴和偏心率增量需求和拱线转动的量值，有同向双脉冲或反向双脉冲两种方式，见图3.1-5。令(1)，(2)，(T)表示初始轨道、目标轨道和转移轨道，下标1，2，T表示轨道(1)，(2)，(T)的参数，令第二下标表示在第一下标轨道上该参数的条件。例如，f_{1T}，表示在初始轨道上第一脉冲作用点的真近点角，在该点卫星进入转移轨道；而 f_{T1} 表示在转移轨道上第一脉冲作用点的真近点角。由于转移轨道的拱线与初始轨道的拱线不重合，因此，$f_{1T}\neq f_{T1}$。

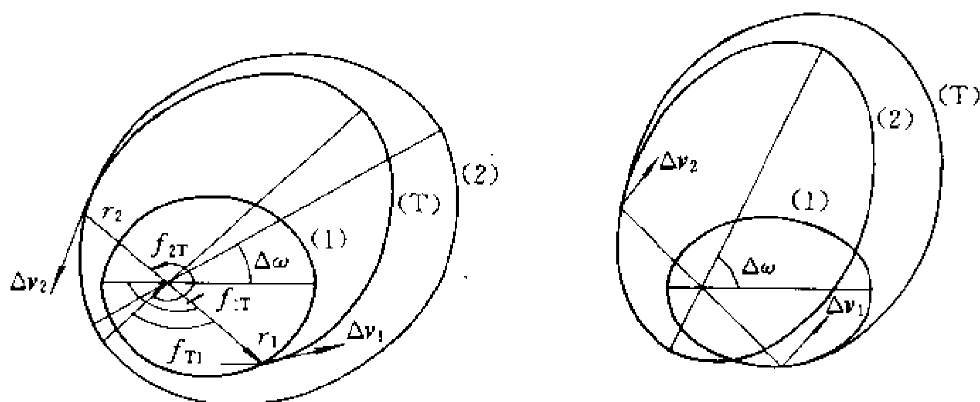


图 3.1-5

令拱线转动控制值为 $\Delta\omega$，两脉冲180°变轨模式规定两次脉冲作用点的关系是

$$\left.\begin{aligned}f_{T2}&=f_{T1}+180^\circ\\ \text{或}\quad f_{2T}&=f_{1T}-\Delta\omega+180^\circ\end{aligned}\right\} \tag{3.1-15}$$

如令初轨的拱线为参考基准，即 $\omega_1=0$，则上式的拱线转角 $\Delta\omega=\omega_2$。如图3.1-5所示，在第一脉冲作用点，有

$$\left.\begin{aligned}
r_{1T} &= \frac{p_1}{1+e_1\cos f_{1T}} = \frac{p_T}{1+e_T\cos f_{T1}} \\
(v_r)_{1T} &= \sqrt{\frac{\mu}{p_1}}\, e_1\cos f_{1T} \\
(v_t)_{1T} &= \sqrt{\frac{\mu}{p_1}}\,(1+e_1\cos f_{1T}) \\
(v_r)_{T1} &= \sqrt{\frac{\mu}{p_T}}\, e_T\sin f_{T1} \\
(v_t)_{T1} &= \sqrt{\frac{\mu}{p_T}}\,(1+e_T\cos f_{T1})
\end{aligned}\right\} \tag{3.1-16}$$

在第二脉冲作用点，有

$$\left.\begin{aligned}
r_{2T} &= \frac{p_2}{1+e_2\cos f_{2T}} = \frac{p_T}{1+e_T\cos f_{T2}} \\
(v_r)_{2T} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p_2}}\, e_2\sin(f_{1T}-\Delta\omega) \\
(v_t)_{2T} &= \sqrt{\frac{\mu}{p_2}}\,[1-e_2\cos(f_{1T}-\Delta\omega)] \\
(v_r)_{T2} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p_T}}\, e_T\sin f_{T1} \\
(v_t)_{T2} &= \sqrt{\frac{\mu}{p_T}}\,(1-e_T\cos f_{T1})
\end{aligned}\right\} \tag{3.1-17}$$

上述各式中 v_r，v_t 表示径向、切向速度。比较上述各式，对于转移轨道(T)有关系式

$$\left.\begin{aligned}
(v_r)_{T2} &= -(v_r)_{T1} \\
p_T &= \frac{2r_{1T}r_{2T}}{r_{1T}+r_{2T}} \\
e_T\cos f_{T1} &= \frac{r_{2T}-r_{1T}}{r_{2T}+r_{1T}} \\
\omega_T &= f_{1T}-f_{T1}
\end{aligned}\right\} \tag{3.1-18}$$

式中 ω_T 为转移轨道相对初轨拱线的近地点幅角。

按两脉冲 180°控制方式，如给定拱线转动要求 $\Delta\omega$ 以及第一脉冲作用点 f_{1T}，则由此确定了 r_{1T}，f_{2T} 和 r_{2T}。式(3.1-18)的第二，第三，第四式共含有转移轨道的三个独立轨道要素 p_T，e_T，ω_T，因此只要确定两个，p_T，e_T 或 p_T，ω_T，仅一个留作待选参数，可以是 e_T 或 ω_T。两次脉冲的速度增量 Δv 是径向速度增量和切向速度增量的合成，其式为

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \Delta v_1 + \Delta v_2 \\
&= \{[(v_r)_{T1}-(v_r)_{1T}]^2 + [(v_t)_{T1}-(v_t)_{1T}]^2\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \{[(v_r)_{2T}-(v_r)_{T2}]^2 + [(v_t)_{2T}-(v_t)_{T2}]^2\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{3.1-19}$$

考虑到式(3.1-18)，在转移轨道上，按照 180°相隔控制，在两次作用点上，转移轨道的径向速度

互为负值，即$(v_r)_{T1}=-(v_r)_{T2}$。两者都决定于f_{T1}，即转移轨道的ω_T按180°变轨模式，根据式(3.1-16)，(3.1-17)，在式(3.1-19)中，初始轨道和目标轨道的径向速度和切向速度$(v_r)_{1T}$，$(v_r)_{2T}$，$(v_t)_{1T}$，$(v_t)_{2T}$都由第一脉冲作用点的真近点角f_{1T}直接确定。同样在转移轨道上，如有选取参数f_{T1}，则在两次脉冲作用点的切向速度$(v_t)_{T1}$，$(v_t)_{T2}$也由第一脉冲作用点的f_{1T}直接确定。因此脉冲增量式(3.1-19)是第一脉冲作用点的真近点角f_{1T}和转移轨道待选参数f_{T1}的二次函数。按双重极小的最优指标

$$\min_{f_{1T}}[\min_{f_{T1}}(\Delta v)]$$

可求得双脉冲拱线控制的最佳切向作用点。

3.2 近地圆轨道的保持

近地圆轨道常用于对地遥感观测的应用任务，根据遥感应用的类型和星载遥感仪器的性能，卫星轨道的高度设计在700 km～1 200 km范围，轨道的主要特点是太阳同步兼回归轨道。为便于卫星图像资料的处理和应用，要求星载遥感仪器对地观测的阳光条件、对地球覆盖的衔接以及通过同地区的高度都具有较高的稳定性，例如，轨迹通过赤道的横移变化量不超过3 km，在纬度60°上，不超过4.5 km，见文献[26]。

对于太阳同步兼回归轨道，因倾角偏差δi和半长轴偏差δa引起轨迹每圈赤道横移的角度偏差$\delta\lambda_0$为

$$\delta\lambda_0=\frac{3T}{2a}\omega_e\cdot\delta a+\frac{2\pi}{T_S\left(I\mp\dfrac{C}{N}\right)}\left[\tan i\cdot\delta i+\frac{7}{2a}\delta a\right]$$

式中，T为轨道周期；T_S为太阳的回归周期；I,C,N为回归轨道的三要素。与此相应的在纬度φ圈上，轨迹横移的角度偏差为

$$\delta\lambda_\varphi=\cos\varphi\cdot\delta\lambda_0+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin i(\cos^2\varphi-\cos^2 i)^{\frac{1}{2}}}\cdot\delta i$$

因此，此类遥感卫星的轨道要素——倾角、半长轴和偏心率(矢量)必须精确地符合设计要求。为消除轨道摄动，由星载推进系统进行轨道修正，轨道保持的精度要求约为：$\Delta i\leqslant0.02°$，$\Delta a\leqslant 150$ m，$\Delta e\leqslant2\times10^{-4}$，$\Delta\omega\leqslant0.05°$。

轨道摄动方程(2.1-29)可直接作为轨道控制方程。对于高倾角的圆轨道，偏心率很小，为避免奇点，引入偏心率向量$\boldsymbol{e}$作为被控轨道要素。令坐标x_N轴沿轨道面节线，指向升交点；y_N轴在轨道面内，垂直并超前x_N轴，有

$$\boldsymbol{e}=\begin{bmatrix}e_x\\e_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e\cos\omega\\e\sin\omega\end{bmatrix}$$

将轨道控制分为两项互为独立的部分，一是轨道面内轨道要素的控制，为切向、径向控制F_t，F_r；另一是轨道面要素的控制，为法向控制F_n。

略去方程式(2.1-29)右端的小量e，引用新变量e_x，e_y和近似式$E\approx f$，$r\approx a$，轨道控制方程可列为

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{n}F_{\mathrm{t}} \\
\frac{\mathrm{d}e_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{na}(F_{\mathrm{r}}\sin u + 2F_{\mathrm{t}}\cos u) \\
\frac{\mathrm{d}e_y}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{na}(-F_{\mathrm{r}}\cos u + 2F_{\mathrm{t}}\sin u) \\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{na}F_{\mathrm{n}}\cos u \\
\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{na\sin i}F_{\mathrm{n}}\sin u
\end{aligned}\right\} \tag{3.2-1}$$

式中$u=\omega+f$为卫星距升交点的角距。对于圆轨道,径向控制F_r对半长轴的控制效率为零,对偏心率的控制仅为切向控制一半。因此,有效的控制方式是,由切向控制修正轨道面内的轨道要素,由法向控制修正轨道倾角。由于轨道保持所需的修正量为小量,星载推进系统作用时间较短,可视为脉冲控制,其积分即为脉冲速度增量,轨道平面内的轨道控制方程(3.2-1)可改写为增量方程。对于单次控制脉冲,有

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Delta a}{a} &= \frac{2}{na}\Delta v_{\mathrm{t}} \\
\Delta e_x &= \frac{2}{na}\Delta v_{\mathrm{t}}\cos u \\
\Delta e_y &= \frac{2}{na}\Delta v_{\mathrm{t}}\sin u
\end{aligned}\right\} \tag{3.2-2}$$

由上式可见,半长轴的修正与脉冲作用点无关;偏心率的增量向量$\boldsymbol{\Delta e}$的方向与升交点坐标轴x_N的夹角θ等于脉冲作用点卫星距升交点的夹角u(当切向脉冲为正);在轨道面内,偏心率增量$\boldsymbol{\Delta e}$与切向脉冲$\Delta \boldsymbol{v}_t$垂直,并滞后90°,见图3.2-1。由于Δa,Δe_x,Δe_y为三个独立的变量,单次脉冲不能完成预定的修正要求,如令脉冲作用点距升交点的角距u为待选的变量,则双脉冲可实现轨道面内的全修正。采用变分法和哈密尔顿极大值原理可得最佳控制律,见文献[27]。也可用动力学几何法作简要论述。

如轨道偏心率为$\boldsymbol{e}_1$,修正的目标偏心率为$\boldsymbol{e}_2$,轨道控制的偏心率修正量为$\boldsymbol{\Delta e}$(见图3.2-1),其相位为θ。

如设定双脉冲作用点相隔180°,则作用点应处在偏心率增量$\boldsymbol{\Delta e}$的方向上,轨道控制增量方程为

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Delta a}{a} &= \frac{2}{na}(\Delta v_1 + \Delta v_2) \\
\Delta e_x &= \frac{2}{na}(\Delta v_1 - \Delta v_2)\cos\theta \\
\Delta e_y &= \frac{2}{na}(\Delta v_1 - \Delta v_2)\sin\theta
\end{aligned}\right\} \tag{3.2-3}$$

式中Δv的下标1,2表示一次和二次切向脉冲。由上式可见,两次相隔180°的同向脉冲对半长轴的修正起叠加的效果,但对偏心率的修正互为相抵。因此,相隔180°的双脉冲,仅适用于$\Delta e > \left|\frac{\Delta a}{a}\right|$的轨道修正情况,并且两次脉冲应互为反向,对偏心率修正起叠加的效果,即

$$\Delta v_1 = \frac{na}{4}\left(\Delta e + \frac{\Delta a}{a}\right)$$

$$\Delta v_2 = \frac{na}{4}\left(-\Delta e + \frac{\Delta a}{a}\right)$$

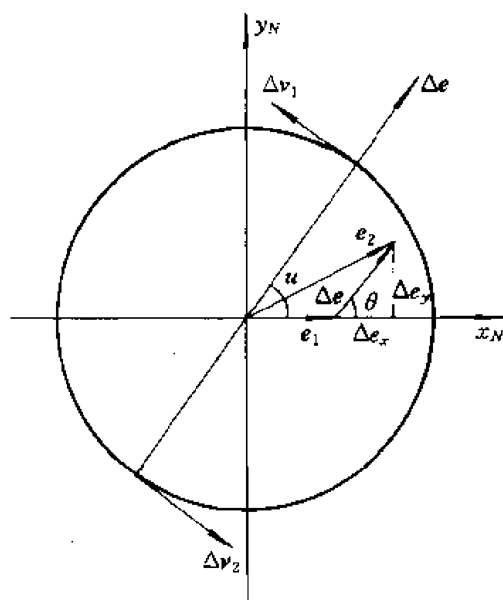


图 3.2-1

对于 $\Delta e < \left|\frac{\Delta a}{a}\right|$ 的轨道修正情况，应采用两次同向脉冲，但作用点不相隔 180°，各为 θ_1，θ_2，轨道控制增量方程为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta a}{a} &= \frac{2}{na}(\Delta v_1 + \Delta v_2) \\ \Delta e_x &= \frac{2}{na}(\Delta v_1 \cos\theta_1 + \Delta v_2 \cos\theta_2) \\ \Delta e_y &= \frac{2}{na}(\Delta v_1 \sin\theta_1 + \Delta v_2 \sin\theta_2) \end{aligned}\right\} \tag{3.2-4}$$

令双脉冲作用点 θ_1，θ_2 位于偏心率增量的两侧，参见图 3.2-2 的轨道修正几何，有控制律：

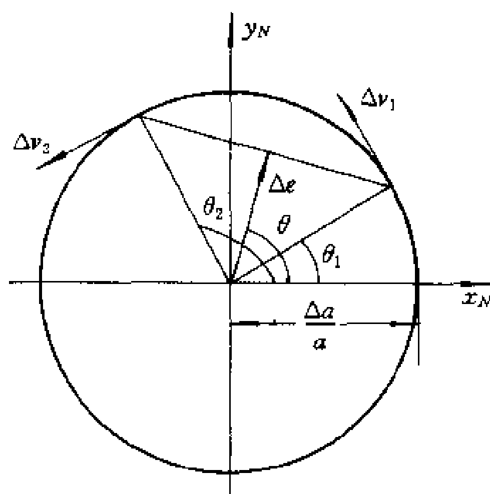


图 3.2-2

$$\left.\begin{aligned}\Delta v_1 = \Delta v_2 &= \frac{na}{4}\cdot\frac{\Delta a}{a}\\ \theta_1 &= \theta - \arccos\left(\frac{\Delta e}{\Delta a/a}\right)\\ \theta_2 &= \theta + \arccos\left(\frac{\Delta e}{\Delta a/a}\right)\end{aligned}\right\} \tag{3.2-5}$$

3.3 静止卫星的入轨控制

将卫星送入赤道上的地球同步轨道，且到达指定的经度上空而成为静止卫星，要经过若干飞行阶段和飞行轨道：上升段动力飞行，沿驻留轨道滑行，近地点射入，在过渡轨道上运行，远地点射入，在准同步轨道上漂移和定点置入等阶段。

图 3.3-1(a)是几次飞行轨道的平面图，图 3.3-1(b)表示轨道平面的变化。发射、运送卫星的轨道应是最佳的，使卫星具有最大的有效载荷，下面就一些主要问题作些说明[26~31]。

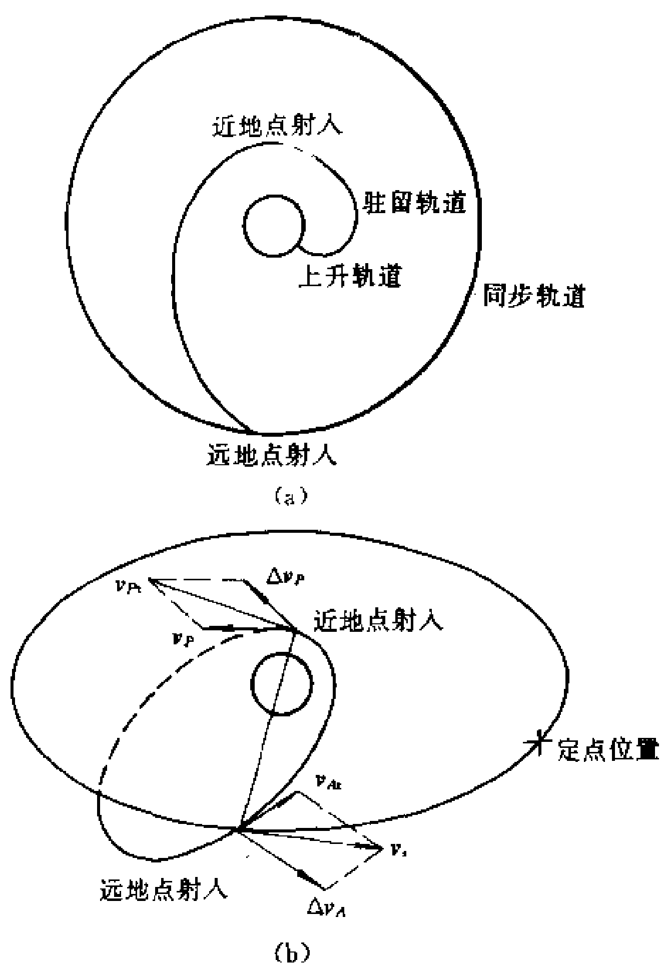


图 3.3-1

3.3.1 上升段

一个三级运载火箭从发射点起飞，经过几分钟的动力飞行，在一级、二级火箭相继脱落后，第三级运载火箭的动力装置将火箭射入驻留轨道，卫星的速度是 v_P。此轨道是圆形或是椭圆形，属于运载火箭的轨道设计问题，本节假定驻留轨道是近地圆轨道。为了使驻留轨道的倾角为最小，运载火箭的射向应朝正东方向，驻留轨道的高度只需高出大气的气动加热的限制，一般应大于 185 km，卫星的速度是 7.78 km/s。这个阶段一直延续到卫星沿驻留轨道滑行至赤道上空第一个降交点的附近。图 3.3-2 示出当地球不转时上升段轨道在地球面上的投影，这个大圆弧与发射点 L 的子午线及赤道组成直角球面三角形 $LN'D$，此圆弧面与赤道面的夹角就是轨道倾角 i，A_0 角为射向角，λ_0，φ_0 为发射点的经、纬度。有球面三角关系式

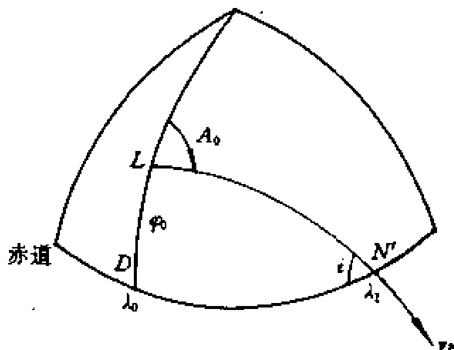


图 3.3-2

$$\cos i = \sin A_0 \cos \varphi_0 \tag{3.3-1}$$

$$\cos(\lambda_1 - \lambda_0) = \frac{-\cos A_0}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 A_0}} \tag{3.3-2}$$

只有当 $A_0 = 90°$时，驻留轨道的倾角为最小，等于发射点的纬度。考虑到地球的自转，第一个降交点 N'的经度等于 $\lambda_1 - \omega_e t_D$，t_D 是从起飞到降交点的时间。如射向偏离正东，则不能充分利用地球自转给予运载的初始速度。对运载而言，此速度损失很小，

$$\delta v = \omega_e R_e \cos \varphi_0 (1 - \sin A_0)$$

但卫星的速度损失较大。这是因为过渡轨道的倾角基本上与驻留轨道的倾角一致，所以上升轨道倾角的增大使卫星在过渡轨道远地点进行射入变轨时付出的速度增量较为显著。由图 3.3-1(b)和图 3.3-2，根据远地点射入的变轨几何关系，可得过渡轨道倾角大于发射点纬度所引起的远地点变轨速度的损失 $\delta(\Delta v_A)$：

$$\frac{\delta(\Delta v_A)}{\delta \varphi_0} = \frac{v_{At} v_s}{57.3 \Delta v_A} \sin \varphi_0$$

式中，v_{At}是过渡轨道远地点速度；Δv_A 是远地点射入时给予卫星的速度增量。上式的单位是 $\mathrm{m/s \cdot (°)^{-1}}$。如发射点纬度 $\varphi_0 = 28°$，$\Delta v_A = 1\ 826$ m/s，则 $\delta(\Delta v_A) = 22.0$ m/s。

3.3.2 近地点射入

当第三级运载火箭沿驻留轨道飞越赤道上空时，第三级的运力装置再次启动，将卫星加速、喷射完后星箭分离，卫星进入一个带倾角的大椭圆轨道。此轨道的近地点、远地点都在赤道面上，远地点高度应达到同步高度，使下一阶段远地点发动机喷射时能将卫星射入准确的赤道同步轨道。因此，这个大椭圆轨道是两个非共面圆轨道（驻留轨道和赤道同步轨道）之间的过渡轨道。

霍曼变轨的原则也适用于非共面变轨，其椭圆过渡轨道的主轴与内、外两圆轨道平面的相

交节线一致，椭圆过渡轨道平面可以不在内圆或外圆轨道面上，而介于两平面之间，使两次脉冲变轨的速度增量之和为最小。

令驻留轨道的倾角为 i，过渡轨道的倾角为 $i_t=i-\Delta i$，图 3.3-3 表示近地点、远地点速度在

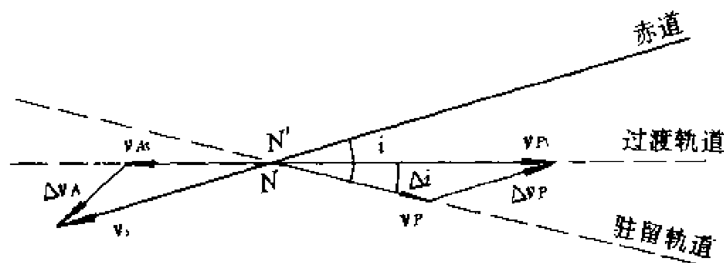


图　3.3-3

垂直于赤道的平面上的投影；降交点 N' 和升交点 N 是重合的；Δv_P，Δv_A 是近地点射入、远地点射入时给予卫星的速度增量。脉冲变轨的关系式为

$$\Delta v_P^2 = v_P^2 + v_{Pt}^2 - 2v_P v_{Pt}\cos\Delta i \tag{3.3-3}$$

$$\Delta v_A^2 = v_{At}^2 + v_s^2 - 2v_{At}v_s\cos(i-\Delta i) \tag{3.3-4}$$

选取最佳变轨角 Δi，使两次脉冲变轨的速度增量的总和为最小。参见广义霍曼变轨最佳方程式(3.1-13)，可用迭代法求得。

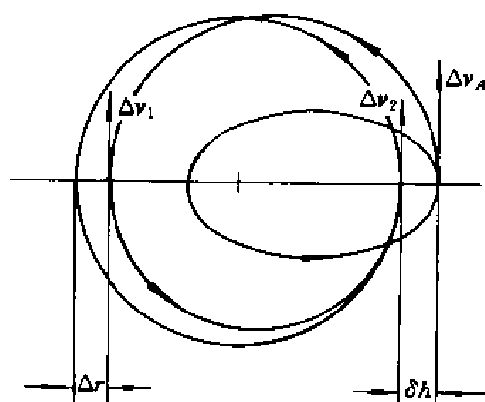
例　如驻留轨道的高度为 200 km，倾角为 28°，则近地点射入的最佳倾角变量 $\Delta i=2.1°$，与 $\Delta i=0$ 相比，节省速度增量 $\delta(\Delta v)=24.3$ m/s。

3.3.3　远地点射入

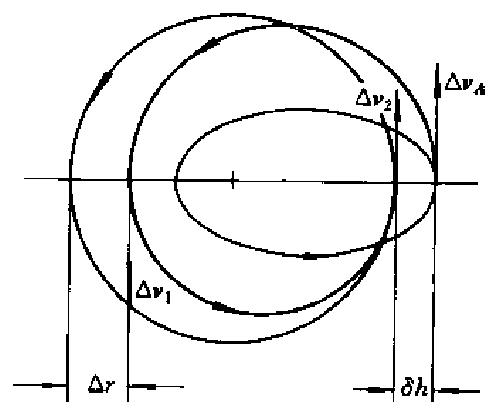
如果近地点射入能将卫星送入标称的霍曼式的过渡轨道，则在远地点(同步高度)施加一次远地点喷射就可将卫星轨道圆化，并消除倾角进入静止轨道。定义这个远地点射入速度增量值为标称值。当然，一次远地点发动机喷射后卫星的位置和给定的定点经度并不一致，实际上还由于近地点喷射冲量的数值和方向的偏差，过渡轨道将是不标准的。例如远地点高度不等于同步高度，远地点位置不在赤道上空。因此，远地点射入只能将卫星送入准同步轨道，此轨道的周期、偏心率、倾角都小量地偏离静止轨道的标称参数。在这种情况下至少还要两次小量脉冲变轨，才能使卫星到达目标轨道。

在近地点射入后，根据实际的过渡轨道重新安排远地点射入的方式，使卫星进入另一个倾角为零的霍曼轨道。这个小椭圆轨道的另一个拱点处在同步高度上，当卫星绕行半圈到达此拱点时，进行第二次脉冲喷射将轨道圆化。但是，除了获得准确的静止轨道，还要将卫星送入给定位置，因此远地点射入方式应作进一步适当的修正，使卫星进入这样的准同步轨道。如果远地点射入点的经度在定点位置的西侧，此近同步轨道的周期应小于同步周期；相反时(东侧)，此近同步轨道周期应大于同步周期，卫星将朝着定点位置漂移，此轨道称为漂移轨道。一般情况下，远地点喷射后漂移轨道的另一个拱点不在同步高度上，当卫星绕行半圈(或再绕行若干整数圈)到达此拱点时，进行第二次脉冲喷射，使卫星进入第二个漂移轨道；它的另一个新拱点的高度等于同步高度，然后再在此拱点处进行第三次脉冲喷射，将轨道圆化，见图 3.3-4。应细致地安排这三次变轨的时刻，使第三次脉冲喷射时卫星恰好漂到给定的定点位置上。总之，对远

地点射入的基本要求是消除倾角、圆化轨道、设置漂移方向和速率。



(a) $\delta h+\Delta r>0$ 向西漂移



(b) $\delta h+\Delta r<0$ 向东漂移

图 3.3-4

如远地点发动机的冲量在轨道上是可控的，并且数值精度很高(如液体远地点发动机)，则可以按轨道交会的方式在给定的天数内将卫星与给定的定点位置会合。如过渡轨道远地点高度与同步高度的偏差为 δh，第一个远地点的经度与定点位置经度之差为 $\Delta\lambda$，远地点喷射后一次漂移轨道的倾角为零，应该正确设置在此漂移轨道上与喷射远地点相隔 180°处的拱点的半径。令拱点半径与同步半径之偏置差为 Δr，可从下面的会合方程式中求出隐含的偏置量：

$$\Delta\lambda = l(T_T - T_T^0)\omega_e + (m + 0.5)(T_{1D}\omega_e - 2\pi) + (n - 0.5)(T_{2D}\omega_e - 2\pi) \tag{3.3-5}$$

式中

$$T_T^0 = 2\pi\left[\frac{(r_P + r_s)^3}{8\mu}\right]^{\frac{1}{2}},\quad \text{标称过渡轨道的周期；}$$

$$T_T = 2\pi\left[\frac{(r_P + r_s + \delta h)^3}{8\mu}\right]^{\frac{1}{2}},\quad \text{实际过渡轨道的周期；}$$

$$T_{1D}=2\pi\left[\frac{(2r_s+\delta h+\Delta r)^3}{8\mu}\right]^{\frac{1}{2}},\quad \text{一次漂移轨道的周期；}$$

$$T_{2D}=2\pi\left[\frac{(2r_s+\Delta r)^3}{8\mu}\right]^{\frac{1}{2}},\quad \text{二次漂移轨道的周期；}$$

l—— 从第一个远地点算起在过渡轨道上运行的圈数，$l\geqslant 0$；

m—— 从远地点喷射算起在一次漂移轨道上运行的圈数，$m\geqslant 0$；

n—— 在二次漂移轨道上运行的圈数，$n>1$。

一般过渡轨道的周期约为 10.5 h，从第一个远地点到进入定点位置的天数约等于$(0.4l+m+n)$。可以认为偏差 δh 和偏置 Δr 为小量值时，有下列线性化一次近似公式：

$$T_T=T_T^0\left(1+\frac{3\delta h}{2(r_s+r_P)}\right)$$

$$T_{1D}=T_s\left(1+\frac{3(\delta h+\Delta r)}{4r_s}\right)$$

$$T_{2D}=T_s\left(1+\frac{3\Delta r}{4r_s}\right)$$

$T_s=\dfrac{2\pi}{\omega_e}=2\pi\left(\dfrac{r_s^3}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$是同步周期。将这些周期公式代入会合方程式(3.3-5)，求出一次漂移轨道拱点半径的偏置为

$$\Delta r=\frac{2r_s\Delta\lambda}{3\pi(m+m)}-\frac{\delta h}{m+n}\left[(m+0.5)+l\frac{2r_sT_T^0}{(r_s+r_P)T_s}\right]\tag{3.3-6}$$

远地点喷射后卫星的漂移率 D 是一个重要参数，

$$D=(T_s-T_{1D})\omega_e=\frac{-3(\delta h+\Delta r)}{2r_s}\pi$$

向东漂移为正，向西漂移为负。圈数 l，m，n 的选择决定于实际运行操作中的限制条件，如地面站的可见范围、最大漂移速率、喷射燃料的节省等因素。卫星进入过渡轨道后到达定点位置，为变轨共耗费的速度增量是

$$\Delta v=\Delta v_A+|\Delta v_1|+|\Delta v_2|\tag{3.3-7}$$

式中

$$\Delta v_A=(v_{At}^2+v_{1D}^2-2v_{At}v_{1D}\cos i_T)^{\frac{1}{2}}$$

$$v_{At}=\left(\frac{2\mu r_P}{(r_s+\delta h)(r_s+\delta h+r_P)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v_{1D}=\left(\frac{2\mu(r_s+\Delta r)}{(r_s+\delta h)(2r_s+\delta h+\Delta r)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$|\Delta v_1|=\left|\left(\frac{2\mu r_s}{(r_s+\Delta r)(2r_s+\Delta r)}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{2\mu(r_s+\delta h)}{(r_s+\Delta r)(2r_s+\delta h+\Delta r)}\right)^{\frac{1}{2}}\right|$$

$$|\Delta v_2|=\left|v_s-\left(\frac{2\mu(r_s-\Delta r)}{r_s(2r_s+\Delta r)}\right)^{\frac{1}{2}}\right|$$

在漂移轨道上 Δv_1，Δv_2 的脉冲喷射由星上辅助热喷气系统中的小发动机产生。在这三次定点交会脉冲中，远地点脉冲是最重要的。远地点喷射参数(方向和数值)的正确性将直接影响热气系统中燃料的耗费量，应根据实际过渡轨道的状况和进入定点位置时间的要求以及各种限制

条件,最佳地选择远地点喷射参数,使式(3.3-7)的速度增量为最小。

3.3.4 漂移控制

在3.3.3节结合远地点射入问题,已经阐明了卫星要经过两次漂移轨道才能进入定点静止位置。由于远地点喷射冲量的误差(数值和方向),卫星进入的准同步轨道不是一次漂移轨道,要按类似上述的会合原则重新安排各次射入脉冲,包括射入点的位置和冲量的方向及幅值。从准同步轨道开始,还要进行三次脉冲变轨,才能将卫星送入定点静止位置,在这阶段的控制问题简称为漂移控制。

远地点射入后,准同步轨道的形状有三种基本类型,如图3.3-5(a),(b),(c)所示,准同步轨道位于同步轨道之内或之外或与同步轨道相交。在图上Δv_A表示从过渡轨道进入准同步轨道的速度增量。从这种轨道出发与定点位置的交会问题与上述相似。这里主要说明将准同步轨道圆化成共面同步圆轨道的控制模式和速度增量。有两种方式进行轨道圆化,它们都分别需要两次射入脉冲[29]。

(1) 第一次脉冲Δv_1作用于近地点,第二次脉冲Δv_2作用于半径等于同步半径的新的远地点(或是近地点),见图3.3-5(a),(c)。

(2) 第一次脉冲$\Delta v_1'$作用于远地点,第二次脉冲$\Delta v_2'$作用于等于同步半径的新的近地点(或是远地点),可以图3.3-5(b)为例(图上未标出撇号)。

第一种方式各次脉冲喷射的速度增量是

$$\Delta v_1 = v_s\left(\frac{r_s}{r_P}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{2r_s}{r_s+r_P}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{2r_A}{r_A+r_P}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\Delta v_2 = v_s\left[1-\left(\frac{2r_P}{r_s+r_P}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

第二种方式各次脉冲喷射的速度增量是

$$\Delta v_1' = v_s\left(\frac{r_s}{r_A}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{2r_P}{r_s+r_A}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{2r_P}{r_A+r_P}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\Delta v_2' = v_s\left[1-\left(\frac{2r_A}{r_s+r_A}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

这里r_A,r_P是近同步轨道的远地点、近地点半径,令

$$\frac{r_A}{r_s}=1+x,\qquad \frac{r_P}{r_s}=1+y,\qquad \frac{r_A}{r_P}=\frac{1+x}{1+y}$$

其中x,y都为小量值,代入上述速度公式,线性化后各速度增量可展开成级数形式:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta v_1 &= v_s\left(-\frac{x}{4}+\frac{5}{32}x^2+\frac{1}{16}xy-\frac{13}{128}x^3-\frac{11}{128}x^2y+\frac{1}{128}xy^2\right)+\cdots\\
\Delta v_2 &= v_s\left(-\frac{y}{4}+\frac{5}{32}y^2-\frac{13}{128}y^3\right)+\cdots\\
\Delta v_1' &= v_s\left(-\frac{y}{4}+\frac{5}{32}y^2+\frac{1}{16}xy-\frac{13}{128}y^3-\frac{11}{128}xy^2+\frac{1}{128}x^2y\right)+\cdots\\
\Delta v_2' &= v_s\left(-\frac{x}{4}+\frac{5}{32}x^2-\frac{13}{128}x^3\right)+\cdots
\end{aligned}\right\}\quad(3.3\text{-}8)$$

两种方式圆化轨道所需的总的速度增量分别是

从近地点开始 $\Delta v_c = |\Delta v_1| + |\Delta v_2|$
从远地点开始 $\Delta v_c' = |\Delta v_1'| + |\Delta v_2'|$ (3.3-9)

下面分三种情况来比较 Δv_c 与 $\Delta v_c'$ 的数值。

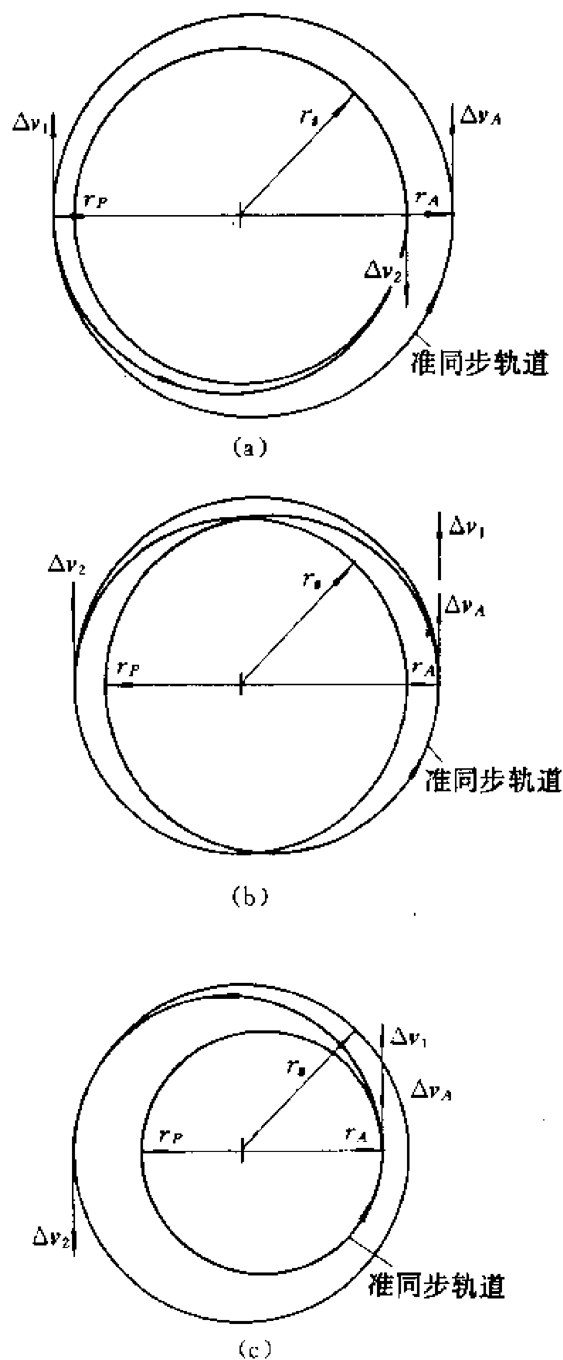


图 3.3-5

(1) 准同步轨道包围同步轨道，如图 3.3-5(a)所示，即

$$r_A > r_P > r_s$$

于是有 $x>0$，$y>0$，$x>y$. 射入方式应减速，各次速度增量为负值。式(3.3-9)两式之差为

$$\Delta v_c - \Delta v_c' = (-\Delta v_1 - \Delta v_2) - (-\Delta v_1' - \Delta v_2') = \frac{3}{32}xy(x-y)v_s > 0$$

这说明从远地点开始圆化轨道将节省燃料。

(2) 准同步轨道被同步轨道包围，如图 3.3-5(c)所示，即

$$r_s > r_A > r_P$$

于是有 $x<0, y<0, |x|<|y|$，射入方式应加速，各次速度增量为正值，式(3.3-9)两式之差为

$$\Delta v_c - \Delta v_c' = (\Delta v_1 + \Delta v_2) - (\Delta v_1' + \Delta v_2') = \frac{3}{32}xy(y-x)v_s < 0$$

这说明从近地点开始圆化轨道将节省燃料。

(3) 准同步轨道与同步轨道相交，如图 3.3-5(b)所示，即

$$r_A > r_s > r_P$$

于是有 $x>0$，$y>0$，射入方式应在远地点加速，在近地点减速，同理，式(3.3-9)两式之差为

$$\Delta v_c - \Delta v_c' = (-\Delta v_1 + \Delta v_2) - (\Delta v_1' - \Delta v_2') = -\frac{1}{8}xyv_s > 0$$

因此，从远地点开始圆化轨道可节省燃料。

总之，将一个准同步轨道圆化成同步轨道需要两次拱点切向脉冲喷射。当远地点高于同步高度时，应从远地点开始变轨；当准同步轨道全部在同步轨道之内时，应从近地点开始变轨，这是最节省燃料的圆化轨道的方式。

如准同步轨道的偏差较小，可以忽略式(3.3-8)中的高阶项，则定点置入需要的脉冲速度增量的估算公式可以简化成

$$\begin{aligned}\Delta v_c = \Delta v_c' &= \frac{v_s}{4}(|x| + |y|) \\ &= \frac{v_s}{4}\left(\frac{|r_A - r_s|}{r_s} + \frac{|r_P - r_s|}{r_s}\right)\end{aligned} \tag{3.3-10}$$

综上所述，从驻留轨道开始，在标称情况下，只要三次脉冲变轨——近地点、远地点和定点喷射，就可将卫星送入静止轨道上的定点位置。当然，第二、三次脉冲作用的时刻要根据定点的要求正确地安排。由于近地点喷射误差，远地点喷射后，卫星进入准同步轨道，在一般情况下至少需要三次拱点切向脉冲。在圆化轨道时，还要控制卫星的漂移速度和方向，并正确地选择控制时拱点的经度位置。下面论述定点置入的两种控制模式。

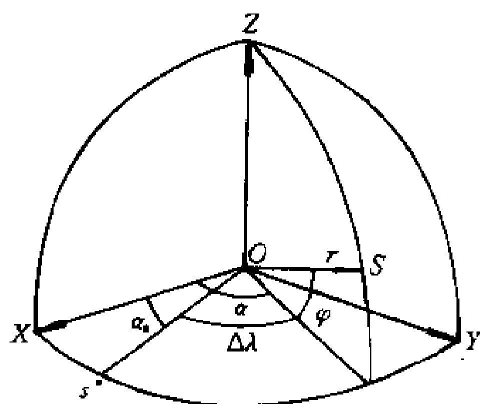


图 3.3-6

3.3.5 定点置入

1. 几何法

令在赤道惯性坐标系 $OXYZ$ 中，定点静止位置和卫星位置分别是 s^* 和 S，它们的赤经和赤纬是$(\alpha_s, 0)$和(α, φ)，见图 3.3-6。卫星位置的球坐标是(r, α, φ)，卫星运动方程式是

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{r}-r\dot{\alpha}^2\cos^2\varphi-r\dot{\varphi}^2=-\frac{\mu}{r^2}+a_r\\&r\ddot{\alpha}\cos\varphi+2\dot{r}\dot{\alpha}\cos\varphi-2r\dot{\alpha}\dot{\varphi}\sin\varphi=a_\alpha\\&r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}+r\dot{\alpha}^2\sin\varphi\cos\varphi=a_\varphi\end{aligned}\right\}\tag{3.3-11}$$

式中 a_r，a_α，a_φ分别是沿地心距方向和经、纬度方向的变轨喷射加速度。令卫星的地理经度与定点位置的经度之差为 $\Delta\lambda$，于是有

$$\alpha=\alpha_s+\Delta\lambda=\alpha_0+\omega_e t+\Delta\lambda\tag{3.3-12}$$

α_0 是 t_0 时刻定点位置 s^* 的赤经。再令卫星的地心距偏离同步半径 r_s 的相对偏差为

$$\Delta\rho=\frac{1}{r_s}(r-r_s)\tag{3.3-13}$$

对于近赤道的近圆轨道有下列小量：

$$\Delta\rho\ll1,\qquad\varphi=\Delta\varphi\ll1,\qquad\Delta\dot{\varphi}\ll1$$

将式(3.3-12)，(3.3-13)代入式(3.3-11)，应用上面的小量条件可得卫星运动方程的近似线性式：

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\ddot{\rho}-3\omega_e^2\Delta\rho-2\omega_e\Delta\dot{\lambda}=a_r\\&\Delta\ddot{\lambda}+2\omega_e\Delta\dot{\rho}=a_\lambda\\&\Delta\ddot{\varphi}+\omega_e^2\varphi=a_\varphi\end{aligned}\right\}\tag{3.3-14}$$

式中 $a_\lambda=a_\alpha$。用这些变量表示卫星速度沿地心距方向和经、纬度方向的分量：

$$v_r=\dot{r}=\frac{v_s}{\omega_e}\Delta\dot{\rho}$$

$$v_\alpha=r\dot{\alpha}=\frac{v_s}{\omega_e}(1+\Delta\rho)(\omega_e+\Delta\dot{\lambda})$$

$$v_\varphi=r\dot{\varphi}=\frac{v_s}{\omega_e}(1+\Delta\rho)\Delta\dot{\varphi}$$

再定义下列量纲为 1 的参数：

$$\left.\begin{aligned}&C=\frac{v_r-v_s}{v_s}=\frac{1}{\omega_e}\Delta\dot{\lambda}+\Delta\rho\\&B=\frac{v_r}{v_s}=\frac{1}{\omega_e}\Delta\dot{\rho}\\&A=\frac{v_\varphi}{v_s}=\frac{1}{\omega_e}\Delta\dot{\varphi}\end{aligned}\right\}\tag{3.3-15}$$

参数 B 和 A 分别代表卫星速度在轨道平面内的飞行角和相对于赤道平面的倾角。卫星在赤道平面上投影的运动可用 $\Delta\lambda,\Delta\rho,C,B$ 四个参数表示。另两个参数 $\Delta\varphi$ 和 A 表示卫星在赤道平面垂直方向上的运动。将自变量 t 改成地球转角 $\tau=\omega_e t$，卫星运动方程式(3.3-14)可化成六个一阶量纲为 1 的方程式：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}(\Delta\lambda)}{\mathrm{d}\tau} &= C - \Delta\rho \\
\frac{\mathrm{d}(\Delta\rho)}{\mathrm{d}\tau} &= B \\
\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\tau} &= -B + f_\lambda \\
\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\tau} &= \Delta\rho + 2C + f_r \\
\frac{\mathrm{d}(\Delta\varphi)}{\mathrm{d}\tau} &= A \\
\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\tau} &= -\Delta\varphi + f_\varphi
\end{aligned}\right\} \qquad (3.3\text{-}16)$$

式中 $f_i=\frac{a_i}{\omega_e^2}$，$(i=\lambda, r, \varphi)$。

无喷射变轨时，即 $f_i=0$ 时，用这些量纲为 1 的参数表示卫星自由运动的特性。方程组(3.3-16)的最后两个方程的解是

$$\Delta\varphi = i\sin(\tau-\tau_N)$$
$$A = i\cos(\tau-\tau_N)$$

式中

$$i=\sqrt{\Delta\varphi_0^2+A_0^2}=\sqrt{\Delta\varphi^2+A^2}$$
$$\tau_N=-\arctan\frac{\Delta\varphi_0}{A_0}$$

其中，$\Delta\varphi_0$，A_0 是卫星纬度和速度倾角的初值；i，τ_N，τ_N' 是卫星轨道的倾角以及升交点和降交点经度。在卫星运动一周内，卫星偏离赤道面的运动情况可用参数坐标图 3.3-7 表示。

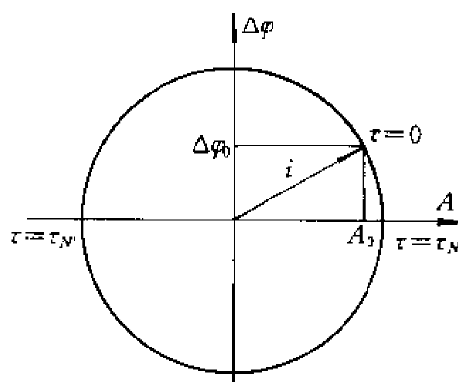


图 3.3-7

方程组(3.3-16)的前四个方程式的解，表示卫星在赤道面上投影的运动，即

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\lambda &= (\Delta\lambda_0-2B_0)-3(\Delta\rho_0+C_0)\tau+2B_0\cos\tau+2(\Delta\rho_0+2C_0)\sin\tau \\
\Delta\rho &= 2(\Delta\rho_0+C_0)+B_0\sin\tau-(\Delta\rho_0+2C_0)\cos\tau \\
C &= -(\Delta\rho_0+C_0)-B_0\sin\tau+(\Delta\rho_0+2C_0)\cos\tau \\
B &= B_0\cos\tau+(\Delta\rho_0+2C_0)\sin\tau
\end{aligned}\right\} \qquad (3.3\text{-}17)$$

$\Delta\lambda_0$，$\Delta\rho_0$，C_0，B_0 是初始状态时($\tau=0$)卫星的运动参数。引入下列新参数：

$$\left.\begin{aligned}
D &= \Delta\rho_0+C_0 \\
e &= \sqrt{(\Delta\rho_0+2C_0)^2+B_0^2} \\
\Delta\lambda_P &= \Delta\lambda_0-2B_0-3D_0\tau_P \\
\tau_P &= -\arctan\frac{B_0}{\Delta\rho_0+2C_0}
\end{aligned}\right\} \qquad (3.3\text{-}18)$$

卫星运动公式(3.3-17)又可化成更简便的形式：

$$\left.\begin{aligned}\Delta\lambda &= \Delta\lambda_P - 3D(\tau-\tau_P) + 2e\sin(\tau-\tau_P)\\ \Delta\rho &= 2D - e\cos(\tau-\tau_P)\\ C &= -D + e\cos(\tau-\tau_P)\\ B &= e\sin(\tau-\tau_P)\end{aligned}\right\} \tag{3.3-19}$$

上面第一、第二个公式表明卫星的经度和地心距的变化包含有周期性的成分，变化周期是轨道周期，经度变化的幅度是 $2e$，地心距变化的幅度是 e。参数 e 就是轨道的偏心率。当第二个公式中的 $\tau=\tau_P$ 和 $\tau=\tau_P+\pi$ 时，$\Delta\rho$ 取最小值和最大值，也就是卫星轨道的近地点和远地点偏离同步半径的相对值：

$$\Delta\rho_P = 2D - e$$
$$\Delta\rho_A = 2D + e$$

τ_P 和 $\tau_P+\pi$ 就是近地点和远地点位置的圆周角。将此两式相加，引用式(3.3-13)，得出半长轴的公式

$$a = r_s(1+2D)$$

应用此公式可计算在轨道一周内卫星相对于某一基准点漂过的角度：

$$\Delta\lambda = \left(\frac{T_s - T}{T_s}\right)2\pi = \left(1 - \left(\frac{a}{r_s}\right)^{\frac{3}{2}}\right)2\pi$$
$$= (1-(1+2D)^{\frac{3}{2}})2\pi \approx -6\pi D$$

所以可称参数 D 为漂移率。当 $D<0$ 时，$\Delta\lambda>0$，卫星向东漂；当 $D>0$ 时，$\Delta\lambda<0$，卫星向西漂。再将式(3.3-19)中前两个公式合并成

$$\left(\frac{1}{2}\Delta\lambda - \Delta\lambda_0\right)^2 + (\Delta\rho - \Delta\rho_0)^2 = e^2 \tag{3.3-20}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\Delta\lambda_0 &= \frac{1}{2}\Delta\lambda_P - \frac{3}{2}D(\tau-\tau_P)\\ \Delta\rho_0 &= 2D\end{aligned}\right\} \tag{3.3-21}$$

因此，可以在坐标 $\left(\frac{1}{2}\Delta\lambda,\ \Delta\rho\right)$ 平面上用相图表示卫星的运动。在轨道一周内，卫星的运动参数在坐标平面上形成一个圆，见图3.3-8。在某一时刻 τ，卫星的状态处在 s 点，箭头方向表示与卫星运行方向对应的运动参数变化的方向；圆的最高点 $\Delta\rho_A$、最低点 $\Delta\rho_P$ 对应远地点和近地点；此圆的半径等于偏心率 e，圆心在 $(\Delta\lambda_0,\ \Delta\rho_0)$ 处。公式(3.3-21)表明 $\Delta\rho_0$ 是常值，$\Delta\lambda_0$ 中包含自变量 τ，因此卫星运动参数的变化是圆周运动和圆心平移运动两部分的叠加，前者代表经度振荡，后者代表平均漂移运动。如果参数圆在 $\frac{1}{2}\Delta\lambda$ 轴之上，则相当于准同步轨道在同步轨道之外，卫星向西漂(圆心

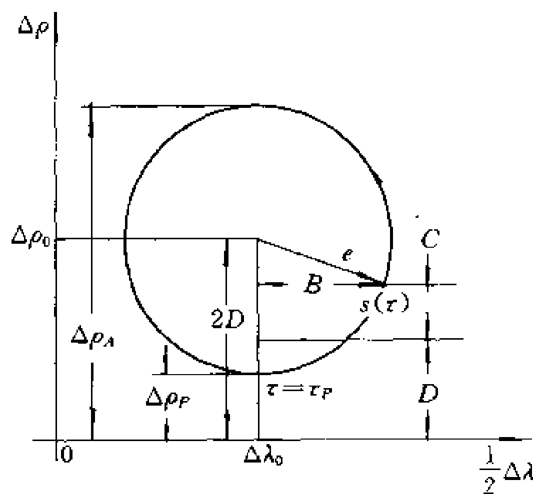


图　3.3-8

向左移)；反之，准同步轨道在同步轨道之内，卫星向东漂(圆心向右移)。参数圆与$\frac{1}{2}\Delta\lambda$轴相交时，准同步轨道与同步轨道相交，漂移方向决定于圆心的上、下位置。圆心在上，向西漂；圆心在下，向东漂。在此相图上参数B是圆周上某一点到通过圆心的垂线的距离，向右为正，向左为负。参数C是该点到直线$\Delta\rho=D$的距离，向上为正，向下为负。当卫星处在远地点与近地点之间的中间位置$\left(\tau=\tau_P\pm\frac{\pi}{2}\right)$时，$|B|$达最大值，等于$e$。当卫星处在近地点或远地点($\tau=\tau_P$，$\tau=\tau_P\pm\pi$)时，$|B|=0$，$|\Delta\rho+2C|$达最大值，等于$e$。在圆上的任一点有

$$\left.\begin{aligned}\Delta\rho+2C&=e\cos(\tau-\tau_P)\\B&=e\sin(\tau-\tau_P)\end{aligned}\right\}\qquad(3.3\text{-}22)$$

定点置入的要求是将参数圆的圆心移到$\left(\frac{1}{2}\Delta\lambda,\ \Delta\rho\right)$坐标平面的原点，并将此圆压缩成一点，使$\Delta\lambda=\Delta\rho=D=e=0$。根据以上的基本规律，可以很方便地导出脉冲喷射使这些运动参数圆发生的变化，从而较直观地说明定点置入的过程。从式(3.3-15)可以看出，径向和切向脉冲速度增量Δv_r，Δv_t分别使参数B和C变化ΔB，ΔC，但并不改变脉冲作用时刻运动参数$\frac{1}{2}\Delta\lambda$和$\Delta\rho$的数值。脉冲喷射后，运动参数将从该点出发，沿一个新参数圆变化。根据式(3.3-18)，(3.3-12)，径向控制不能改变漂移率，只能使参数圆的圆心沿$\frac{1}{2}\Delta\lambda$坐标方向左、右平移ΔB，并使圆半径(偏心率)变化一个增量$\Delta e=\frac{B}{e}\Delta B$，见图3.3-9(a)。径向控制的最有效作用点在近、远地点中间($B=e$)，使偏心率的增量最大，等于ΔB。同样可以说明切向控制使参数圆的圆心上、下移动$2\Delta C$，漂移率变化ΔC，圆半径(偏心率)的增量为$\Delta e=\frac{2\Delta C}{e}(\Delta\rho+2C)$，见图3.3-9(b)。

近、远地点是切向控制的最有效作用点，在该点上有

$$|\Delta\rho+2C|=e$$

此处偏心率的增量为最大，等于$2\Delta C$，因此切向控制的效率是径向控制的两倍。下面着重说明采用切向控制时的一些规律。ΔC可直接作为切向控制的控制量，用下标“0”表示控制时刻的运动参数，下标“1”表示第一次的控制量以及控制后的运动参数，以此类推。将式(3.3-22)代入式(3.3-18)中的第二个式，并根据其中的第一个式及式(3.3-19)中第一个式，可导出消除漂移率、偏心率和位置误差的一次性控制方程：

$$\left.\begin{aligned}D_1&=D_0+\Delta C_1\\e_1^2&=e_0^2+4\,e_0\Delta C_1\cos(\tau-\tau_P)+4\Delta C_1^2\\\Delta\lambda_1(\tau)&=\Delta\lambda_P-3D_1(\tau-\tau_P)+2e_1\sin(\tau-\tau_P)\quad\tau\geqslant\tau_0\end{aligned}\right\}\qquad(3.3\text{-}23)$$

显然，需要三个控制脉冲ΔC_1，ΔC_2，ΔC_3才能使三次控制后三个独立参数D_3，e_3，$\Delta\lambda_3$同时为零。

在3.1.3节中已指出双脉冲拱点切向控制可以使卫星静止，即$D=e=0$，参看图3.3-10。初始参数圆M_0位于坐标轴$\frac{1}{2}\Delta\lambda$之上，如第一个切向脉冲作用在远地点$\tau_0=\tau_P+\pi$，第二个脉冲作用在新参数圆的近地点$\tau_1=\tau_P+2\pi$，那么可以从控制方程

$$D_2=D_1+\Delta C_2=D_0+\Delta C_1+\Delta C_2=0$$

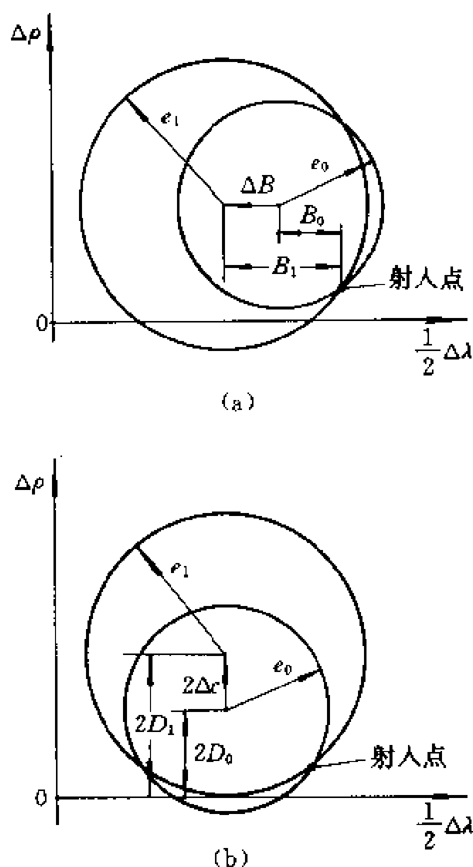


图 3.3-9

$$e_2 = e_1 + 2\Delta C_2 = (e_0 - 2\Delta C_1) + 2\Delta C_2 = 0$$

中解出 ΔC_1，ΔC_2：

$$\Delta C_1 = -\frac{1}{4}(2D_0 - e_0), \qquad \Delta C_2 = -\frac{1}{4}(2D_0 + e_0)$$

如控制程序相反，第一个脉冲作用在初始参数圆的近地点 τ_P，第二个脉冲仍作用在新参数圆的近地点 $\tau_P+2\pi$，则有

$$D_2 = D_1 + \Delta C_2 = D_0 + \Delta C_1 + \Delta C_2 = 0$$

$$e_2 = e_1 - 2\Delta C_2 = e_0 + 2\Delta C_1 - 2\Delta C_2 = 0$$

从上式中得出两次控制量是

$$\Delta C_1 = -\frac{1}{4}(2D_0 + e_0), \qquad \Delta C_2 = -\frac{1}{4}(2D_0 - e_0)$$

两种控制方式所需的总速度增量相同，

$$\Delta C = |\Delta C_1| + |\Delta C_2| = D_0$$

这是因为略去了高阶项，此数值是定点置入所需速度增量的最低限。在图 3.3-10 上画出了参数圆的变化过程，第一个切向脉冲控制后，参数坐标从圆 M_0 上的远地点出发(图 3.3-10(a))，或从近地点出发(图 3.3-10(b))，沿圆 M_1 移动，此圆与$\frac{1}{2}\Delta\lambda$轴相切，同时 M_1 的圆心在平移。当圆 M_1 漂到 M_1' 的位置时，运动参数坐标点转到与$\frac{1}{2}\Delta\lambda$轴相切的 s 点，这时施加第二个切向

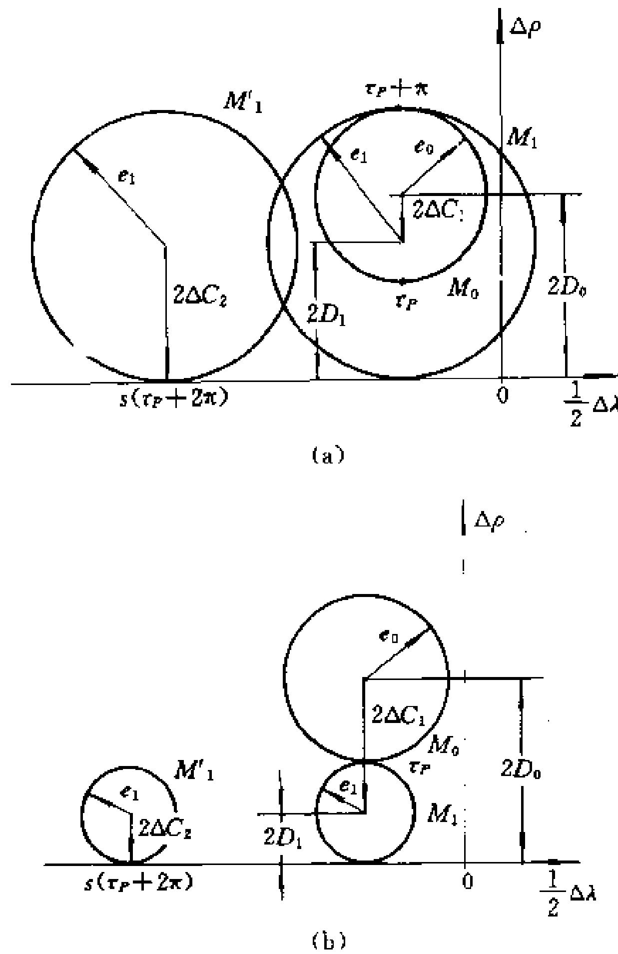


图 3.3-10

控制，使参数圆退化成为一点，卫星将静止在 s 点(非定点位置)。初始参数圆 M_0 位于$\frac{1}{2}\Delta\lambda$ 轴之上，漂移率为负($D_0>0$)，并且 $2D_0-e_0>0$。因此，两次切向控制的速度增量都为负值，这与准同步轨道位于同步轨道之外的情况是符合的。对于处在任意初始位置的参数圆，不难证明，将卫星静止所需的速度增量是

$$\Delta C=\begin{cases}|D_0|,\ \text{如}\ M_0\ \text{与横轴不相交}\ |2D_0|>e_0\\ \left|\frac{e_0}{2}\right|,\ \text{如}\ M_0\ \text{与横轴相交}\ |2D_0|<e_0\end{cases}\tag{3.3-24}$$

仍以上述初始参数圆为例，说明定点置入的控制方式，见图 3.3-11，首先建立正确的漂移方向，在圆 M_0 的近地点 $\tau=\tau_P$ 处，施加第一个脉冲 $\Delta C_1<0$，使参数圆 M_1 的圆心坐标为负，应有

$$\left.\begin{aligned}2D_1&=2D_0+2\Delta C_1<0\\ e_1&=-(e_0+2\Delta C_1)>0\end{aligned}\right\}\tag{3.3-25}$$

当卫星运动参数点绕行半圈到达圆 M_1 的近地点处 $\tau=\tau_P+\pi$，第二个脉冲 ΔC_2 使参数圆 M_2 的远地点与横轴相切，应有

$$\left.\begin{aligned}2D_2&=-e_1=2D_1+2\Delta C_2\\ e_2&=e_1+2\Delta C_2\end{aligned}\right\}\tag{3.3-26}$$

圆 M_2 以正比于$(-D_2)$的速度向坐标原点平移，要求当圆 M_2 的圆心漂到纵轴 $\Delta\rho$ 上时，卫星恰好处在圆 M_2 的远地点上，这时第三个脉冲作用 $\Delta C_3>0$ 使参数圆退化成坐标原点，卫星将静止在定点位置上，第三个脉冲量应是

$$\Delta C_3 = -D_2 = -D_0 - \Delta C_1 - \Delta C_2 \tag{3.3-27}$$

根据式(3.3-19)中的第一式，漂移率 D_1，D_2 应满足等式

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda_P - 3\pi D_1 - 3(n-1)\pi D_2 = 0 \tag{3.3-28}$$

式中，$\Delta\lambda_P$ 是第一个脉冲作用时圆 M_0 的初始条件；整系数 n 表示在第一个脉冲作用后经过 $\frac{n}{2}$ 圈卫星恰好到达给定的位置，显然最快进入定点位置的时间间隔为一圈，即 $n\geqslant2$。在第一个脉冲作用前，根据圆 M_0 的初始条件，应同时求得这三次脉冲的控制量，并表示成运动参数的初始条件及进入预定静止位置时刻的函数。

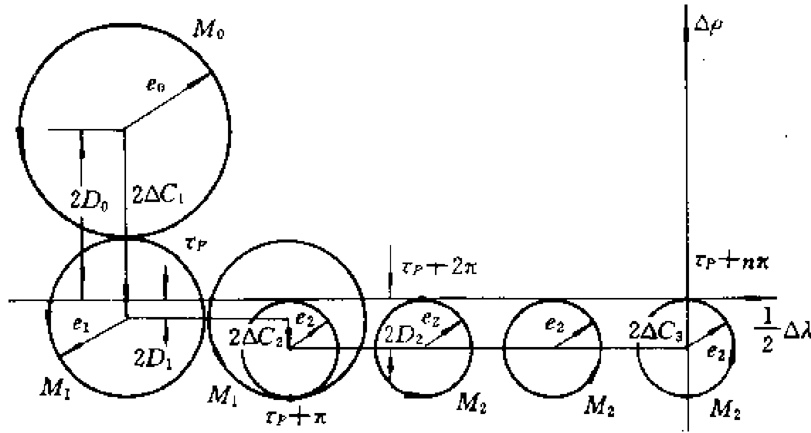


图　3.3-11

从式(3.3-25)～式(3.3-28)可得

$$\left.\begin{aligned}\Delta C_1 &= \frac{\Delta\lambda_P}{3n\pi} - \frac{n+1}{2n}D_0 - \frac{n-1}{4n}e_0\\ \Delta C_2 &= -\frac{1}{4}(2D_0 - e_0)\\ \Delta C_3 &= -\frac{\Delta\lambda_P}{3n\pi} + \frac{1}{2n}D_0 - \frac{1}{4n}e_0\end{aligned}\right\} \tag{3.3-29}$$

如允许卫星缓慢地漂向预定位置，即 $n=\infty$，则

$$|\Delta C_1| + |\Delta C_2| = D_0$$

与公式(3.3-24)相符；如要求以最快速度完成定点，令 $n=2$，则所需速度增量为 $|\Delta C_1|+|\Delta C_2|+|\Delta C_3|=D_0+2\Delta C_3$。

由上述定点置入的基本规律可知，每次切向或径向控制的效果可以认为是卫星运动参数式(3.3-17)中初始条件 C_0，B_0 的跃变，而卫星将沿新的初始条件决定的轨迹运动。根据式(3.3-17)可将定点置入的控制方式写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\Delta\lambda(\tau)\\\Delta\rho(\tau)\\C(\tau)\\B(\tau)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3(\tau-\tau_i)+2\sin(\tau-\tau_i) & -3(\tau-\tau_i)+4\sin(\tau-\tau_i) & -2+2\cos(\tau-\tau_i)\\0 & 2-\cos(\tau-\tau_i) & 2-2\cos(\tau-\tau_i) & \sin(\tau-\tau_i)\\0 & -1+\cos(\tau-\tau_i) & -1+2\cos(\tau-\tau_i) & -\sin(\tau-\tau_i)\\0 & \sin(\tau-\tau_i) & 2\sin(\tau-\tau_i) & \cos(\tau-\tau_i)\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\Delta\lambda(\tau_i)\\\Delta\rho(\tau_i)\\C(\tau_i)+\Delta C_i\\B(\tau_i)+\Delta B_i\end{bmatrix}\tag{3.3-30}$$

下标“i”表示第 i 次控制，控制量是 ΔC_i，ΔB_i，控制时刻由自变量——卫星在轨道上的圆周角 τ 表示。在设计控制程序时主要注意从第 i 次控制后到第 $i+1$ 次控制时卫星运动参数的状态，定点置入的过程相当于这些状态的一系列转换，如令状态和控制量为

$$\boldsymbol{x}=[\Delta\lambda\quad\Delta\rho\quad C\quad B]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{u}=[0\quad 0\quad \Delta C\quad \Delta B]^{\mathrm{T}}$$

控制方程(3.3-20)可以简写为

$$\boldsymbol{x}(\tau_{i+1})=\boldsymbol{G}(\tau_{i+1}-\tau_i)[\boldsymbol{x}(\tau_i)+\boldsymbol{u}_i],\qquad i=1,2,3,\cdots\tag{3.3-31}$$

$\boldsymbol{G}$ 为状态转移矩阵，即式(3.3-30)中的转移矩阵。如最后一次脉冲控制时的位置处在 τ_m 处，定点置入要求最终目标状态恒等于零，即

$$\boldsymbol{x}(\tau-\tau_m)=G(\tau-\tau_m)[\boldsymbol{x}(\tau_m)+\boldsymbol{u}_m]\equiv 0,\qquad \tau\geqslant\tau_m\tag{3.3-32}$$

也就是应有 $\boldsymbol{x}(\tau_m)+\boldsymbol{u}_m=0$。

以三脉冲为例，如远地点喷射后卫星的状态为 τ_0，$\boldsymbol{x}(\tau_0)$，令 $i=1,2,3$，将式(3.3-31)代入式(3.3-32)，得

$$\boldsymbol{G}(\Delta\tau_3)\boldsymbol{G}(\Delta\tau_2)\boldsymbol{G}(\Delta\tau_1)\boldsymbol{x}(\tau_0)+\boldsymbol{G}(\Delta\tau_3)\boldsymbol{G}(\Delta\tau_2)\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{G}(\Delta\tau_3)\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3=0\tag{3.3-33}$$

式中 $\Delta\tau_i$ 是第 i 次控制与前一次控制之间的圆周角间隔。定点置入的最优控制问题是根据 τ_0，$\boldsymbol{x}(\tau_0)$选择 $\Delta\tau_1$，$\Delta\tau_2$，$\Delta\tau_3$ 和控制量 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ 以满足式(3.3-33)，并使 $\Sigma[|\Delta C_i|+|\Delta B_i|]$ 为最小。

如果选择轨道的拱点为起始点 τ_0，那么采用切向控制，并令

$$\Delta\tau_1=0,\qquad \Delta\tau_2=\Delta\tau_3=\pi$$

(快速定点置入)，从式(3.3-33)中解出的 ΔC_1，ΔC_2，ΔC_3 与式(3.3-29)是一致的。

2. 代数法

另一种定点置入控制程序的设计是直接求解会合方程。远地点射入后的第一个远地点可作为会合的起始点，要求经过若干次轨道机动后使卫星进入预定的静止位置，并且漂移率为零。原则上有两个会合方程，一个是经度方程，另一个是纬度方程。但待选的控制参数较多，如控制次数、每次控制的时刻和速度增量等，并且要用迭代法求解。如每次切向脉冲控制的作用点安排在会合轨道的拱线上，脉冲方向与拱点速度同向或反向，则这种共面控制模式的会合方程可以写成

$$\lambda_s=\lambda_0+\sum_{i=0}^{N-1}D_i\tau_i\tag{3.3-34}$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta r_{A0}+\sum_{i=1}^{N}(\Delta r_{Ai}-\Delta r_{Ai-1})=0\\\Delta r_{P0}+\sum_{i=1}^{N}(\Delta r_{Pi}-\Delta r_{Pi-1})=0\end{aligned}\right\}\tag{3.3-35}$$

式中， λ_s——预定静止位置的经度；

λ_0——初始远地点的经度；

N——控制次数；

τ_0——从初始时刻到第一次控制的时刻；

τ_i——在第 i 与 $i+1$ 次控制之间的时间；

D_0——初始位置的漂移率；

D_i——在第 i 次控制后的漂移率，它等于在任一时刻远地点经度与前一圈远地点经度之差除以轨道周期；

Δr_{A0}，Δr_{P0}——初始远地点、近地点偏离同步半径的偏差；

Δr_{Ai}，Δr_{Pi}——第 i 次控制后，远地点、近地点偏离同步半径的偏差。

上式中，Δr 的第一下标 A、P 表示远地点、近地点，第二下标 i 表示控制的序数。

式(3.3-34)表明卫星从初始远地点起，经过若干次机动和漂移后在第 N 次控制时刻到达定点位置。式(3.3-35)表明经过 N 次控制后，轨道的远地点、近地点偏差为零，$\Delta r_{AN}=\Delta r_{PN}=0$，意味着控制终了的位置漂移率为零，$D_N=0$。在会合方程中速度控制量隐含在拱点距离偏差 Δr_{Pi}，Δr_{Ai}内，因此，可用拱点距离的修正量($\Delta r_{Ai}-\Delta r_{Ai-1}$)或($\Delta r_{Pi}-\Delta r_{Pi-1}$)代表速度控制量 Δv_i。

引入下列符号和参数：

$$\alpha_i=\begin{cases}1, & \text{当第 } i \text{ 次控制作用在近地点时，有} \\ & \quad \Delta r_{Ai}\neq\Delta r_{Ai-1},\ \Delta r_{Pi}=\Delta r_{Pi-1} \\ 0, & \text{反之}\end{cases}$$

$$\beta_i=\begin{cases}1, & \text{当第 } i \text{ 次控制作用在远地点时，有} \\ & \quad \Delta r_{Ai}=\Delta r_{Ai-1},\ \Delta r_{Pi}\neq\Delta r_{Pi-1} \\ 0, & \text{反之}\end{cases}$$

$$\delta R_i=(\Delta r_{Ai}-\Delta r_{Ai-1})+(\Delta r_{Pi}-\Delta r_{Pi-1})$$

$g_i=(D_i-D_{i-1})\dfrac{1}{\delta R_i}$，单位拱点距离修正量引起位置漂移率的变化量；

T_i—— 第 i 次控制后的轨道周期，T_0 是初始轨道周期；

Q_i—— 在第 i 次与第 $i+1$ 控制之间，卫星运行的圈数。

由于在拱点有控制作用，$2Q_i$ 是整数。Q_0 是从初始时刻到第 1 次控制之间卫星转过的圈数，$\tau_i=Q_iT_i$。

利用这些符号和参数，可将会合方程(3.3-34)，(3.3-35)化成

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_s-\lambda_0-D_0\sum_{i=0}^{N-1}Q_iT_i=\sum_{i=1}^{N-1}\Big(g_i\sum_{i=1}^{N-1}Q_iT_i\Big)\delta R_i\\&\Delta r_{A0}=\sum_{i=1}^{N}(-\alpha_i)\delta R_i\\&\Delta r_{P0}=\sum_{i=1}^{N}(-\beta_i)\delta R_i\end{aligned}\right\}\qquad(3.3\text{-}36)$$

最佳定点置入的设计就是从此会合方程中求得定点置入的控制程序 $Q_i(i=0,1,\cdots,N-1)$和修正量 $\delta R_i(i=1,2,\cdots,N)$，并要求各次修正量的绝对值之总和为最小。从方程组(3.3-36)只

能解出三个修正量 δR_i，其余 $(N-3)$ 个修正量应是确定的。α_i，β_i 直接由控制程序 Q_i 决定，后者是根据最优指标待选的。式(3.3-36)中轨道周期 T_i 和漂移率变化量 g_i 在修正量 δR_i 确定前是未知的，要用迭代法求解此会合方程(3.3-36)。在选定某一个控制程序 Q_i 后，第一步迭代时可用同步轨道的参数：$g_i=-0.0064\ (°)/\mathrm{d}\cdot\mathrm{km}^{-1}$，$T_i=1$ 恒星日 $(i=1,2,\cdots,N-1)$，将它们代入方程组(3.3-36)，再根据解出的修正量 δR_i，计算第二步迭代时所需的参数 g_i，T_i。迭代过程一直进行到

$$\sum_{i=1}^{N}|\delta R_i-\delta R_i'|<\epsilon$$

$\delta R_i'$ 是前一次迭代得出的修正量。一般修正次数 $N\leqslant 5$，因此，经过若干次程序选择后不难求得最优控制程序 Q_i^*[31]。

例 已知初始准同步轨道的参数 $\lambda_0=0°$，$\Delta r_{A0}=800\ \mathrm{km}$，$\Delta r_{P0}=-2\ 000\ \mathrm{km}$，定点位置 $\lambda_s=30°\mathrm{E}$，预定控制次数 $N=5$，其中首次和末次控制的控制量是给定的，数值较小。首次控制起标定喷气推力的作用，末次控制起精控作用，两次控制分别使轨道拱线变化 $\delta R_1=-200\ \mathrm{km}$，$\delta R_5=100\ \mathrm{km}$。表 3.3-1 列出由迭代运算得到的最佳控制程序和各次控制量，图 3.3-12 表示卫星进入定点位置前的机动和漂移过程。

表 3.3-1

N	0	1	2	3	4	5
Q	1.5	1.5	1.5	1.5	1.0	
$\Delta v_A/(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})$			27.4		8.3	1.9
$\Delta v_P/(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})$		−3.8		−10.9		

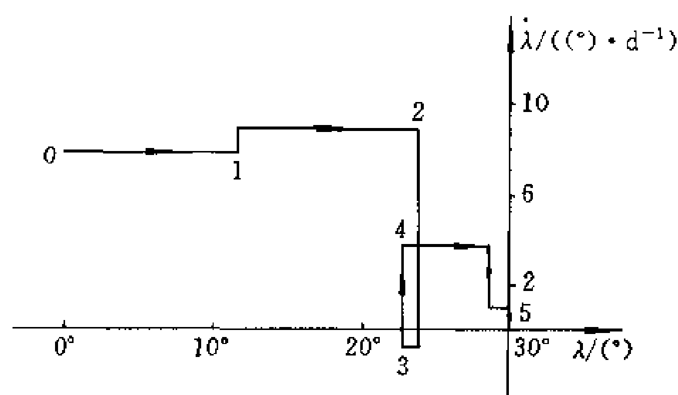


图 3.3-12

3.4 静止卫星的入轨最优化

第 3.3 节叙述了静止卫星的标称入轨过程，包含近地点射入、远地点射入及定点置入三个阶段。卫星的有效载荷量与三次喷射耗费的燃料密切有关，近地点、远地点喷射的误差又将额外耗费星上辅助喷气系统中的燃料。静止卫星入轨最优化设计的目的是如何减少燃料耗费量使卫星的有效载荷最大。最优化设计包含三个内容：选择何种过渡轨道以及标称远地点喷射速度值；对于实际过渡轨道选择最佳远地点喷射参数（冲量、方向、时刻）；远地点喷射后选择最佳的定点置入程序[32~34]。第一个问题是针对近地点、远地点喷射冲量的可能偏差提出的，是统计性问题；后两个问题也具有统计性质，但可按确定性问题处理。

3.4.1 射入误差的影响

近地点喷射的误差使过渡轨道的远地点位置、高度、速度和轨道倾角都不符合标称值；远地点喷射的误差使卫星不能进入预定的漂移轨道，所有这些误差都由星上辅助喷气系统提供额外的速度增量进行校正，需要的速度增量越大，耗费的燃料越多。这里作一些简化的误差分析，以说明各次脉冲喷射误差所引起的星上燃料的损失。建立一个升交点坐标系 $Ox_Ay_Az_A$，原点在地心，x_A 轴指向过渡轨道的升交点 N，y_A 轴在赤道面上且垂直于 x_A 轴，z_A 轴指向北极，见图 3.4-1(a)。假定过渡轨道的远地点与升交点重合，远地点喷射时的各项参数是

$$\left.\begin{aligned}&r_{AT}=r_s^*+\delta r_{AT}, && v_{AT}=v_{AT}^*+\delta v_{AT}\\&\Delta v_A=\Delta v_A^*+\delta(\Delta v_A), && i_T=i_T^*+\delta i_T\\&\beta_A=\beta_A^*+\delta\beta_A, && \sigma_A=\sigma_A^*+\delta\sigma_A\end{aligned}\right\}\tag{3.4-1}$$

式中，下标 T 表示过渡轨道；上标 * 表示标称值；$\delta()$ 表示误差；β_A 是远地点喷射脉冲 Δv_A 与

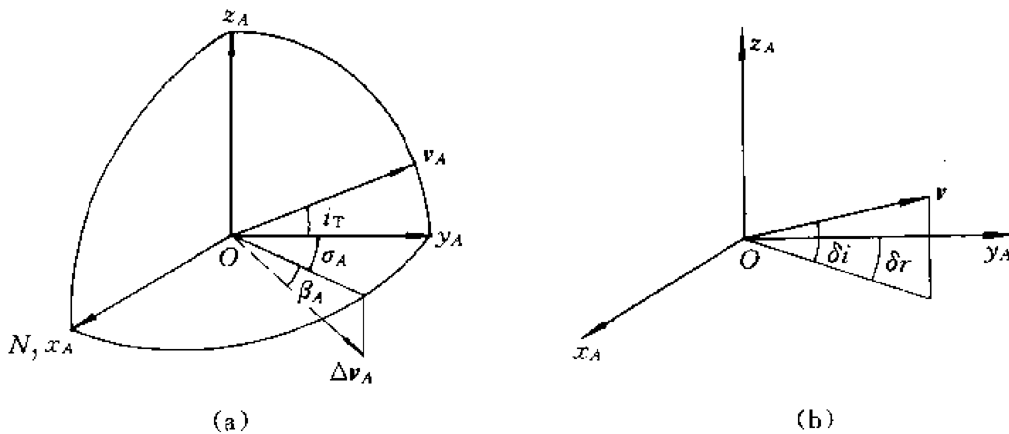


图 3.4-1

赤道平面的夹角（即赤纬）；σ_A 是 Δv_A 在赤道面上的分量与水平面的夹角；Δv_A 的赤经为

$$\Omega+\frac{\pi}{2}-\sigma_A$$

这些标称值之间的关系是

$$
\left.\begin{aligned}
&\Delta v_A^{*2} = v_{AT}^{*2} + v_s^{*2} - 2v_{AT}^* v_s \cos i_T^* \\
&\Delta v_A^* \sin\beta_A^* + v_{AT}^* \sin i_T^* = 0 \\
&\sigma_A^* = 0
\end{aligned}\right\} \tag{3.4-2}
$$

在图 3.4-1 升交点坐标系中,有

$$
\boldsymbol{v}_{AT} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{AT}\cos i_T \\ v_{AT}\sin i_T \end{bmatrix}, \qquad \Delta\boldsymbol{v}_A = \begin{bmatrix} \Delta v_A \cos\beta_A \sin\sigma_A \\ \Delta v_A \cos\beta_A \cos\sigma_A \\ \Delta v_A \sin\beta_A \end{bmatrix}
$$

远地点喷射后卫星的速度是 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{AT}+\Delta\boldsymbol{v}_A$,利用上式可求得此速度值为

$$
v^2 = v_{AT}^2 + \Delta v_A^2 + 2v_{AT}\Delta v_A(\cos\sigma_A\cos\beta_A\cos i_T + \sin\beta_A\sin i_T) \tag{3.4-3}
$$

它在升交点坐标系中的分量是

$$
\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v\cos\delta i\sin\delta\gamma \\ v\cos\delta i\cos\delta\gamma \\ v\sin\delta i \end{bmatrix}
$$

$\delta\gamma$ 是速度 $\boldsymbol{v}$ 在赤道面上的分量与水平面的夹角;δi 是 $\boldsymbol{v}$ 与赤道面的夹角,即远地点变轨后准同步轨道的倾角,见图 3.4-1(b)。它们与远地点喷射参数之间的关系是

$$
\left.\begin{aligned}
&v\cos\delta i\sin\delta\gamma = \Delta v_A\cos\beta_A\sin\sigma_A \\
&v\sin\delta i = v_{AT}\sin i_T + \Delta v_A\sin\beta_A
\end{aligned}\right\} \tag{3.4-4}
$$

将式(3.4-1)代入式(3.4-3),(3.4-4)中,可得远地点喷射后卫星进入准同步轨道的射入参数(略去二阶小量):

$$
\left.\begin{aligned}
r &= r_s^* + \delta r_{AT} \\
v &= v_s^* + \frac{1}{v_s^*}[(v_{AT}^* + \Delta v_A^*\cos(-\beta_A^* + i_T^*))\delta v_{AT} \\
&\quad + (\Delta v_A^* + v_{AT}^*\cos(-\beta_A^* + i_T^*))\delta(\Delta v_A) \\
&\quad - v_{AT}^*\Delta v_A^*\sin(-\beta_A^* + i_T^*)(-\delta\beta_A - \delta i_T)] \\
\delta\gamma &= \frac{1}{v_s^*}\Delta v_A^*\cos\beta_A^*\delta\sigma_A \\
\delta i &= \frac{1}{v_s^*}(\sin i_T^*\delta v_{AT} + \sin\beta_A^*\delta(\Delta v_A) + v_{AT}^*\cos i_T^*\delta i_T + \Delta v_A^*\cos\beta_A^*\delta\beta_A)
\end{aligned}\right\} \tag{3.4-5}
$$

由此可以得到准同步轨道的近地点、远地点和偏心率的误差与这些射入参数之间的关系(图 3.4-2),将该式对射入参数取偏微分,并注意到偏心率 e 也是 r, v, γ 的函数,此偏微分取在 $r=r_s^*$, $v=v_s^*$, $\gamma=0$ 处,略去(*)号,有一阶近似式:

$$
\left.\begin{aligned}
&\delta r_A = r_A - r_s = 3\delta r + \frac{4r_s}{v_s}\delta v + r_s\delta\gamma \\
&\delta r_P = r_P - r_s = \delta r - r_s\delta\gamma
\end{aligned}\right\} \tag{3.4-6}
$$

δr 是射入点半径的误差。如 $\delta r>0$,则 r_A, r_P 代表远地点和近地点半径;反之,代表近地点和远地点半径。

根据近似式(3.3-10),将准同步轨道变成赤道同步圆轨道需补充的速度增量为

$$
\Delta v_c = \frac{v_s}{4r_s}(|\delta r_A| + |\delta r_P|) + v_s|\delta i| \tag{3.4-7}
$$

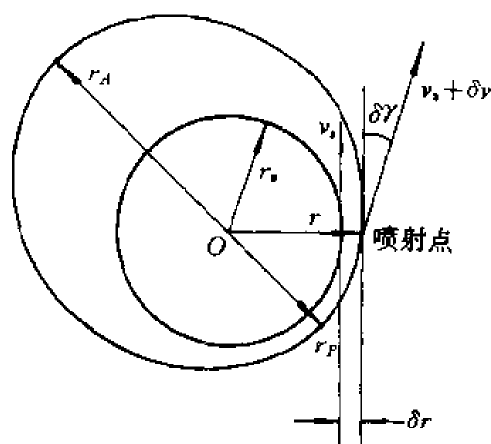


图 3.4-2

下面举例说明这些射入误差引起的速度损失量。令标称参数为 $r_{AT}^*=42\ 164.18$ km，$v_{AT}^*=1.597$ km/s，$i_T^*=28°$，$\Delta v_A^*=1.826$ km/s，$\beta_A^*=-24.25°$，$\sigma_A^*=0$，代入式(3.4-5)，得射入误差

$$\left.\begin{aligned}\delta r &= \delta r_{AT}\\ \delta v &= 0.88\delta v_{AT}+0.91\delta(\Delta v_A)-0.75(-\delta\beta_A+\delta i_T)\\ \delta\gamma &= 0.54\delta\sigma_A\\ \delta i &= 0.15\delta v_{AT}-0.13\delta(\Delta v_A)+0.54\delta\beta_A+0.46\delta i_T\end{aligned}\right\}\qquad(3.4\text{-}8)$$

假定驻留轨道的高度不变，近地点射入误差引起过渡轨道的偏差为 δr_{AT}，δi_T，远地点速度偏差 δv_A 与 δv_{AT} 有关。上式各项射入误差单独引起的速度补偿量的累计量属于最大耗费燃料的情况，根据式(3.3-6)，(3.3-7)，(3.3-8)，有

$$(\Delta v_c)_{\max}=0.058\ 4|\delta r_{AT}|+1.32|\delta(\delta v_A)|+37.7|\delta i_T|+42.23|\delta\beta_A|+14.48|\delta\sigma_A|$$

式中，速度单位为 m/s；距离单位为 km；角度单位为(°)。

3.4.2 远地点射入的最优偏置

为了减少近地点、远地点射入偏差引起的定点置入所需的燃料，可选择与标称入轨方式不同的过渡轨道和远地点喷射速度增量，即将过渡轨道远地点高度和远地点喷射速度增量偏置适当的数值 Δh，Δv。先说明定点置入速度量 Δv_c 与这些偏置值的关系，然后再作统计性分析。在偏置情况下，仍要求远地点射入能消除过渡轨道的倾角 i_T。远地点喷射后准同步轨道拱点半径的偏差是 δr，见图 3.4-3。根据远地点射入的几何关系

$$\Delta v_A^2=v_{AT}^2+v_s^2-2v_{AT}v_s\cos i_T$$

以及有关的轨道公式，不难求出拱点偏差 δr 与偏置 Δh，Δv 的一阶近似关系式：

$$\delta r=a_1\Delta h+a_2\Delta v\qquad(3.4\text{-}9)$$

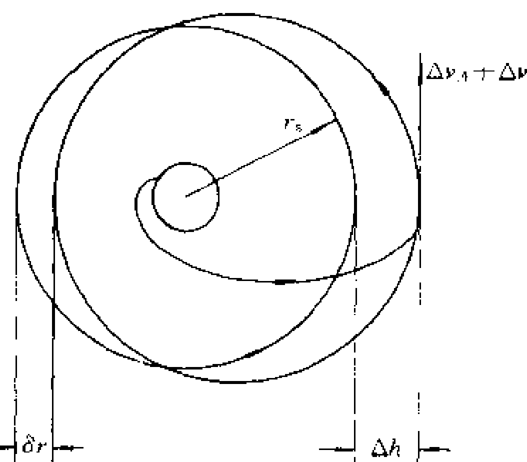


图 3.4-3

式中

$$a_1 = 3 - \frac{2v_{AT}(v_s\cos i_T - v_{AT})\ (r_{PT} + 2r_s)}{v_s(v_s - v_{AT}\cos i_T)(r_{PT} + r_s)}$$

$$a_2 = \frac{4\Delta v_A r_s}{v_s(v_s - v_{AT}\cos i_T)}$$

r_{PT}，r_{AT}，v_{AT}，Δv_A 是标称过渡轨道的参数。在此式中 Δh，Δv 也可看作是在近地点、远地点射入的实际误差。3.3 节已给出定点置入速度量的近似式(3.3-10)：

$$|\Delta v_c| = \frac{v_s}{4r_s}(|\Delta h| + |\delta r|) \tag{3.4-10}$$

假定标称入轨方式是远地点射入后将轨道圆化，使卫星进入静止轨道。在这种情况下利用式(3.4-9)和(3.4-10)可画出速度增量 $|\Delta v_c|$ 与偏置量 Δh，Δv 的关系图 3.4-4。从图中可以看出，如果远地点喷射速度增量的可能偏差是负值，应设计较高的过渡轨道远地点高度，或者说，如果过渡轨道远地点高度的可能偏差是正值，应适当减少远地点发动机冲量的设计值。

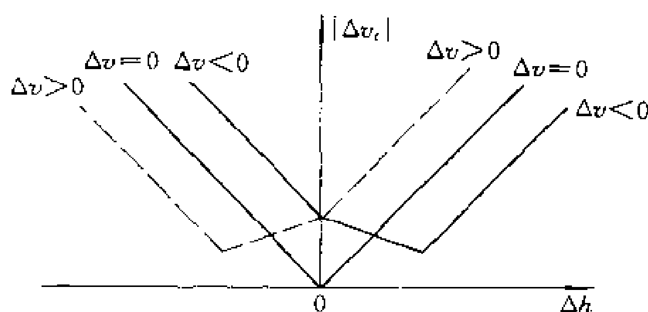


图 3.4-4

在运载能力是给定的情况下，提高过渡轨道远地点高度将减少卫星在过渡轨道上的总重，因此，设计非标称入轨方式时应统一考虑运载、远地点发动机以及星上辅助喷气系统中的燃料损失。文献[32]给出了燃料损失的统计最优分析。用 Δm_{1f}，Δm_{Af}，Δm_{cf} 表示这三种偏离标称值的燃料量，用 m_1，m_A，m_c 分别表示在过渡轨道、在远地点发动机点火后以及进入定点位置后卫星的标称质量。不难求出这些燃料量与偏置值 Δh，Δv 和卫星质量的关系。众所周知，火箭喷射推进公式是

$$\Delta v = Ig\ln\frac{m_0}{m_0 - m_f} \tag{3.4-11}$$

式中，m_0 是飞行器的起始重量；m_f 是燃料量；$m_0 - m_f = m$ 是发动机喷射完毕后飞行器的重量；I 是发动机的比冲。运载燃料的增量 Δm_{1f}，可直接表示成

$$\Delta m_{1f} = K\Delta h \tag{3.4-12}$$

$K>0$ 是燃料损失系数。根据式(3.4-11)远地点发动机的燃料量为

$$m_{Af} = m_1\left[1 - \exp\left(\frac{\Delta v_A}{I_A g}\right)\right]$$

I_A 是远地点发动机的比冲。在过渡轨道上，卫星质量的增量 Δm_1 等于在近地点喷射时运载燃料增量的负值，即 $\Delta m_1 = -\Delta m_{1f}$。因此，远地点发动机燃料的增量为

$$\Delta m_{Af} = \frac{\partial m_{Af}}{\partial m_1}\Delta m_1 + \frac{\partial m_{Af}}{\partial(\Delta v_A)}\Delta v = -K\left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta v_A}{I_A g}\right)\right]\Delta h + \frac{m_A}{I_A g}\Delta v \tag{3.4-13}$$

由于 Δv_c 较小，根据式(3.4-11)和(3.4-9)，(3.4-10)，星上辅助发动机所需的燃料量近似为

$$\Delta m_{cf} = \frac{m_A}{I_c g}\Delta v_c = \frac{m_A v_s}{4r_s I_c g}(|\Delta h| + |a_1\Delta h + a_2\Delta v|)$$
$$= b_3|\Delta h| + b_4|\Delta h + b_5\Delta v| \tag{3.4-14}$$

式中

$$b_3 = \frac{m_A v_s}{4r_s I_c g}, \qquad b_4 = b_3 a_1, \qquad b_5 = \frac{a_2}{a_1}$$

I_c 是星上辅助发动机的比冲。将式(3.4-12)～式(3.4-14)相加得燃料损失的总和 Δm_f 为

$$\Delta m_f = b_1\Delta h + b_2\Delta v + b_3|\Delta h| + b_4|\Delta h + b_5\Delta v|$$

式中

$$b_1 = K\frac{m_A}{m_1}, \qquad b_2 = \frac{m_A}{I_A g}$$

此式中的 Δh，Δv 是偏置量，也可用作近地点、远地点喷射的实际误差，这些误差是高斯分布的随机量，它们的期望值和方差是 $\overline{\Delta h}$，$\overline{\Delta v}$，σ_h，σ_v，后者决定于硬件的性能，不可任意变更，但期望值可作适当调整。为了获得最大的有效载荷，应选取最佳的 $\overline{\Delta h}^*$，$\overline{\Delta v}^*$，以使各次燃料损失的总和的期望值 $\overline{\Delta m_f}$ 最小。此期望值为

$$\overline{\Delta m_f} = b_1\overline{\Delta h} + b_2\overline{\Delta v} + b_3 E(|\Delta h|) + b_4 E(|\Delta h + b_5\Delta v|)$$

E 表示求取期望值。由随机过程理论得知，高斯分布的随机量 x 绝对值 $|x|$ 的期望值的公式是

$$E(|x|) = 2\sigma_x\psi(c) + \overline{x}(1 - 2\varphi(-c)) \tag{3.4-15}$$

式中

$$c = \frac{\overline{x}}{\sigma_x}, \qquad \psi(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{c}{2}}, \qquad \varphi(c) = \int_{-\infty}^{c}\psi(s)\,ds$$

其中，σ 表示方差；$\psi(c)$，$\varphi(c)$ 是高斯分布函数和密度函数。两个互不相关的随机量之和的方差式是

$$\sigma^2(x_1 + \alpha x_2) = \sigma_{x_1}^2 + \alpha^2\sigma_{x_2}^2 \tag{3.4-16}$$

利用式(3.4-15)，(3.4-16)可以导出期望值 $\overline{\Delta m_f}$，即

$$\overline{\Delta m_f} = b_1\overline{\Delta h} + b_2\overline{\Delta v} + b_3\overline{\Delta h}(1 - 2\varphi(-c_1)) + 2b_3\sigma_H\psi(c_1)$$
$$+ b_4(\overline{\Delta h} + b_5\overline{\Delta v})(1 - 2\varphi(-c_2)) + 2b_4\sigma_{Hv}\psi(c_2) \tag{3.4-17}$$

式中

$$c_1 = \frac{\overline{\Delta h}}{\sigma_H}, \qquad c_2 - \frac{1}{\sigma_{Hv}}(\overline{\Delta h} + b_5\overline{\Delta v}), \qquad \sigma_{Hv} = (\sigma_H^2 + b_5^2\sigma_v^2)^{\frac{1}{2}}$$

如果近地点、远地点喷射的偏置值为零，则有 $\overline{\Delta h} = \overline{\Delta v} = 0$。由近地点、远地点喷射的随机误差导致的星上辅助发动机燃料损失量的期望值为

$$\overline{\Delta m_f}|_{\overline{\Delta h} = \overline{\Delta v} = 0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(b_3\sigma_H + b_4\sigma_{Hv})$$

此量不是最小值，因此，存在喷射误差时，无偏置不是最优的。从式(3.4-17)导出的下列条件：

$$\frac{\partial\overline{\Delta m_f}}{\partial\Delta h} = b_1 + b_3(1 - 2\psi(-c_1)) + b_4(1 - 2\varphi(-c_2)) = 0$$

$$\frac{\partial\overline{\Delta m_f}}{\partial\Delta v} = b_2 + b_4 b_5(1 - 2\varphi(-c_2)) = 0$$

可以求出最佳偏置$\overline{\Delta h}^*$，$\overline{\Delta v}^*$为

$$\left.\begin{aligned}\overline{\Delta h}^* &= -\sigma_H\varphi^{-1}\left(\frac{b_1+b_2-\dfrac{b_2}{b_5}}{2b_3}\right)\\ \overline{\Delta v}^* &= -\left[\overline{\Delta h}^* + \sigma_H\varphi^{-1}\left(\frac{b_2+b_4b_5}{2b_4b_5}\right)\right]\frac{1}{b_5}\end{aligned}\right\} \tag{3.4-18}$$

显然，如近地点、远地点喷射误差的方差为零，即$\sigma_H=\sigma_v=0$，则最佳偏置量亦为零，$\overline{\Delta h}^*=\overline{\Delta v}^*=0$。

如标称入轨参数是：$r_{PT}=6\ 578$ km，$r_{AT}=42\ 164.18$ km，$i_T=28°$，$\Delta v_A=1.826$ km/s；卫星参数是：$m_1=800$ kg，$I_A=291$ s，$I_c=226$ s；近地点、远地点喷射的方差是：$\sigma_H=500$ km，$\sigma_v=0.01\Delta v_A$；则最佳偏置量

$$\overline{\Delta h}^* = 110\ \text{km}$$
$$\overline{\Delta v}^* = -0.019\Delta v_A$$

燃料节省量$\overline{\Delta m_f}^*=2.0$ kg。

3.4.3 最优远地点射入参数

在一个偏离标称的过渡轨道上，如按原定计划进行远地点喷射，并考虑到远地点发动机推力和方向的误差，远地点喷射后的准同步轨道将会远离漂移轨道。3.4.2 节用小偏差线性化的近似方法分析了同步轨道的误差，从这些误差公式(3.4-5)中可以看出，如把误差量$\delta(\Delta v_A)$，$\delta\beta_A$，$\delta\sigma_A$看作是针对已进入的非标称过渡轨道，那么适当地修改原定射入策略而引入修正量，则能部分地补偿过渡轨道误差的影响，使准同步轨道尽量靠近漂移轨道。采用液体远地点发动机时，不仅可以选择推力的方向和射入点，还可以调节实际给出的喷射冲量。下面列举一个简化的模式。

过渡轨道的主轴不一定和轨道的节线一致，远地点与升交点不重合，远地点射入的作用点也可以不在远地点上。

在升交点坐标系$Ox_Ay_Az_A$中，图 3.4-5 中各符号的下标“F”表示远地点射入的参数。令喷射点为F，相距升交点的角距为θ_F，真近点角为f_F，地心距为r_F，参阅 1.1 节，在此喷射点卫星的速度及其倾角是

$$v_F = \frac{\sqrt{\mu\, a_T(1-e_T^2)}}{r_F\cos\gamma_F}$$
$$\gamma_F = \arctan\left(\frac{e_T\sin f_F}{1+e_T\cos f_F}\right)$$

下标“T”表示过渡轨道的参数，真近点角$f_F=\theta_F-\omega_T$，见图 3.4-6。远地点发动机喷射产生的速度增量为Δv_F，它的赤经$\alpha_F=\Omega+\dfrac{\pi}{2}-\sigma_F$，赤纬$\delta_F=-\beta_F$，远地点射入后卫星的轨道参数以下标“1”表示。

射入后的速度及其在升交点坐标系中的分量是

$$v_1 = v_F + \Delta v_F = \begin{bmatrix} v_F\sin(\gamma_F-\theta_F)+\Delta v_F\cos\beta_F\sin\sigma_F \\ v_F\cos(\gamma_F-\theta_F)\cos i_T+\Delta v_F\cos\beta_F\cos\sigma_F \\ v_F\cos(\gamma_F-\theta_F)\sin i_T-\Delta v_F\sin\beta_F \end{bmatrix} \tag{3.4-19}$$

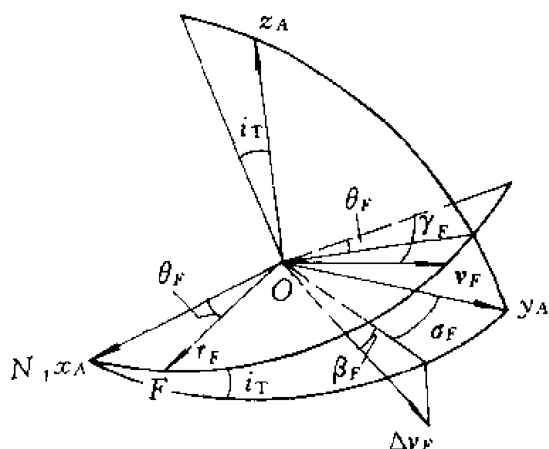


图 3.4-5

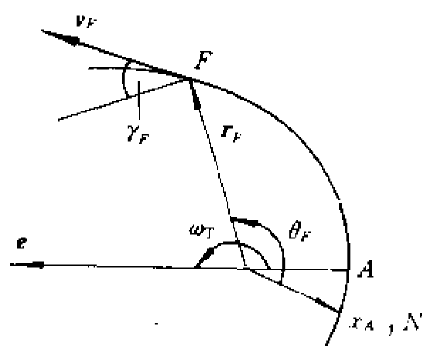


图 3.4-6

射入后的准同步轨道与过渡轨道、赤道之间的角度关系如图 3.4-7 所示，并有球面三角公式：

$$\left.\begin{aligned} \cos i_1 &= \cos\Delta\cos i_T + \sin\Delta\sin i_T\cos\theta_F \\ \sin i_1 &= \frac{\sin\Delta\sin\theta_F}{\sin(\Omega_T - \Omega_1)} \end{aligned}\right\} \tag{3.4-20}$$

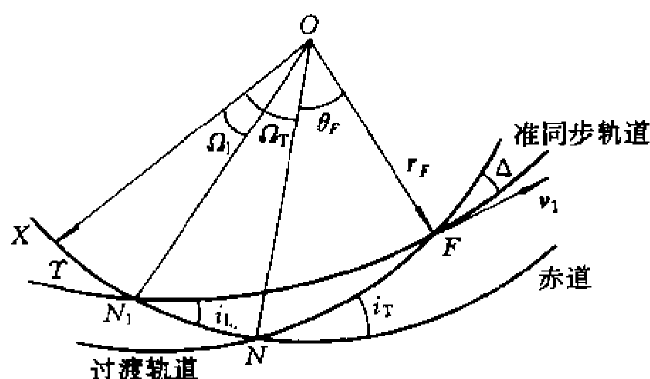


图 3.4-7

i_1，Ω_1 是准同步轨道的倾角和升交点赤经。Δ 是准同步轨道与过渡轨道的夹角。显然，从式(3.4-20)可以看出，如要求准同步轨道的倾角为零，则必须在过渡轨道的升交点进行变轨，即远地点喷射的角距 $\theta_F=0$，并且远地点喷射方向的赤纬应为

$$\beta_F = \arcsin\left(\frac{v_F\cos\gamma_F\sin i_T}{\Delta v_F}\right) \tag{3.4-21}$$

从而使卫星的法向速度为零。在标称情况下只要求 $\gamma_F=0$，以及远地点喷射方向的赤经 $\alpha_F=\Omega+\frac{\pi}{2}$。现在，远地点喷射的赤经也应作适当的调整。如只考虑圆化准同步轨道，不考虑漂移方向和快慢的问题，最有利的方式是使喷射点成为准同步轨道的近地点或远地点，并且在相隔180°处卫星到达同步高度。因此公式(3.4-19)中卫星速度的径向、切向分量应满足关系式：

$$\left.\begin{aligned} & v_F\sin\gamma_F + \Delta v_F\cos\beta_F\sin\sigma_F = 0 \\ & v_F\cos\gamma_F\cos i_1 + \Delta v_F\cos\beta_F\cos\sigma_F = \left(\frac{2\mu r_F}{r_s(r_s+r_F)}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{3.4-22}$$

使用液体远地点发动机时，Δv_F，β_F，σ_F 都可调整，同时满足式(3.4-21)和(3.4-22)，实现最佳喷射，使圆化准同步轨道所需的燃料最少。使用固体远地点发动机时，只能选择合适的喷射方向，改变射入后卫星速度的飞行角，使准同步轨道的近地点和远地点偏离同步半径的误差为最小。

采用3.4.2节举例中的标称过渡轨道的参数，且假定实际过渡轨道的远地点与升交点重合，但高出同步高度约500 km，如按原定方式进行喷射，准同步轨道的剩余倾角为0.15°，近、远地点为42 664.2 km和42 853.8 km，将它变成静止轨道所需的速度增量为29.6m/s。如用固体远地点发动机时，喷射方向应改为 $\beta_F=23.97°$，$\sigma_F=0$，$\Delta v_F=1\ 826$ m/s，准同步轨道的倾角为零，近、远地点为42 664.2 km和42 987.4 km，圆化轨道的速度增量为24.1 m/s。如用液体远地点发动机，最佳喷射参数为 $\beta_F=24.17°$，$\sigma_F=0$，$\Delta v_F=1\ 811.4$ m/s，准同步轨道的倾角为零，近、远地点为42 164.2 km和42 664.2 km，圆化轨道的速度增量为9.1 m/s。

以上用简化的模式说明了远地点射入最优化设计的重要性。合适地选择远地点喷射的最佳参数 Δv_F，β_F，σ_F 以及喷射点的位置 θ_F，可以部分地补偿由于过渡轨道的误差所引起的燃料损失。根据飞行任务的需要和卫星设计的具体情况，可以确立不同的最优化设计命题。

最佳指标是远地点射入后用于定点置入而耗费星上辅助喷气系统中的燃料为最少。如直接用速度增量代表耗费的燃料量，最优化设计包括远地点喷射在内共三次(或四次)脉冲喷射参数的选择。也可以事先规定一个目标准同步轨道，选择单次远地点喷射的最佳参数，使实际准同步轨道与目标准同步轨道之间的偏差为最小。因为远地点射入后将卫星送入定点位置所需的速度增量与准同步轨道的特性密切有关。半长轴 a 和偏心率 e 代表卫星在准同步轨道上的漂移速度(方向和数值)和近地点、远地点偏离同步半径的程度，这两个轨道要素间接地决定了定点置入所需的速度增量，在过渡轨道远地点附近的速度约为同步速度的1/2，轨道倾角修正由远地点发动机完成是最有利的。但为了定点位置保持的需要，往往给准同步轨道设置一个很小的倾角偏置，它的升交点在270°附近。如以 a_D，e_D，i_D，Ω_D 表示准同步轨道的目标参数，最佳指标可以规定成

$$J=W_1(a_1-a_D)^2+W_2(e_1-e_D)^2+W_3(i_1-i_D)^2+W_4(\Omega_1-\Omega_D)^2 \tag{3.4-23}$$

式中，轨道要素的下标"1"表示准同步轨道的参数；W 是加权系数，在这种最佳指标函数中，权系数的选择是个重要问题。进入准同步轨道的射入参数是远地点发动机喷射时卫星的地心距 r_F 和喷射后的卫星速度 $\boldsymbol{v}_1$，参阅公式(1.1-44)，准同步轨道的半长轴和偏心率为

$$a_1=\frac{\mu r_F}{2\mu-r_F v_1^2}$$

$$e_1=\left[1-\frac{r_F^2 v_1^2\cos\gamma_1^2}{\mu a_1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

式中 γ_1 为远地点喷射后卫星在该点的飞行角，其式为

$$\gamma_1=\arcsin\left(\frac{\boldsymbol{r}_F\cdot\boldsymbol{v}_1}{r_F v_1}\right)$$

再由图3.4-7，准同步轨道的倾角和升交点赤经公式为

$$i_1=\arccos\ (\boldsymbol{K}_1\cdot\boldsymbol{K})$$

$$\Omega_1=\Omega_T+\arccos(\boldsymbol{N}_1\cdot\boldsymbol{N})$$

$\boldsymbol{K}$ 为地轴方向，$\boldsymbol{K}_1$ 为准同步轨道法线的单位矢量，

$$K_1 = \frac{r_F \times v}{r_F v_1 \cos \gamma_1}$$

N 为过渡轨道的升交点节线方向，N_1 是准同步轨道的节线方向的单位矢量，

$$N_1 = \frac{1}{\sin i_1}(K \times K_1)$$

在升交点坐标系 $Ox_A y_A z_A$ 中，$K=[0,\ 0,\ 1]^T$，$N=[1,\ 0,\ 0]^T$，r_F 的分量决定于已进入的过渡轨道的要素和喷射点的角距 θ_F，v_1 已由式(3.4-19)给出。因此，指标函数 J(式(3.4-23))是喷射参数 $\Delta v_F, \beta_F, \sigma_F, \theta_F$ 的函数。远地点喷射最优化成为一个多变量函数的极值问题，在实际问题中还应考虑各种限制条件，如喷射冲量的幅值、可喷射的区域以及地面站的可见范围等，要满足限制条件的数学形式是非线性方程或非线性不等式。牛顿-拉福森法可用来求解指标函数 J 的极值问题。过渡轨道的偏差较小，预计远地点喷射的最佳参数比较靠近标称值，但喷射点的选择范围较大。寻求最佳参数可以分两步进行，先在指定的喷射位置 θ_F 上求出最佳喷射参数 $u=[\Delta v_F^*\ \beta_F^*\ \sigma_F^*]^T$，然后再求最佳喷射点 θ_F^*，得

$$J(u, \theta_F) = \min$$

3.4.4 多次远地点射入

液体远地点发动机的更大优点是可以多次重复启动，因此，单次远地点点火可分解为多次(三次或四次)点火。第一次点火后，卫星不进入准同步轨道，而是进入中间轨道，其轨道倾角有部分修正(广义霍曼变轨)，近地点提高到 1 万 km 以上，有利于安排第二次、第三次点火的弧段和冲量，直接连续地完成漂移控制、圆化轨道和定点置入，大大地缩短进入定点位置的时间。此外，第一次点火后，可根据中间轨道的轨道参数，更精确地确定卫星的动力学和推进系统的参数，更好地减少第二次、第三次变轨的误差，同时有效地修正前次点火产生的剩余误差，非常有利于精确地进入定点位置。

星载液体远地点发动机的推力较小，约 400 N，完成第一次远地点变轨的点火时间约为 100 min，运行弧段达 12°，因此，脉冲变轨的模式和轨道要素的增量控制模式均不适宜，须直接引用卫星运动状态参数建立轨道控制的动力学模型，即

$$\left.\begin{aligned} \dot{r} &= v \\ \dot{v} &= -\mu\frac{r}{r^3} + \frac{F}{m}u + a \\ \dot{m} &= \text{const} \end{aligned}\right\} \tag{3.4-24}$$

式中，F 为发动机推力；u 为该推力在赤道惯性坐标的方向；m 为卫星质量；a 为轨道摄动加速度。近地点射入后，过渡轨道的要素为已知，由第一章的轨道方程可得卫星在赤道惯性坐标的初始状态 $r(t_0)$、$v(t_0)$，又由时间统一系统得对应时刻的格林威治恒星时角 G_0。多次轨道控制后的终端时刻 t_E 为非约束值，但终端状态须符合定点要求，终端状态为

$$r(t_E) = \begin{bmatrix} r_s \cos[G(t_E)+\lambda_s] \\ r_s \sin[G(t_E)+\lambda_s] \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v(t_E) = \begin{bmatrix} -v_s \sin[G(t_E)+\lambda_s] \\ v_s \cos[G(t_E)+\lambda_s] \\ 0 \end{bmatrix}$$

$G(t_E)$为终端时刻的格林威治恒星时角，$G(t_E)=G(t_0)+\omega_e(t_E-t_0)$；$\lambda_s$ 为定点经度；r_s，v_s 为同步半径和同步速度。最优控制的优化参数为

t_i——第 i 次点火起始时刻；

Δt_i——第 i 次点火持续时间；

u_i——第 i 次点火发动机喷射方向。

最优控制的优化指标为多次点火时间的总和 $\sum_i \Delta t_i$ 为最小。液体远地点发动机推力方向的设置与卫星总体构形布局和卫星姿态控制系统的设计有关，还决定于远地点点火前后的测控程序、发射窗口等因素。可有三种指向模式。

1. 惯性固定指向

在过渡轨道上，在进入预定的变轨远地点前，卫星姿态控制系统进行姿态机动，设置远地点发动机点火推力方向。在点火过程中姿态控制系统保持卫星姿态惯性稳定，使发动机喷射方向在空间中恒定为点火起始时刻的方向，可定义为

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \cos\delta_F \cos\alpha_F \\ \cos\delta_F \sin\alpha_F \\ \sin\delta_F \end{bmatrix}$$

式中 α_F，δ_F 为远地点点火推力方向的赤经和赤纬，是设计远地点变轨最优控制的待选参数。将其直接代入动力学方程(3.4-24)，形成动力学建模。

2. 等偏航角指向

卫星姿态控制系统将卫星姿态稳定在卫星轨道坐标 $ox_o y_o z_o$：x_o 轴在轨道平面内垂直于地心方向，并指向卫星速度方向；y_o 轴垂直轨道平面，指向轨道转速矢量的负方向；z_o 轴沿卫星径向的负方向，指向地心。在点火变轨过程中，卫星的向径 $\boldsymbol{r}$ 离开原过渡轨道平面，依靠红外地球敏感器，卫星姿控系统保持卫星的偏航轴对地心的指向，使位于卫星俯仰/滚动平面内的远地点发动机保持在当地水平面内(与地心方向垂直)，又依靠太阳敏感器测量姿态偏航角，卫星姿控系统使发动机推力方向的偏航角恒定。令点火偏航角为 ψ_F，又用卫星的位置和速度矢量描述轨道坐标轴的方向，则变轨动力学模型的推力方向 $\boldsymbol{u}$ 在惯性空间的方向可描述为

$$\boldsymbol{u} = \cos\psi_F \left(\frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}|} \times \frac{-\boldsymbol{r}}{r} \right) + \sin\psi_F \left(\frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}|} \right)$$

将其代入动力学方程(3.4-24)，按此喷射模式，最优变轨推力方向的优化参数仅有点火偏航角 ψ_F。

3. 共面转动指向

卫星姿态控制系统含有速率积分陀螺，其敏感测量轴(输入轴)垂直于远地点发动机喷射方向。在远地点点火前，姿控系统不仅将远地点发动机喷射方向机动到某最优方向，还将该速率积分陀螺的测量轴调整到平行于某一空间方向。在点火过程中，依靠陀螺，姿控系统保持该陀螺的测量轴稳定在选取的空间方向上，同时控制卫星姿态绕该陀螺的测量轴进行等速转动，即远地点发动机在垂直于陀螺测量轴的平面内等速转动。令陀螺测量轴在空间的取向为 $\boldsymbol{J}$，其赤经、赤纬为 α_J，δ_J，远地点发动机推力方向形成的推力平面与赤道平面相交节线的方向为 $\boldsymbol{N}$，见图 3.4-8，有

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha_J \\ \cos\alpha_J \\ 0 \end{bmatrix}$$

定义在推力平面内与节线 $\boldsymbol{N}$ 垂直的方向为 $\boldsymbol{K}$，有

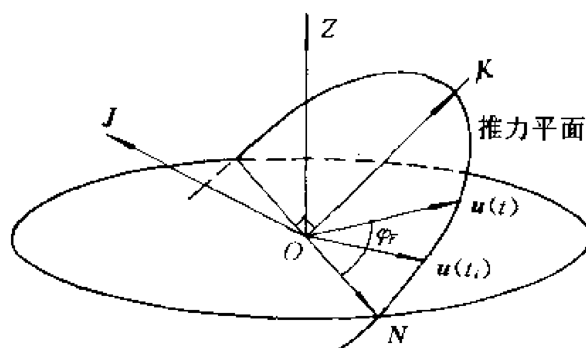


图 3.4-8

$$K = J \times N = \begin{bmatrix} -\cos\alpha_J \sin\delta_J \\ -\sin\alpha_J \sin\delta_J \\ \cos\delta_J \end{bmatrix}$$

由此，发动机点火推力的空间方向可以定义为

$$u = \cos\varphi_F(t)N + \sin\varphi_F(t)K$$

式中 φ_F 为点火推力方向与推力平面节线的夹角，有

$$\varphi_F(t) = \varphi_F(t_i) + \dot{\varphi}(t - t_i)$$

式中，t_i 为点火的起始时刻；$\dot{\varphi}$为推力方向转动速度，为常值。按此喷射模式，最优变轨的推力方向优化参数包含有推力面法线（即陀螺测量轴）的赤经、赤纬 α_J，δ_J，起始点火推力方向转角 $\varphi_F(t_i)$和推力方向转动速度$\dot{\varphi}$。

3.5　静止卫星的位置保持

处在静止轨道上的卫星始终受着不可忽略的三种主要摄动力的作用，卫星不可能绝对静止，而在东西（经度）、南北（纬度）方向漂移着。位置保持的任务是使卫星偏离定点位置的经纬度漂移量小于允许的给定值。第二章已经简略地分析了三种摄动对卫星轨道要素的影响，对于静止轨道，这些摄动作用的分析可以简化，表 3.5-1 概括了这三种摄动引起的漂移模型。

表 3.5-1

摄动源	摄动要素	漂移速度	幅值，周期
地球椭状	平经度 $\bar{\lambda}$, $\dot{\bar{\lambda}}$	$\ddot{\bar{\lambda}}=0.001\ 68°\times\sin 2(\bar{\lambda}-\lambda_{22})/\mathrm{d}^2$	$<90°$，$\leqslant 818$ d，$\leqslant 0.3(°)/\mathrm{d}$
日、月引力	倾角 i、升交点赤经 Ω	$(0.85\pm0.1)\ (°)$/年	15°，54 年旋转 180°
太阳光压	偏心率 e，近地点幅角 ω	$1.95\times10^{-4}(\frac{A}{m})/\mathrm{d}$	$0.011\ 4(\frac{A}{m})$，1 年旋转 180°

表中$\left(\frac{A}{m}\right)$的单位是 $\mathrm{m^2/kg}$。

地球扁状和日、月引力引起长期摄动，可以调整标称同步轨道半径（约 1 km），补偿此项长期平经度漂移，因此位置保持不考虑此项摄动因素。

3.5.1 静止轨道的控制特性

在1.7节中，描述静止轨道的六要素为 D, e_x, e_y, i_x, i_y 和 l_0，后者为 t_0 时刻的平赤经，轨道运动方程为(1.7-18)，(1.7-19)。令定点经度为 λ_s，同步半径为 r_s，卫星在径向、切向、法向偏离定点位置的距离可描述为

$$\left.\begin{aligned}\Delta r &= -r_s\left(\frac{2}{3}D + e_x\cos l + e_y\sin l\right)\\ \Delta x &= r_s(\lambda_0 - \lambda_s) + r_sD(l - l_0) + 2r_s(e_x\sin l - e_y\cos l)\\ \Delta y &= -r_s(i_x\cos l - i_y\sin l)\end{aligned}\right\}\tag{3.5-1}$$

三个方程的右端都包含有平赤经 l 的三角函数，这表明卫星的地心距和经、纬度的变化是周期性的，卫星在南北方向的漂移只与倾角有关，东西方向的漂移决定于漂移率和偏心率，两者的影响是独立的。偏心率的存在使卫星在平均位置的东西方向以 $2e$ rad 的幅度往返日周期振荡。要保持卫星静止，应使 D, e, i 以及(λ_0 λ_s)始终为零，当卫星漂到允许范围的边界时，应用星上的反作用推力器，给卫星产生速度增量，修正这些轨道要素，从而补偿外界摄动的影响。

将静止轨道摄动方程(2.1-33)中的摄动力 F_r, F_t, F_n 替换为喷气反作用推力，沿径向、切向和侧向，静止轨道($n\approx\omega_e$, $a\approx r_s$, $e\ll1$, $i\ll1$)控制方程的近似式为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{2r_s}{v_s}F_t\\ \frac{\mathrm{d}e_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{v_s}(F_r\sin l + 2F_t\cos l)\\ \frac{\mathrm{d}e_y}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{v_s}(-F_r\cos l + 2F_t\sin l)\\ \frac{\mathrm{d}i_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{v_s}F_n\sin l\\ \frac{\mathrm{d}i_y}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{v_s}F_n\cos l\\ \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} &= \omega_e - \frac{2}{v_s}F_r\end{aligned}\right\}\tag{3.5-2}$$

式中，v_s 为静止轨道的同步速度。对于近圆轨道，横向与切向的方向基本上是一致的，以下将通用切向名称。化学推进剂提供的反作用推力较大，短时间内就能使卫星获得足够的速度增量，控制作用可以看成是脉冲式的。径向和切向控制力改变轨道偏心率的效率的差别较大，后者为前者的两倍，径向控制使半长轴的变化很小，脉冲式控制时卫星的位置不变。

为了便于分析位置保持问题，将式(3.5-2)的轨道要素 l，a 改换成平经度 $\bar{\lambda}$ 和漂移率 D，有直接关系式

$$\bar{\lambda} = l - \omega_e t$$

$$D = \dot{l} - \omega_e$$

引用漂移率的定义，$D = -3\,\Delta a/2r_s$，由轨道控制方程(3.5-2)，得脉冲控制的轨道要素增量方程

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\lambda &= -\frac{2}{v_s}\Delta v_r \\
\Delta D &= -\frac{3}{v_s}\Delta v_t \\
\Delta e_x &= \frac{1}{v_s}(\Delta v_r \sin l_m + 2\Delta v_t \cos l_m) \\
\Delta e_y &= \frac{1}{v_s}(-\Delta v_r \cos l_m + 2\Delta v_t \sin l_m) \\
\Delta i_x &= \frac{1}{v_s}\Delta v_n \sin l_m \\
\Delta i_y &= \frac{1}{v_s}\Delta v_n \cos l_m
\end{aligned}\right\} \tag{3.5-3}$$

式中，l_m 是轨道机动控制时卫星的位置（恒星时角），间接代表控制时刻；Δv_r，Δv_t，Δv_n 是沿径向、切向和侧向的脉冲速度增量，它们使轨道要素发生跃变。显然，轨道修正的效率与控制时刻卫星的位置有关。控制结束后新的轨道的初始条件决定于控制量和控制时刻卫星的位置。以上各节已说明卫星在摄动作用下的漂移特性与卫星的实际轨道参数有关。因此，位置保持的最优策略问题归结为如何选择最佳控制时刻以及控制后新轨道的初始条件，从而使卫星在摄动作用下停留在给定的漂移范围内的时间为最长，或根据给定的停留时间，使控制次数和控制量为最小。从式(3.5-3)中看出，东西位置保持与南北位置保持是互不耦合的，可以分别论述。

从轨道平面内的控制方程式看出，修正位置的漂移率由切向控制实现，与控制时刻卫星的位置无关。偏心率受切向或径向的控制，而控制点的位置是一个重要参数，径向控制能改变卫星的平经度。这些控制量的效率是

$$\begin{aligned}
\Delta a &= 27.4\Delta v_t \quad \mathrm{km/(m\cdot s^{-1})} \\
\Delta D &= -0.352\Delta v_t \quad (^\circ)/(\mathrm{d\cdot m\cdot s^{-1}}) \\
\Delta\bar{\lambda} &= \pm 0.0375\,\Delta v_r \quad (^\circ)/(\mathrm{m\cdot s^{-1}}) \\
\Delta e_x &= 0.325\times 10^{-3}\Delta v_r \quad 1/(\mathrm{m\cdot s^{-1}}) \\
\Delta e_y &= 0.65\times 10^{-3}\Delta v_t \quad 1/(\mathrm{m\cdot s^{-1}})
\end{aligned}$$

径向控制调整卫星平经度的效率差，修正 0.1°位置误差，需要径向速度增量 $\Delta v_r=2.66$ m/s，而修正 0.1(°)/d 漂移率仅需要切向速度增量 $\Delta v_t=0.28$ m/s，但同时引起偏心率变化 0.185×10^{-3}，因此应同时控制位置漂移率和偏心率。正方向的切向控制，$\Delta v_t>0$，是东向控制，与轨道速度同向，似乎卫星将向东漂移，实际上东向控制增大轨道的半长轴和轨道周期，卫星平均运动是向西漂，因此漂移率为负，$\Delta D<0$；反之，西向控制使卫星向东漂移。

分析切向控制引起的卫星东西漂移运动，引用切向控制 Δv_t 的增量方程(3.5-3)和卫星的偏离运动方程(3.5-1)，可得切向控制引起卫星在轨道面内相对参考点(r_s，$\lambda_0-\lambda_s$)的偏离运动为

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \frac{2}{\omega_e}[1-\cos(l-l_m)]\Delta v_t \\
\Delta x &= \frac{1}{\omega_e}[4\sin(l-l_m)-3(l-l_m)]\Delta v_t
\end{aligned}$$

式中 $l>l_m$，l_m 为轨道机动脉冲控制时刻卫星的平赤经。东向脉冲将卫星推向东漂，到达最大

偏离后，向西漂，见图 3.5-1。当 $l-l_m=73.1°$，即经过 4.85 h，回到经度参考点（$\Delta x=0$）；经过 12 h，径向偏离达最大值。

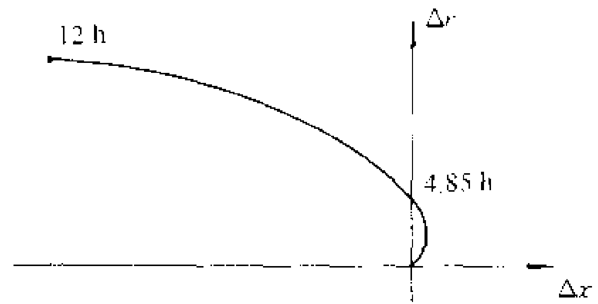


图 3.5-1

单次切向控制同时改变轨道的漂移率和偏心率，两者的耦合关系是 0.001 85/((°)·d^{-1})。须进行多脉冲控制，才能独立地修正漂移率和偏心率。控制漂移率仅与控制量有关，与脉冲作用点（l_m）无关；偏心率的控制不仅与控制量有关、还与脉冲作用点（l_m）有关。最简单有效的控制方式是 180°相隔的双脉冲控制，共有三个控制量可以自由选择。其中两个是各次脉冲的控制量；第三个是第一次脉冲控制的作用点 l_1，而第二次脉冲作用点是约束的，在第一次脉冲作用后，经 11 h 58 min（半个恒星日），$l_2=l_1+180°$。引用脉冲控制的轨道增量方程和静止卫星的位置偏离方程，两次脉冲产生的合成运动是

$$\left.\begin{aligned}\Delta r &= \frac{2}{\omega_e}[\Delta v_1-\Delta v_2-(\Delta v_1-\Delta v_2)\cos(l-l_1)]\\ \Delta x &= \frac{1}{\omega_e}(\Delta v_1-\Delta v_2)\left[4\sin(l-l_1)-\frac{3}{2}\pi\right]\\ &\quad-\frac{3}{\omega_e}(\Delta v_1+\Delta v_2)(l-l_2-\frac{1}{2}\pi)\end{aligned}\right\}\tag{3.5-4}$$

式中 $l>l_2$。两次等量东向脉冲（$\Delta v_1=\Delta v_2>0$）引起的漂移是叠加，偏心率相互抵消。上式运动方程所含周期运动的系数为零。两次等量的东西向脉冲（$\Delta v_2=-\Delta v_1$）引起的漂移相互抵消，而偏心率叠加，但平经度向西移过（$\frac{3\pi}{v_s}\Delta v_1$）度，见图 3.5-2。在两次脉冲后，卫星的相对偏离运动

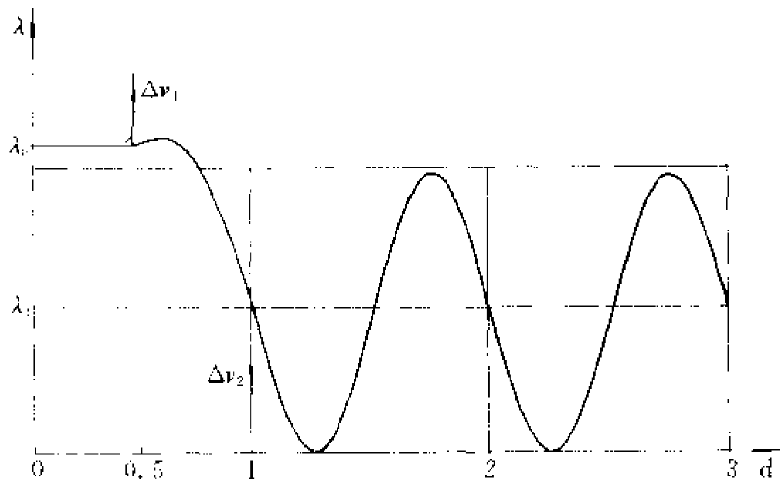


图 3.5-2

围绕新的平经度 λ_1 东西漂移。如欲保持平经度不移动，则可采用三次脉冲控制，例如，东-西-东向控制，第一次、第三次东向脉冲量相等（$\Delta v_1=\Delta v_3$），第二次西向脉冲量为前者的两倍（$\Delta v_2=-2\Delta v_1$），三次脉冲各相隔 180°，$l_2=l_1+180°$，$l_3=l_2+180°$，三次脉冲作用后，卫星的偏离运动

方程为

$$\left.\begin{aligned}\Delta r &= \frac{2}{\omega_e}[\Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3 + (\Delta v_1 - \Delta v_2 + \Delta v_3)\cos(l - l_2)] \\ \Delta x &= \frac{1}{\omega_e}[3\pi(\Delta v_3 - \Delta v_1) - 3(\Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3)(l - l_2) \\ &\quad - 4(\Delta v_1 - \Delta v_2 + \Delta v_3)\sin(l - l_2)]\end{aligned}\right\} \quad (3.5\text{-}5)$$

式中 $l>l_3$。因 $\Delta v_1=\Delta v_3$，上式切向偏离运动的常值分量为零，即卫星东西漂移运动仍然围绕控制前的平经度 λ_0，见图 3.5-3。

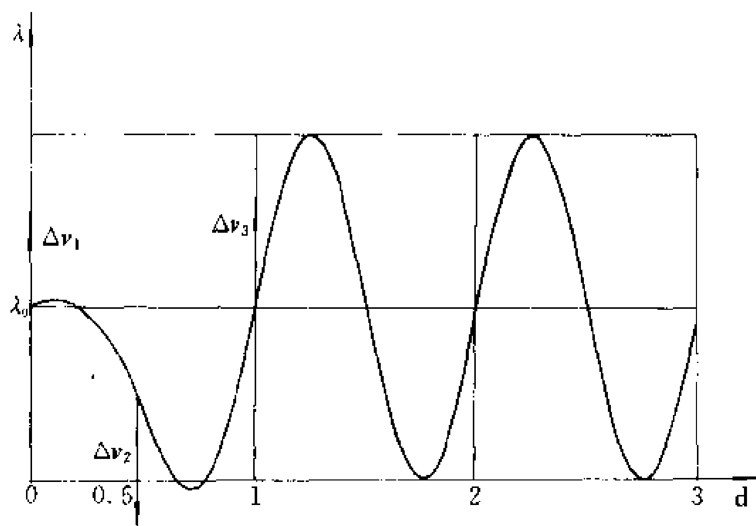


图　3.5-3

控制轨道倾角由法向控制力实现，控制效率是

$$\Delta i = 0.018\,6\,\Delta v_n$$

上式的单位是(°)/(m·s⁻¹)。改变 1°轨道倾角需要速度增量 Δv_n =53.66 m/s。如原轨道倾角不为零，则轨道倾角控制效率与脉冲作用点(l_m)有关。令原轨道倾角为 i_1，升交点经度为 Ω_1，其为倾角矢量 $\boldsymbol{i}_1$ 与(−$\boldsymbol{Y}$)轴的夹角。如法向脉冲 Δv_n 作用点的赤经为 l_1，脉冲变轨产生的倾角增量为 Δi，其升交点赤经即为脉冲作用点的赤经 l_1，倾角增量 Δi 与原轨道倾角 $\boldsymbol{i}_1$ 合成为脉冲变轨后新轨道的倾角矢量 $\boldsymbol{i}_2$，见图 3.5-4。倾角 i_2 可表示为

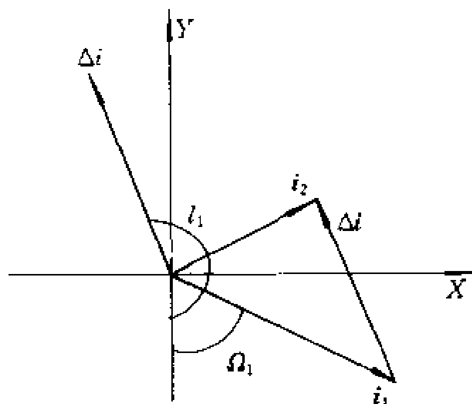


图　3.5-4

$$i_2 = [i_1^2 + (\Delta v_n/v_s)^2 + 2i_1(\Delta v_n/v_s)\cos(l_1 - \Omega_0)]^{\frac{1}{2}} \quad (3.5\text{-}6)$$

因此，修正轨道倾角的最佳作用点在原轨道的拱点。

3.5.2 东西位置保持

在静止轨道上，卫星在东西方向的经度漂移由两部分组成：一部分是地球形状摄动使卫星经度漂移；另一部分是太阳光压产生的偏心率摄动，引起卫星经度日周期振荡。卫星在东西方向经度位置的控制问题是，给定的定点经度位置为 λ_s，精度要求为 $\pm\Delta\lambda_s$，东西位置保持使卫星不漂出下列范围：

$$|\lambda - \lambda_s| = |\bar{\lambda} - \lambda_s + 2e\sin M| \leqslant \Delta\lambda_s \tag{3.5-7}$$

它的东西边界为 λ_B，λ_A。位置保持的精度要求较高，在 $\Delta\lambda_s$ 误差带内，可以认为卫星受到的地球形状摄动力是常值，等于作用在定点位置上的摄动力。又由于轨道的偏心率很小，因此独立地分析两种摄动源引起的位置误差。

在地球形状摄动作用下，卫星经度的漂移运动是

$$\lambda = \lambda_0 + \dot{\lambda}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{\lambda}_s(t - t_0)^2$$

λ_0 为 t_0 时的初始位置，$\ddot{\lambda}_s$ 是在定点位置的摄动加速度。如摄动加速度为正，即东向摄动，迫使卫星向东漂，当卫星漂至东边界时，进行脉冲修正，使卫星获得向西的初始漂移率；在东向摄动力作用下，当卫星漂到西边界时，西向的漂移率降为零，东向摄动力又使卫星离开西边界，向东边界漂移，如此形成漂移极限环。这种保持模式充分利用定点的保持区，并使两次脉冲修正的间隔为最长，见图 3.5-5。令 t_0 时卫星位于东边界，经度为 $\lambda_B = \lambda_s + \Delta\lambda_s$，脉冲控制给予的西向漂移率为 $\dot{\lambda}_B$，又令位置保持极限环的周期为 T，则在西边界 λ_A，有

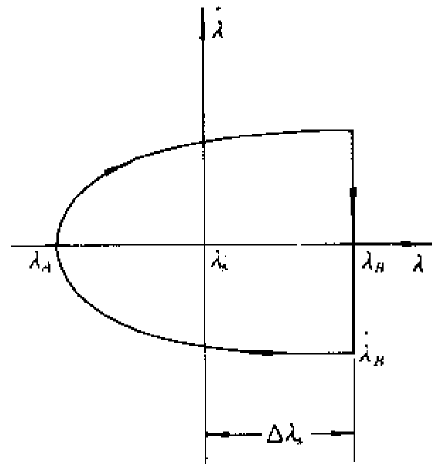


图 3.5-5

$$\lambda_A = \lambda_s - \Delta\lambda_s = \lambda + \Delta\lambda_s + \dot{\lambda}_B\frac{T}{2} + \frac{1}{2}\ddot{\lambda}_s\left(\frac{T}{2}\right)^2$$

$$\dot{\lambda}_A = \dot{\lambda}_B + \ddot{\lambda}_s\frac{T}{2} = 0$$

因此，可得极限环周期 T 与位置保持区的宽度 $\Delta\lambda_s$ 和定点位置的摄动加速度 $\ddot{\lambda}_s$ 的关系为

$$T = 4(\Delta\lambda_s/\ddot{\lambda}_s)^{\frac{1}{2}}$$

$$\dot{\lambda}_B = -2(\Delta\lambda_s \cdot \ddot{\lambda}_s)^{\frac{1}{2}}$$

在东边界，脉冲修正量需产生两倍 $\dot{\lambda}_B$，其中一半为抵消摄动力从西边界到东边界积累的漂移率。参见轨道增量式(3.5-3)，脉冲修正的速度增量 Δv_t 为

$$\Delta v_t = -\frac{2\dot{\lambda}_B}{3}r_s = \frac{4}{3}r_s(\Delta\lambda_s \cdot \ddot{\lambda}_s)^{\frac{1}{2}} \tag{3.5-8}$$

由上可见，为克服地球形状摄动，东西位置保持的脉冲控制次数与定点保持的范围有关，但是，单位极限环周期的速度增量仅与摄动加速度有关，与定点范围的设置无关，即

$$\frac{\Delta v_t}{T} = \frac{r_s}{3} \cdot \ddot{\lambda}_s \tag{3.5-9}$$

乘以全年时间，即得一年内用于克服地球形状摄动所需的速度增量。以 $\lambda_s=110°$为例，该经度点的摄动加速度为 $\ddot{\lambda}_s=0.23\times10^{-3}(°)/d^2$，代入上式得全年所需速度增量 $\sum\Delta v_t=0.24$ m/s。如定点保持范围 $\Delta\lambda_s=0.1°$，则校正周期为 89 d，每次速度增量 $\Delta v_t=0.054$ m/s。

在太阳光压 P_S 作用下，卫星轨道偏心率增量 Δe 垂直于阳光，指向太阳视运动方向。一天内偏心率增量的近似式为 $\Delta e=\frac{3}{2v_s}P_S$，增量 Δe 的幅值近似为常值，因此偏心率矢量 $\boldsymbol{e}$ 的端点跟随太阳视运动，一年内在赤道坐标面上描绘成一个偏心率摄动圆。其圆半径 ρ 的近似式为

$$\rho=\frac{365.25}{2\pi}\cdot\dot{e}=0.011\left(\frac{A}{m}\right)$$

见式(2.4-8)，其圆心位于通过初始偏心率端点的太阳光方向上，即偏心率摄动圆的圆心并不一定与赤道坐标的原点重合。因此，在太阳光压作用下，偏心率增量虽为常值，但偏心率并不一定为常值，而决定于初始偏心率矢量的指向及其幅值。如偏心率摄动圆半径 ρ 等于初始偏心率 e，且偏心率矢量指向太阳，则偏心率摄动圆心与赤道坐标原点重合，太阳光压仅引起偏心率矢量跟随太阳视运动旋转，不引起偏心率幅值的变化。偏心率引起卫星经度日周期性东西漂移，幅度为 $2e$，东西位置保持要求将偏心率限制在一个偏心率保持圆内，其圆半径 Δe_K 应为 $\Delta e_K<\frac{1}{2}\Delta\lambda_s$。因此，偏心率控制的方式与偏心率摄动圆、偏心率保持圆的相互几何关系密切有关。

在图 3.5-6 上，C_p，C_k 分别表示偏心率摄动圆和保持圆，O 点为赤道坐标的原点。在①处，$\boldsymbol{e}_1$ 是 t_1 时刻的偏心率，位于保持圆 C_k 上，其幅值 $|\boldsymbol{e}_1|=e_k$，其方向滞后于阳光方向 θ 角。在光压作用下，偏心率 $\boldsymbol{e}$ 从 $\boldsymbol{e}_1$ 起始，沿摄动圆 C_p 跟随太阳转动，在 C_k 圆内移过一段圆弧，在 t_2 时刻到达两圆另一交点②，偏心率经历由减少至增大的变化，在圆弧的中间位置 P 点，偏心率降到最小值，并与太阳方向重合。在②处，其幅值 $|\boldsymbol{e}_2|=e_k$，其方向超前阳光方向 θ 角。为限制偏心率移出保持圆，在②处，偏心率控制的增量 $\Delta\boldsymbol{e}_c$ 应使 $\boldsymbol{e}_2$ 反向转 2θ 角，使新的初始偏心率 $\boldsymbol{e}_1'=\boldsymbol{e}_2+\Delta\boldsymbol{e}_c$ 仍然滞后于阳光方向 θ 角，修正后，偏心率从 $\boldsymbol{e}_1'$ 起始，沿新的偏心率摄动圆 C_p' 移动，太阳光压又迫使偏心率矢量逐渐超前太阳方向，重复上述过程。

此控制策略称为太阳同步偏心率控制，在一个控制周期中，使偏心率的平均方向跟随太阳的平均方向，即偏心率矢量保持在地球-太阳方向周围转动。见图 3.5-6，偏心率的修正量为

$$|\Delta e_c|=2e_k\sin\theta \tag{3.5-10}$$

两次修正控制的时间间隔正比太阳视运动转过的角度 $2\theta_S$，由三角关系，得

$$e_k\sin\theta=(\rho-OP)\sin\theta_S$$

校正周期 T_c 为

$$T_c=\frac{2}{n_S}\arcsin\left(\frac{e_k\sin\theta}{\rho-OP}\right) \tag{3.5-11}$$

如给定校正周期，即给定 θ_S 角，则由下式可得初始偏心率的阳光滞后角 θ，其式为

$$\rho\sin\theta_S=e_k\sin(\theta+\theta_S)$$

从图 3.5-6 的几何关系可看出，在给定 e_k 和 ρ 的情况下，如 $e_k<\rho$，则由初始偏心率的捕获控制，使初始偏心率矢量与阳光方向成最优夹角。在两次校正之间，偏心率矢量从初始点沿摄动圆移动至与保持圆的交点时，偏心率矢量转过 180°，使两次校正之间的周期为最长。由几何三角形，初始偏心率矢量滞后阳光方向的角度应是

图 3.5-6

$$\theta=\arccos\left(\frac{e_{k}}{\rho}\right)$$

校正周期(以年为单位)为

$$T_{c}=\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{e_{k}}{\rho}\right)$$

按太阳同步控制模式,切向脉冲控制使偏心率矢量由超前太阳方向修正为滞后太阳方向一个等角度,即偏心率控制增量 Δe 垂直于太阳方向。另一方面,切向控制产生的偏心率增量 Δe 垂直并滞后于切向速度增量 Δv_{t} 的方向,即偏心率增量 Δe 沿卫星位置的径向方向。因此,太阳同步偏心率控制的控制时刻应在卫星地方平太阳时上午 6:00,或选择在卫星地方平太阳时下午 6:00,但施加的应是负方向的切向控制。

为了使偏心率的切向控制不引起轨道漂移率(半长轴)的变化,将单位偏心率控制分解为180°间隔的双脉冲控制,两次脉冲增量的方向相反,使产生的漂移率变化相互抵消,而偏心率增量叠加。同理,为使漂移率的切向控制不引起偏心率的变化,采用 180°间隔的双脉冲同向控制。因漂移率控制与脉冲作用点无关,东西位置保持的控制时刻通常选取在上、下午 6:00。

图 3.5-7 表示一种理想的单脉冲控制情况。该单脉冲同时校正半长轴和偏心率,脉冲的幅值主要决定于漂移的校正量(即半长轴的校正量),脉冲的作用点决定于偏心率校正增量 Δe 的方向。按太阳同步的控制模式,该偏心率增量 Δe 应接近垂直于太阳方向,而切向控制产生的偏心率增量沿卫星径向方向。因此,控制时刻选择在当地时间上午 6:00,半长轴和偏心率由偏差要素 a_{1}、e_{1} 修正为目标要素 a_{2} 和 e_{2}($e_{2}=e_{1}+\Delta e$)。

假定卫星的面质比为 0.1,偏心率摄动圆半径 $\rho=0.0011$,见式(2.4-8),要求偏心率引起经度日周期漂移的幅值小于 0.05°,即偏心率保持圆半径 $e_{k}\leqslant 0.00044$。如设置初始偏心率捕获的阳光滞后角为 $\theta=\arccos(e_{k}/\rho)=66.4°$,则校正周期最长为 47 d,校正速度增量(切向 Δv_{t})为 1.24 m/s,全年需速度增量 9.6 m/s。如给定校正周期为 15 d,则 $\theta=11.3°$,$\Delta v=0.27$ m/s,全年需速度增量 6.5 m/s。

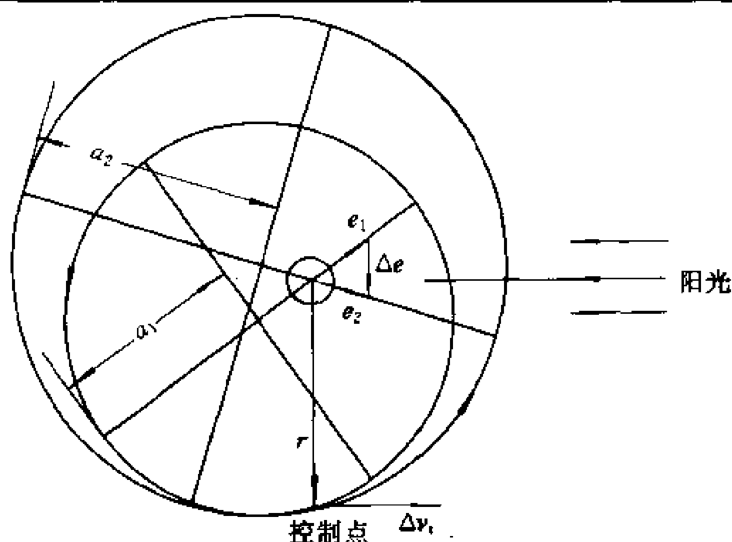


图 3.5-7

3.5.3 南北位置保持

由于卫星轨道与地球赤道面不重合，静止卫星每天在南北纬度方向周期性漂移，纬度漂移的幅值等于轨道的倾角。如倾角小于 1.5°，在东西方向的耦合漂移小于 0.01°。轨道倾角的长周期摄动是由日、月引力产生，平均漂移速度约为 0.85 (°)/年。如须保持倾角小于 0.1°，则每隔 90 天须校正一次。因此，在校正周期内可认为轨道倾角摄动是线性的，在轨道倾角摄动方程(2.3-25)中略去地球扁形摄动，倾角漂移的摄动方程可简化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}i_x}{\mathrm{d}t} &= 0.097\cos\Omega_{\mathrm{mS}} + 0.852 \\ \frac{\mathrm{d}i_y}{\mathrm{d}t} &= -0.13\sin\Omega_{\mathrm{mS}}\end{aligned}\right\} \qquad (3.5\text{-}12)$$

上式的单位是(°)/年。倾角摄动变化的速率和方向都与月球白道升交点的黄经 Ω_{mS}有关。令下标 P 表示摄动参数，有倾角摄动参数

$$i_{\mathrm{p}} = \left[\left(\frac{\mathrm{d}i_x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}i_y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}(t - t_0)$$

$$\Omega_{\mathrm{p}} = \arctan\left(\frac{\mathrm{d}i_x}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}i_y}{\mathrm{d}t}\right)$$

从 1995 年至 2005 年白道升交点黄经 Ω_{mS}约从 246°减至 52°，日、月摄动引起倾角漂移的方向 Ω_{p} 在 82°～96°范围内，即日、月摄动使倾角矢量 $\boldsymbol{i}$ 倒向春分点方向(参见图 1.7-4)。

对于单个静止卫星，南北位置保持仅限于保持轨道倾角不超出容许幅值，而对轨道升交点无特定要求。因此，倾角保持圆 C_{k} 即可表征南北位置保持的要求，见图 3.5-8。如倾角矢量 $\boldsymbol{i}$ 位于保持圆 C_{k} 内，则无需南北位置校正控制。仅当倾角矢量漂移至保持圆 C_{k} 右端边界时，施加法向控制 Δv_{N}，将倾角矢量校正回保持圆的左端边界，然后允许倾角矢量在保持圆内自由漂移，直至右端边界。

倾角校正的目标倾角矢量可以不是唯一的。在倾角保持圆 C_{k} 的右端圆周上，各点的倾角

幅值相同，但升交点经度不同，见图 3.5-8。以此圆周点作为起点，沿摄动方程(3.5-12)逆时间

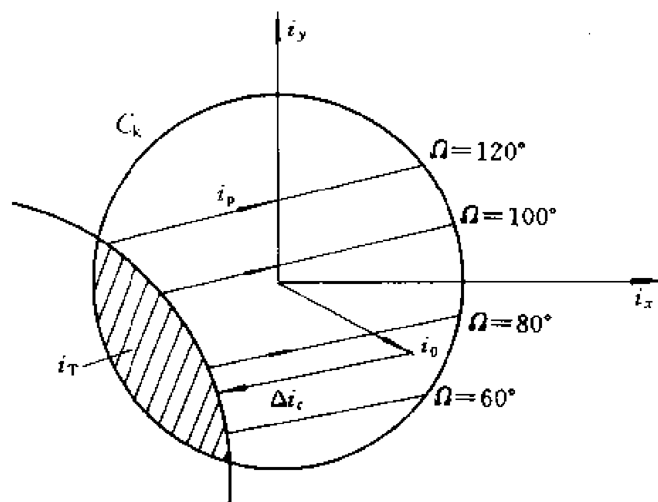


图 3.5-8

进行积分，经过同等年数在 C_k 圆左端形成一圆弧，此圆弧与 C_k 圆的相交区即为校正的目标倾角区 i_T。倾角校正纳入该区后，在给定年份内，倾角漂移不超出保持圆。

考虑各种实践问题，倾角校正的初始状态 i_0 可被选为 C_k 圆内某一点，见图 3.5-8。倾角校正的增量 Δi_c 的方向基本上沿日、月摄动负方向，即倾角增量的升交点赤经基本上应是 270°。由倾角控制方程(3.5-3)，侧向控制产生倾角增量的方向 Ω_c 为

$$\Omega_c = \arctan\left(\frac{\Delta i_x}{\Delta i_y}\right) = l_m,\ l_m + 180°$$

当 $\Delta v_N>0$(北向控制)，倾角控制作用时卫星的恒星时角为 l_m；当 $\Delta v_N<0$(南向控制)控制作用的恒星时角，为 $l_m+180°$。由于倾角控制时刻的恒星时角基本上恒定为 270°或 90°，因此控制时刻的地方平太阳时决定于每年的日期，由图 3.5-9，可归纳为表 3.5-2。

表 3.5-2

	北方控制	南方控制
春	早晨	傍晚
夏	午夜	中午
秋	傍晚	早晨
冬	中午	午夜

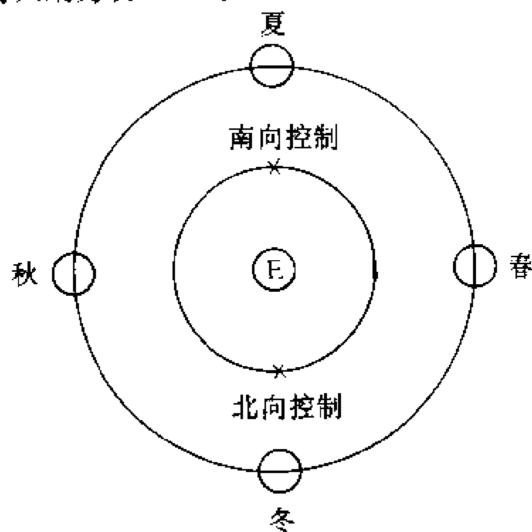


图 3.5-9

第四章　卫星轨道的确定

卫星轨道确定是实现卫星应用任务的重要保障之一。对卫星轨道的观测数据，并不是直接的轨道要素，而是在若干时刻或在若干时间区间内与卫星运动有关的若干参量，根据轨道动力学原理，通过特定的算法，计算得出轨道要素。

卫星轨道确定包括三个基本过程：数据的获取与预处理，初轨确定和轨道改进。

4.1　地面站测轨

初始轨道确定的含义是，由地面观测站若干次少量观测数据直接计算出卫星轨道的六要素，单次观测的数据可以包含若干独立的变量。以单个雷达站为例，单脉冲雷达可测得卫星至雷达站的斜距 ρ，由多普勒频移可测得该斜距的变化率 $\dot{\rho}$，雷达天线万向支架轴的角度传感器可测得卫星相对雷达站的方位角 A 和仰角 E，由万向支架跟踪系统可测得方位角、仰角的变化率 $\dot{A}$和 $\dot{E}$，总共同时测得六个独立参数。定义雷达站测量坐标系 $ox_r y_r z_r$，原点在雷达基准中心，$x_r y_r$ 为站置当地水平面，x_r 轴指东，y_r 轴指北，z_r 轴沿当地垂线指向天顶，见图 4.1-1。在测站坐标中，有斜距矢量 $\boldsymbol{\rho}$：

$$\boldsymbol{\rho}=\begin{bmatrix}\rho\cos E\sin A\\ \rho\cos E\cos A\\ \rho\sin E\end{bmatrix} \tag{4.1-1}$$

方位角 A 为卫星斜距在水平面的投影距北向的夹角。由测量数值可直接得出卫星相对雷达站的速度为

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}=\begin{bmatrix}\dot{\rho}\cos E\sin A-\rho\sin E\sin A\,\dot{E}+\rho\cos E\cos A\,\dot{A}\\ \dot{\rho}\cos E\cos A-\rho\sin E\cos A\,\dot{E}-\rho\cos E\sin A\,\dot{A}\\ \dot{\rho}\sin E+\rho\cos E\,\dot{E}\end{bmatrix} \tag{4.1-2}$$

令雷达站的位置矢量为 $\boldsymbol{R}$，由雷达站测量参数 $\boldsymbol{\rho}$ 和 $\dot{\boldsymbol{\rho}}$，可得卫星在赤道惯性坐标系的位置 $\boldsymbol{r}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{\rho}\\ \boldsymbol{v}&=\dot{\boldsymbol{\rho}}+\boldsymbol{\omega}_e\times\boldsymbol{r}\end{aligned}\right\} \tag{4.1-3}$$

$\boldsymbol{\omega}_e$ 为地球自转矢量。如雷达站的地理位置为经度 λ，纬度 ϕ，高程为 h，则雷达站的位置矢量 $\boldsymbol{R}$ 在地球坐标系可表示为[35]

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}(H+h)\cos\phi\cos\lambda\\ (H+h)\cos\phi\sin\lambda\\ [(1-e^2)H+h]\sin\phi\end{bmatrix} \tag{4.1-4}$$

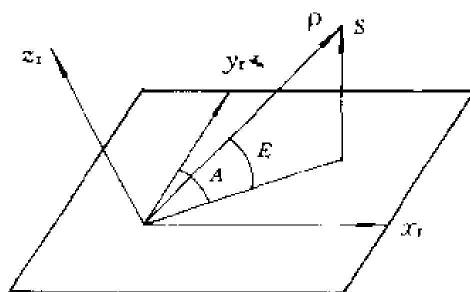


图　4.1-1

式中，e 为地球扁状的偏心率，$e=0.081\ 82$；H 为辅助参数，见图 4.1-2，有

$$H=\frac{R_e}{(1-e^2\sin^2\phi)^{\frac{1}{2}}}$$

R_e 为地球赤道半径(6 378.145 km)。根据雷达站测量坐标系的定义，与地球坐标系的转换矩阵 R_{re} 为

$$R_{re}=\begin{bmatrix}-\sin\lambda & \cos\lambda & 0\\ -\cos\lambda\sin\phi & -\sin\lambda\sin\phi & \cos\phi\\ \cos\lambda\cos\phi & \sin\lambda\cos\phi & \sin\phi\end{bmatrix}$$

由地球格林威治的恒星时角 G，可有地球坐标与赤道惯性坐标的转换矩阵 R_{ei}。由此，在赤道惯性坐标系中，卫星的位置和速度式(4.1-3)可写为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= R_{ei}^{T}(\boldsymbol{R}+R_{re}^{T}\boldsymbol{\rho})\\ \boldsymbol{v} &= R_{ei}^{T}R_{re}\dot{\boldsymbol{\rho}}+\tilde{\omega}_e\boldsymbol{r}\end{aligned}\right\}\tag{4.1-5}$$

对于不具备测速设备的雷达站，单次测轨仅获得卫星的位置矢量 $\boldsymbol{\rho}$，经测站坐标转换，得出卫星在赤道惯性坐标的位置矢量 $\boldsymbol{r}$。

使用光学观测时，仅获得卫星的视线单位矢量 $\boldsymbol{L}$，有 $\boldsymbol{\rho}=\rho\boldsymbol{L}$，

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\cos E\cos A\\ \cos E\sin A\\ \sin E\end{bmatrix}$$

经测站坐标转换，得卫星的赤经、赤纬(α,δ)，即有

$$R_{ei}^{T}R_{re}^{T}\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha\\ \sin\delta\end{bmatrix}$$

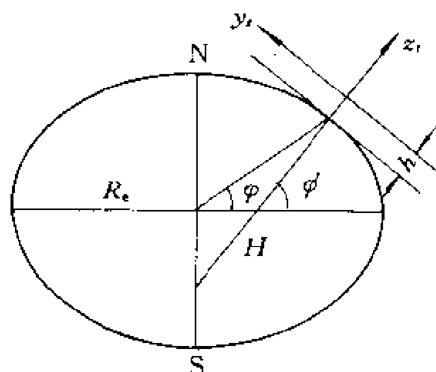


图 4.1-2

4.2 初始轨道的确定

4.2.1 单站定轨

第一章已阐明，如已知某一时刻卫星在赤道惯性坐标的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 和速度矢量 $\boldsymbol{v}$，则可直接得出卫星轨道的六要素。通常，单次观测仅获得卫星的位置矢量 $\boldsymbol{\rho}$，或卫星的视线矢量 $\boldsymbol{L}$(光学观测)。初轨确定的任务是由卫星的位置矢量计算轨道的六要素。最常用的方法是高斯法[35]。

假定在时刻 t_1，t_2 分别测得卫星的位置矢量 $\boldsymbol{\rho}_1$，$\boldsymbol{\rho}_2$，经测站坐标转换且考虑地球的自转，得出该两时刻卫星在赤道惯性坐标的位置矢量 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，两位置的时刻差 Δt 和真近点角距 Δf：

$$\Delta t=t_2-t_1$$

$$\Delta f=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2}{r_1r_2}\right)$$

通过两位置的轨道可有无限多，但时间差为 Δt 的轨道是唯一的。通常两位置的测轨时间差小于轨道周期，对于二体轨道，在位置 $\boldsymbol{r}_1$ 的卫星速度矢量 $\boldsymbol{v}_1$ 位于 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 的平面内（即轨道平面），见图 4.2-1，有矢量的线性组合式

$$\boldsymbol{r}_2 = F\boldsymbol{r}_1 + G\boldsymbol{v}_1 \tag{4.2-1}$$

式中，F 和 G 为标量。以 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_1$ 分别叉乘上式，即可分离出标量 F、G，有

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1)F &= (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_1)\\ (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1)G &= (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)\end{aligned}\right\} \tag{4.2-2}$$

上式两端的矢量都沿轨道面的法线，应用动量矩等式 $h=|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{v}_1|$，如两位置的角距小于 90°，则有

$$F = \frac{1}{h}|\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_1|$$

$$G = \frac{1}{h}|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2|$$

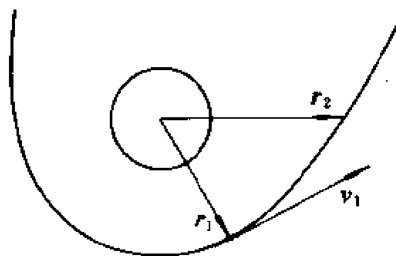


图　4.2-1

引用近地点坐标系 $OPQW$，单位矢量 $\boldsymbol{P}$ 在轨道面内指向近地点，单位矢量 $\boldsymbol{Q}$ 在轨道面内超前 $\boldsymbol{P}$ 90°，单位矢量 $\boldsymbol{W}$ 沿轨道法线且与动量矩 $\boldsymbol{h}$ 方向一致。相对此坐标系，卫星的位置 $\boldsymbol{r}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$ 可列为（见式(1.1-37)，(1.1-40)）

$$\boldsymbol{r} = r\cos f\,\boldsymbol{P} + r\sin f\,\boldsymbol{Q}$$

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[-\sin f\,\boldsymbol{P} + (e+\cos f)\,\boldsymbol{Q}]$$

$$\boldsymbol{h} = \sqrt{\mu p}\,\boldsymbol{W}$$

将第一，二代入式(4.2-2)，并引用轨道的椭圆方程(1.1-12)，它的等效公式 $r=r/(1+e\cos f)$，可得标量 F，G 为

$$F = \frac{1}{p}[r_2\cos f_2(e+\cos f_1) + r_2\sin f_2\sin f_1]$$

$$=1 - \frac{r_2}{p}(1-\cos\Delta f) \tag{4.2-3}$$

$$G = \frac{r_1 r_2 \sin\Delta f}{\sqrt{\mu p}} \tag{4.2-4}$$

上式中 f_1，f_2 为位置 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ 的真近点角，两位置的真近点角距 $\Delta f=f_2-f_1$ 可由测轨直接获得。

因此，如求得轨道的半通径 p，可直接得出标量值 F，G，代入式(4.2-1)，得出在位置 $\boldsymbol{r}_1$ 的轨道速度 $\boldsymbol{v}_1$：

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{G}(\boldsymbol{r}_2 - F\boldsymbol{r}_1) \tag{4.2-5}$$

从而可以完全确定轨道。

通常采用迭代法求半通径 p。设定初值 $p^{(0)}$：

$$p^{(0)} = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$$

并计算 $e\cos f_i$ 和 $e\sin f_i(i=1,2)$ 的值，其计算式为

$$e\cos f_i = \frac{p^{(0)}}{r_i} - 1 \qquad i = 1,2$$

$$e\sin f_1 = \frac{1}{\sin\Delta f}[e\cos f_1 \cos\Delta f - e\cos f_2]$$

$$e\sin f_2 = \frac{1}{\sin\Delta f}[-e\cos f_2 \cos\Delta f + e\cos f_1]$$

由此可得轨道要素的估值为

$$e = [(e\cos f_1)^2 + (e\sin f_1)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$a = p^{(0)}/(1-e^2)$$

$$n = (\mu/a^3)^{\frac{1}{2}}$$

以及两位置的偏近点角参数：

$$\sin E_i = \frac{r_i}{p}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\sin f_i \qquad i = 1,2$$

$$\cos E_i = \frac{r_i}{p}(e + \cos f_i) \qquad i = 1,2$$

根据平近点角 M 的定义最后得出两位置的飞行时间 $\Delta t^{(0)}$：

$$\begin{aligned}\Delta t^{(0)} &= \frac{1}{n}(M_2 - M_1)\\ &= \frac{1}{n}[(E_2 - E_1) + e(\sin E_1 - \sin E_2)]\end{aligned}$$

比较飞行时间的计算值和实测值之差 t_B：

$$t_B = \Delta t - \Delta t^{(0)} \tag{4.2-6}$$

选择更新值 $p^{(1)}$，迭代计算，直至 $|t_B| \ll \varepsilon$。

利用在三个不同时刻的测轨结果 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ 可直接求得半通径参数 p，偏心率 e 以及近地点坐标系的基矢量 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{W}$[35]。

对于二体轨道，矢量 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ 共面，有标量 c_1, c_2, c_3 使等式成立：

$$c_1\boldsymbol{r}_1 + c_2\boldsymbol{r}_2 + c_3\boldsymbol{r}_3 = 0 \tag{4.2-7}$$

轨道的椭圆方程(1.1-12)的矢量形式可写为

$$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r} = p - r$$

将偏心率矢量 $\boldsymbol{e}$ 与式(4.2-7)作标积，并引用上式，有

$$c_1(p - r_1) + c_2(p - r_2) + c_3(p - r_3) = 0 \tag{4.2-8}$$

再将矢量 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ 与式(4.2-7)作叉积，得

$$\left.\begin{aligned} c_2\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2 &= c_3\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1\\ c_1\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2 &= c_3\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3\\ c_1\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1 &= c_2\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3\end{aligned}\right\} \tag{4.2-9}$$

以 $\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1$ 乘式(4.2-8)并利用式(4.2-9)，在式(4.2-8)中消去 c_1, c_3，得

$$c_2\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3(p - r_1) + c_2\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1(p - r_2) + c_2\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2(p - r_3) = 0$$

消去常数 c_2，重新整理，得

$$\begin{aligned}& p(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1)\\ &= r_3(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2) + r_1(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3) + r_2(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1)\end{aligned} \tag{4.2-10}$$

上式左、右两端的矢量均沿轨道法线方向，因此，p 参数等于上式两端矢量幅值的比值。

光学观测提供的测量是纯角度量，经测站坐标系的转换，可得在赤道惯性坐标中的几何关系

$$\boldsymbol{r} = \rho \boldsymbol{L} + \boldsymbol{R} \tag{4.2-11}$$

式中，$\boldsymbol{L}$ 为角度测量所得的卫星视线单位矢量。$\boldsymbol{R}$ 为站置矢量。将式(4.2-11)自乘标积，得

$$r_2 = \rho^2 + 2\rho \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{R} + R^2 \tag{4.2-12}$$

上式含两个未知量 r 和 ρ，可用迭代法求解。首先，对于两个光学观测量 $\boldsymbol{L}_1$，$\boldsymbol{L}_2$，取对应位置的标量估值 r_1，r_2，由式(4.2-12)得卫星至测站的距离

$$\rho_i = -(\boldsymbol{L}_i \cdot \boldsymbol{R}) + [(\boldsymbol{L}_i \cdot \boldsymbol{R})^2 - (R^2 - r_i^2)]^{\frac{1}{2}} \qquad i = 1,2$$

再由几何关系式(4.2-11)得该两位置的位置矢量

$$\boldsymbol{r}_i = \rho_i \boldsymbol{L}_i + \boldsymbol{R} \qquad i = 1,2 \tag{4.2-13}$$

由此可得轨道平面法线矢量 $\boldsymbol{W}$：

$$\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)/r_1 r_2 \tag{4.2-14}$$

假定有第三次光学观测 $\boldsymbol{L}_3$，则由二体轨道的特点，第三位置矢量 $\boldsymbol{r}_3$ 同在 $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2$ 平面，即有$\boldsymbol{r}_3 \cdot \boldsymbol{W} = 0$，由几何关系式(4.2-11)和(4.2-14)可计算第三位置的测站距离

$$\rho_3 = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{W}/\boldsymbol{L}_3 \cdot \boldsymbol{W}$$

以及相应的第三位置的估计矢量

$$\boldsymbol{r}_3 = \rho_3 \boldsymbol{L}_3 + \boldsymbol{R} \tag{4.2-15}$$

由此得出初次迭代的三个位置矢量 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$((4.2-13)和(4.2-15))。再按式(4.2-10)可得轨道半通径 p 的估值，比较两位置飞行时间计算值与实测值之差式(4.2-6)，更新选择新估值 r_1，r_2，迭代计算，直至收敛。

4.2.2　三站定轨

如有三个地面站，测轨设备仅有测距，无测速和测角，在同一时刻测量卫星至测站的斜距，有几何关系式

$$\boldsymbol{\rho}_i = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_i \qquad i = 1,\ 2,\ 3 \tag{4.2-16}$$

下标 i 表示测站的序号。将上式自乘标积得三个非线性方程，

$$\rho_i^2 = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{\frac{1}{2}}$$

式中，x，y，z 为卫星矢量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标；x_i，y_i，z_i 为第 i 测站的站置坐标；ρ_i 为测量斜距。依靠对卫星位置初始估值，用迭代法解上述非线性方程组，可求得卫星在该时刻的位置矢量 $\boldsymbol{r}$，经多次测量，用高斯法即可定轨。

利用测站组成基线平面，由三站测距数值可直接求得卫星位置坐标。参见图 4.2-2，令测站 R_2 与 R_1 之间的基线矢量为 $\boldsymbol{b}_2$，测站 R_3 与 R_1 之间的基线为 $\boldsymbol{b}_3$，有几何关系：

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{\rho}_3$$

因站置给定，基线矢量 $\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$ 为已知矢量。以基平面 $\boldsymbol{b}_2\,\boldsymbol{b}_3$ 为基础，建立正交基线坐标系，原点在站置 R_1，基矢量为

$$\boldsymbol{i} = \frac{1}{b_2}\boldsymbol{b}_2, \qquad \boldsymbol{j} = \frac{\boldsymbol{b}_3 - (\boldsymbol{b}_3 \cdot \boldsymbol{i})\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{b}_3 - (\boldsymbol{b}_3 \cdot \boldsymbol{i})\boldsymbol{i}|}, \qquad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} \tag{4.2-17}$$

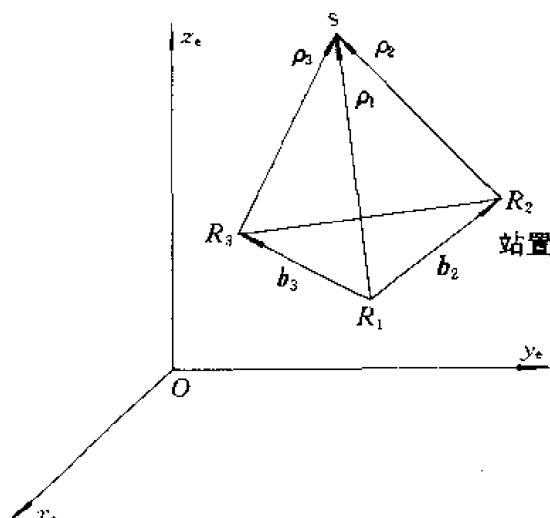


图 4.2-2

在此基线坐标系，卫星位置坐标可定义为

$$x_b = \boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{i}, \qquad y_b = \boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{j}, \qquad z_b = \boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{k} \tag{4.2-18}$$

将式(4.2-17)代入式(4.2-18)，须计算标积 $\boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2$ 和 $\boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{b}_3$，后者包含在下列式中，即

$$\rho_2^2 = (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{b}_2) \cdot (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{b}_2) = \rho_1^2 + b_2^2 - 2\boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2$$

$$\rho_3^2 = (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{b}_3) \cdot (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{b}_3) = \rho_1^2 + b_3^2 - 2\boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{b}_3$$

利用上式与式(4.2-18)可直接得出卫星位置坐标的等式。其中仅包含三站测距数值和站置坐标，即

$$\left.\begin{aligned} x_b &= \frac{1}{2b_2}(\rho_1^2 - \rho_2^2 + b_2^2) \\ y_b &= \frac{1}{2(\boldsymbol{b}_3 \cdot \boldsymbol{j})}\left[(\rho_1^2 - \rho_3^2 + b_3^2 - 2(\boldsymbol{b}_3 \cdot \boldsymbol{i})x_b\right] \\ z_b &= (\rho_1^2 - x_b^2 - y_b^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{4.2-19}$$

引用基线坐标与地球坐标的转换矩阵 $\boldsymbol{R}_{be} = |\boldsymbol{i}\ \boldsymbol{j}\ \boldsymbol{k}|$，可得卫星在赤道惯性坐标的位置矢量 $\boldsymbol{r}$：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}_{ei}^{T}[\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_{be}^{T}|x_b\ y_b\ z_b|^{T}]$$

另一种方法是将几何关系式(4.2-16)转成线性方程组，便于误差传递分析。令测站至卫星的斜距单位矢量为 $\boldsymbol{L}_i$，即有 $\boldsymbol{\rho}_i = \rho_i \boldsymbol{L}_i$，将矢量 $\boldsymbol{L}_i$ 与式(4.2-16)两端标积，得

$$\boldsymbol{L}_i \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{L}_i \cdot \boldsymbol{R}_i + \rho_i$$

将上式改写为矩阵形式，得线性方程组

$$\boldsymbol{Gr} = \boldsymbol{DR} + \boldsymbol{\rho} \tag{4.2-20}$$

式中 $\boldsymbol{G}$ 是 3×3 维矩阵，由斜距单位矢量 $\boldsymbol{L}_i$ 的方向余弦 L_{ix}, L_{iy}, L_{iz}组成：

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} L_{1x} & L_{1y} & L_{1z} \\ L_{2x} & L_{2y} & L_{2z} \\ L_{3x} & L_{3y} & L_{3z} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\rho}$ 是由斜距测量 ρ_i 组成的 3 维矢量，$\boldsymbol{R}$ 是 9 维矢量，由测站站置坐标 x_i, y_i, z_i 组成：

$$\boldsymbol{R} = (x_1\ y_1\ z_1\ \cdots\ x_3\ y_3\ z_3)^{T}$$

$\boldsymbol{D}$ 是 3×9 维矩阵，由斜距矢量的方向余弦组成：

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} L_{1x} & L_{1y} & L_{1z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{2x} & L_{2y} & L_{2z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{3x} & L_{3y} & L_{3z} \end{bmatrix}$$

方程组(4.2-20)的解为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{DR}+\boldsymbol{\rho}) \tag{4.2-21}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的元素是测站至卫星斜距矢量的方向余弦，方程式(4.2-21)须用迭代法才可求出，由卫星位置的估值得方向余弦的估值。利用式(4.2-21)，有利于分析测距误差及站置布局对卫星位置估算精度的影响。假定站置无误差，测距误差为 $\Delta\boldsymbol{\rho}$,引起的定轨误差由式(4.2-21)得出为 $\Delta\boldsymbol{r}$：

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{G}^{-1}\Delta\boldsymbol{\rho} \tag{4.2-22}$$

定义测距误差的协方差阵为

$$\mathrm{cov}(\delta\boldsymbol{\rho})=E[(\delta\boldsymbol{\rho})(\delta\boldsymbol{\rho})^{\mathrm{T}}]$$

则由式(4.2-22)定轨误差的协方差阵为

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(\Delta\boldsymbol{r}) &=E[(\Delta\boldsymbol{r})(\Delta\boldsymbol{r})^{\mathrm{T}}] \\ &=\boldsymbol{G}^{-1}\mathrm{cov}(\delta\boldsymbol{\rho})(\boldsymbol{G}^{-1})^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

如三站测距误差互不相关，并且有同一方差值 σ^2，则测距协方差阵为单位矩阵与因子 σ_ρ^2 的乘积，定轨误差方差阵可化为

$$\mathrm{cov}(\Delta\boldsymbol{r})=\sigma_\rho^2(\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G})^{-1} \tag{4.2-23}$$

令定轨误差矢量表示为 $\Delta\boldsymbol{r}=(\Delta x\ \Delta y\ \Delta z)^{\mathrm{T}}$，各坐标分量的方差为 σ_x^2，σ_y^2，σ_z^2，由方差阵式(4.2-23)，得定轨误差的估值

$$\sigma_r=(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2)^{\frac{1}{2}}=[\mathrm{tr}(\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G})^{-1}]^{\frac{1}{2}}\cdot\sigma_\rho$$

式中 tr 表示矩阵的迹，右端的因子为定轨误差的权系数，其分母是矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的模 $|\boldsymbol{G}|$，矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的元素是卫星相对测站视线的方向余弦。因此矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的模 $|\boldsymbol{G}|$ 与测站的空间分布有着密切关系，特别对于静止卫星，卫星对测站的方向余弦基本不变，误差权系数起恒定的影响。将矩阵 $\boldsymbol{G}$ 写成展开形式，有

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} \dfrac{x-x_1}{\rho_1} & \dfrac{y-y_1}{\rho_1} & \dfrac{z-z_1}{\rho_1} \\ \dfrac{x-x_2}{\rho_2} & \dfrac{y-y_2}{\rho_2} & \dfrac{z-z_2}{\rho_2} \\ \dfrac{x-x_3}{\rho_3} & \dfrac{y-y_3}{\rho_3} & \dfrac{z-z_3}{\rho_3} \end{bmatrix}$$

如仅考虑矩阵的行列式，则上式矩阵的行列式等效为

$$|\boldsymbol{G}|=\frac{1}{\rho_1\rho_2\rho_3}\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix}=\frac{6V}{\rho_1\rho_2\rho_3}$$

式中 V 是由卫星和三个站置组成的四边形的体积，参见图 4.2-2。可见，体积越大，模 $|\boldsymbol{G}|$ 越大，误差权系数越小，测距误差对定轨误差的影响越小。因此，三站之间的基线越长对定轨越有利。

在分析轨道测量精度的文献中，常称该权系数$[\mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}}G)^{-1}]^{\frac{1}{2}}$为“几何精度降低率”，GDOP (Geometrical Dilution of Precision)。

4.3 轨道改进

根据少量观测数据计算得出的轨道参数(称为初轨)的误差较大。因为，一方面没有充分利用大量观测数据，进行滤波，减少观测误差的影响；另一方面，初轨计算是建立在二体轨道的原则上，没有考虑各种空间摄动对轨道的影响。初轨参数可作为精确定轨的初条件或用于地面站跟踪卫星的预报。

利用大量观测数据，引入轨道摄动影响的模型，通过采用合适的算法，提高定轨精度，称为轨道改进或称轨道估计。轨道改进的基本思想是，比较轨道的实际观测数据与该观测参数仿真模型的计算值之差，不断地改进轨道参数的估值，直至观测数据与计算数据非常相近(加权平方和为极小)，该估值即为精轨参数。为此，轨道改进的建模包含三种模型：状态模型、观测模型和估计模型。

状态是泛指描述某过程的参量。对于状态估计，状态即为需要被确定的参数，它们的集合组成状态矢量。在卫星轨道确定问题中，轨道参数必是状态量，此外还可包含与轨道运动模型有关的轨道摄动参数、与轨道测量有关的某些系统性的观测误差。描述轨道的参数还可有两种模型：轨道六要素，或轨道的位置和速度矢量。描述这些状态量变化过程的模型为状态方程。因此，状态模型的建模包含状态量的选取，以及状态方程的规模。例如，以轨道六要素为基础的状态模型的状态量$\boldsymbol{x}$可列为

$$\boldsymbol{x} = |a\ e\ i\ \Omega\ \omega\ M_0\ M_1\ M_2|^{\mathrm{T}} \tag{4.3-1}$$

式中，M_0，M_1，M_2三个参数描述轨道平近点角变化，即状态模型假定轨道摄动(例如大气摄动)仅反映在轨道平面内平近点角的变化。例如，有模型等式

$$M(t) = M_0 + M_1 t + M_2 t^2$$

而其他五个轨道要素均为常值。按此模型，状态方程可写成

$$\dot{\boldsymbol{x}} = 0$$

另一类状态矢量引入卫星运动参数和轨道摄动作用参数，即

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{r}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{a})^{\mathrm{T}} \tag{4.3-2}$$

式中，$\boldsymbol{a}$代表被估计的摄动加速度，例如太阳光压、日-月引力等。此类状态的方程可列为

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}} = -\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{a}(t)$$

式中，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t)$代表确定性的地球摄动。$\boldsymbol{a}(t)$代表被估计的摄动。因此，状态方程的一般形式为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{a}(t)$$

观测模型的建模，包含轨道观测参数及其数据量的选取，以及依据观测参数建立观测仿真的计算模型。观测参数可以是部分的基本测量，如测距或测角、测速等。某一时刻观测参数的集合或若干时刻观测参数的总集合组成观测矢量$\boldsymbol{y}$，相应的观测仿真模型的计算矢量构成观测模型矢量$\boldsymbol{z}$，根据设定的轨道状态量$\boldsymbol{x}$，由空间几何关系得仿真计算模型：

$$z = g(\boldsymbol{x},t)$$

在实际观测过程中，因观测误差和观测模型误差，以及观测模型中状态量的估计误差在观测矢量 $\boldsymbol{y}$ 和观测模型计算矢量 $\boldsymbol{z}$ 之间存在残差 $\boldsymbol{\varepsilon}$，故观测模型归结为观测方程：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{\varepsilon} = g(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.3-3}$$

轨道估计的建模是选用合适的状态估计算法，根据观测方程的残差，不断改进状态量的估计，使残差趋于最小。

有两种不同的轨道估计算法——批量处理和递推处理。批量处理是基于在一段时间内获得的一批观测数据进行反复迭代运算，得出在此时间段内某一特定时刻的最优轨道估计。由观测数据组成的观测矢量的维数远大于待估轨道状态量的维数。通常应用最小二乘法求解，精度较高，迭代运算过程稳定，但是估计过程是阶段性，不能即时得出结果，适用于轨道确定的事后处理。递推处理是在初期处理的基础上，由即时观测数据更新现有估计，得出新的估计。这种估计算法是连续性，适用于轨道观测实时处理，它形成滤波过程——卡尔曼滤波，用于轨道改进的非线性模型，但须确保迭代运算的收敛性。

为简明，下文概述基于批量处理的最小二乘的轨道微分改进。有关卡尔曼滤波的应用可参阅文献[36]，[37]。

令在时间 $t=t_1,\cdots,t_k$ 区间的观测构成 m 维观测矢量 $\boldsymbol{y}$，相应该时刻的观测模型矢量 $\boldsymbol{z}$ 是由卫星在该时刻的位置和速度，结合空间几何关系计算得出。由于批量数据的时间区间已给定，根据状态方程，在 $t_1,\cdots,t_k$ 时刻的卫星位置和速度直接决定于初始时刻 t_0 的 n 维状态量 $\boldsymbol{x}$，例如，t_0 时刻的状态量(4.3-1)或(4.3-2)。因此，观测方程的残差是该状态量的函数，通过残差的加权最小二乘解，得出该状态量的最优估计 $\hat{\boldsymbol{x}}$。最小二乘的指标函数为

$$Q(\hat{\boldsymbol{x}}) = [\boldsymbol{y} - g(\hat{\boldsymbol{x}},t)]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W}[\boldsymbol{y} - g(\hat{\boldsymbol{x}},t)] + [\boldsymbol{x}_0 - \hat{\boldsymbol{x}}]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W}_0[\boldsymbol{x}_0 - \hat{\boldsymbol{x}}] \tag{4.3-4}$$

式中 $\boldsymbol{x}_0$ 为状态量 $\boldsymbol{x}$ 的先验估计，有

$$E(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_0$$

$$E[(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}] = P_0$$

且上式中，$\boldsymbol{W}_0 = P_0^{-1}$ 为 $n\times n$ 维权系数阵。如无先验信息，则 $\boldsymbol{W}_0$ 阵为零，指标函数不含第二项。上式中，$\boldsymbol{W}$ 为 $m\times m$ 维权系数阵，$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{R}^{-1}$，$\boldsymbol{R}$ 为观测误差的方差阵。如不同参数的观测和不同时刻的观测都是不相关的，则 $\boldsymbol{W}$ 为对角阵，其元素为各观测方差的倒数。

为求非线性函数(4.3-4)的极值问题，应使观测模型 $g(\boldsymbol{x},t)$ 线性化，然后迭代求解。对于第 i 次迭代的状态估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_i$，有线性化

$$g(\boldsymbol{x},t) = g(\hat{\boldsymbol{x}}_i,t) + \boldsymbol{G}_i \Delta \boldsymbol{x}_i \tag{4.3-5}$$

式中

$$\Delta \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}_i$$

$$\boldsymbol{G}_i = \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{x}}_i}$$

矩阵 $\boldsymbol{G}$ 为 $m\times n$ 维矩阵，简称为观测矩阵，包括两重偏导数，即观测量对卫星在 $t=t_1,\cdots,t_k$ 时刻的位置和速度的偏导数，以及后者相对 t_0 时刻状态量的偏导数。将线性化关系式(4.3-5)代入指标函数(4.3-4)，求其相对线性化增量 $\Delta \boldsymbol{x}_i$ 的极值解，令其一阶导数为零，

$$\frac{\partial Q}{\partial(\Delta \boldsymbol{x}_i)} = 0$$

利用矢量标积函数相对矢量的偏导数关系式：

$$\frac{\partial(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})}{\partial \boldsymbol{a}} = \boldsymbol{b}, \qquad \frac{\partial(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}} = \boldsymbol{b}$$

可得

$$\frac{\partial Q}{\partial(\Delta \boldsymbol{x}_i)} = -2\boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(\Delta \boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{G}_i\Delta \boldsymbol{x}_i) - 2\boldsymbol{W}_0(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_i - \Delta \boldsymbol{x}_i) = 0$$

式中，$\Delta \boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{y} - g(\boldsymbol{x}_i, t)$。因此，使 $Q(\Delta \boldsymbol{x}_i)$ 极小的解 $\Delta \hat{\boldsymbol{x}}_i$ 为

$$\Delta \hat{\boldsymbol{x}}_i = [\boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{G}_i + W_0]^{-1}[\boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\Delta \boldsymbol{y}_i + \boldsymbol{W}_0(\boldsymbol{x}_0 - \hat{\boldsymbol{x}}_i)] \tag{4.3-6}$$

从而得第 $i+1$ 次迭代的新的状态估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_{i-1}$：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{i+1} = \hat{\boldsymbol{x}}_i + \Delta \hat{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{x}_0 + \sum_{l=1}^{i}\Delta \hat{\boldsymbol{x}}_l \tag{4.3-7}$$

迭代估计的收敛性要求是 $\| \hat{\boldsymbol{x}}_{i+1} - \hat{\boldsymbol{x}}_i \| \ll \varepsilon$。

从式(4.3-6)可看出，线性化观测矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的性质对轨道改进的可能性是重要因素，矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的元素反映着观测量对状态量的灵敏度。如灵敏度大于 1，则可称该状态量是能观的。轨道改进的能观性还反映在矩阵($\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{G}$)的性质，如矩阵的条件数越好，求逆的精确性越高，轨道改进的能观性越好，迭代收敛越快。

4.4 自主定轨

卫星的自主性是提高卫星任务应用效益和提高卫星在轨运营管理效率的重要方面。卫星自主定轨(或称自主导航)是卫星自主性的主要内容。自主导航系统包含轨道测量和轨道运算两部分。为确定卫星绕地球的轨道，导航系统的观测方案必须含有描述卫星与地球之间的几何关系的量值，直接的几何关系有如卫星相对地球的方向或距离，间接的几何关系有如卫星至参考卫星(导航星)的距离。卫星自主导航的观测模式可分为三类：

(1) 卫星对天体/地球的张角测量。太阳、月亮和恒星等天体在赤道惯性坐标的星历是已知的，可作为定轨的参考体。

(2) 卫星至空间无线电信标的距离测量。这些无线电信标来自位于静止轨道的中继卫星，或位于中轨道的导航卫星。这些参考卫星的星历是已知的，同样可作为定轨的参考体。

(3) 卫星相对地球表面控制点的方向测量。

4.4.1 利用星敏感器的自主定轨

利用星敏感器进行卫星轨道自主确定的观测模式可列举三种：(1) 星光与地心方向的夹角；(2) 星光折射；(3) 地球掩星时刻。

1. 星光角距观测模型

星敏感器可识别星，并测量该星光 $\boldsymbol{s}$ 在星敏感器测量坐标系的方向，通过星敏感器安装矩阵的转换，可算得星光在卫星本体坐标的方向 $\boldsymbol{s}_b$。利用红外地球敏感器可以直接测量卫星与地球之间的几何关系——卫星垂线方向，或卫星至地球边缘的切线方向，算得地心矢量 $\boldsymbol{E}$ 在卫

星本体坐标的方向 E_b。如两者的测量是同时的，在测量过程卫星姿态保持不变，则可以直接测算出星光与地心的夹角 η，称为星光角距，有

$$\eta = \arccos(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{s})_b$$

星光角距是某一时刻两矢量之间的夹角，与姿态状态相对独立，并且星光角距在不同坐标的夹角保持不变。在本体坐标中测算的角距 η，也可用于赤道惯性坐标。如应用两只星敏感器分别观测星光 s_1，s_2 的角距为 η_1，η_2，则对卫星位置的状态矢量 $\boldsymbol{r}$ 进行状态估计的观测方程（见图 4.4-1）可列为

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= \arccos\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r} \cdot \boldsymbol{s}_1\right)_i + \varepsilon_1 \\ \eta_2 &= \arccos\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r} \cdot \boldsymbol{s}_2\right)_i + \varepsilon_2 \end{aligned}\right\} \tag{4.4-1}$$

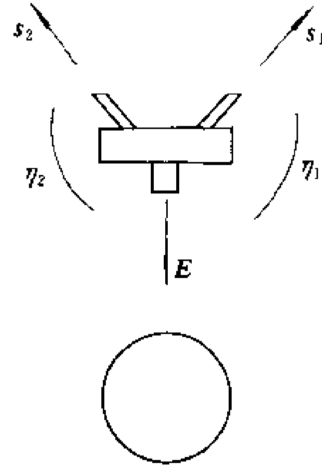


图 4.4-1

式中，下标 i 表示赤道惯性坐标系；ε_1，ε_2 为残差。

令卫星位置矢量的单位矢量为 $\boldsymbol{P}$，两只星敏感器的星光角距观测模型可改写成

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= \arccos(-\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{s}_1)_i \\ \eta_2 &= \arccos(-\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{s}_2)_i \end{aligned}\right\} \tag{4.4-2}$$

由于 $(s_1)_i$，$(s_2)_i$ 为已知，加以模值条件 $|\boldsymbol{P}|=1$，从方程(4.4-2)可直接解算出观测时刻的卫星位置的单位矢量 $\boldsymbol{P}$。如以 $\boldsymbol{P}$ 作为观测量，则状态估计的观测方程可列为

$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.4-3}$$

由双星的星光角距测量得出的卫星矢量 $\boldsymbol{P}$，还可直接进行初轨确定。令三个观测时刻 t_1，t_2，t_3 得出的卫星矢量为 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，$\boldsymbol{P}_3$。如三个观测时刻相隔不长，可以用数值微分得出在中间时刻 t_2 矢量 $\boldsymbol{P}_2$ 的变化率 $\dot{\boldsymbol{P}}_2$ 和 $\ddot{P}_2$。应用拉格朗日插值公式，矢量 $\boldsymbol{P}$ 的时间函数可列为[35]

$$\boldsymbol{P}(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}\boldsymbol{P}_1 + \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}\boldsymbol{P}_2 + \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\boldsymbol{P}_3 \tag{4.4-4}$$

上式在 $t=t_1$，t_2，t_3 时刻分别为 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，$\boldsymbol{P}_3$。将式(4.4-4)微分，可得

$$\dot{\boldsymbol{P}}(t) = \frac{2t-t_2-t_3}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}\boldsymbol{P}_1 + \frac{2t-t_1-t_3}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}\boldsymbol{P}_2 + \frac{2t-t_1-t_2}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\boldsymbol{P}_3 \tag{4.4-5}$$

$$\ddot{\boldsymbol{P}}(t) = \frac{2}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}\boldsymbol{P}_1 + \frac{2}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}\boldsymbol{P}_2 + \frac{2}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\boldsymbol{P}_3 \tag{4.4-6}$$

令式(4.4-5)，(4.4-6)中 $t=t_2$，即得中间时刻矢量 $\boldsymbol{P}$ 的变化率 $\dot{\boldsymbol{P}}_2$ 和 $\ddot{\boldsymbol{P}}_2$。由此，在 t_2 时刻卫星的位置和速度（略去下标"2"）可表达为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= r\boldsymbol{P} \\ \dot{\boldsymbol{r}} &= \dot{r}\,\boldsymbol{P} + r\dot{\boldsymbol{P}} \end{aligned}\right\} \tag{4.4-7}$$

代入二体轨道方程式

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\mu\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}$$

可得含有未知标量 r，$\dot{r}$，$\ddot{r}$ 的非线性式

$$\ddot{r}\boldsymbol{P}+2\dot{r}\dot{\boldsymbol{P}}+r(\ddot{\boldsymbol{P}}+\frac{\mu}{r^{3}}\boldsymbol{P})=0$$

由已知矢量 $\boldsymbol{P}$，$\dot{\boldsymbol{P}}$，$\ddot{\boldsymbol{P}}$，上式为矢量方程，代表三个分量方程组。通过迭代求解可得标量 r 和 $\dot{r}$，再代入式(4.4-7)，即得卫星在 t_2 时刻的位置和速度，从而可唯一确定初轨。

2. 星光折射观测模型

由于大气层的覆盖，地球边缘显得模糊，即使在红外波段也很难精确地确定地球边缘的位置，因此，利用光学系统获得地心方向的观测数据的精度较低，与星敏感器的精度不甚匹配。如卫星的星敏感器同时观测两颗星，其中一颗星的星光高度远大于大气层的高度，另一颗星的星光透射大气层，受到大气折射。这样两颗星在星敏感器焦面上的角距将不同于标称值，此角距的变化量即为星光折射角。

星光折射角与大气密度的关系较精确，大气密度随高度的变化也有较准确的模型，从而可以较精确地得出星光在大气层中的高度。这个高度观测量反映了卫星和地球之间的几何关系，因此，基于大气模型的星光折射观测获得的观测量比较精确[38]。

参见图 4.4-2，地球大气层将星光向内折射，入射光线越靠近地球，折射角越大。因此，当星光位于靠近卫星/地平下方时仍然可观，在卫星头部(顺速度方向)，星光提前从地平升起，而在尾部(逆速度方向)，星光迟迟落下。

假定地球大气层是对称球形，则星光折射角 γ 仅决定于星光在大气层距地表面的高度，简称为切线高度 h_t。根据大气密度模型，两者的函数关系可以较准确地表达为

$$\gamma=2.21\times10^{-2}\exp(-0.14h_t) \tag{4.4-8}$$

式中，γ 的单位为 rad，h_t 的单位为 km。例如，当切线高度为 25 km 时，折射角为 137.6″。

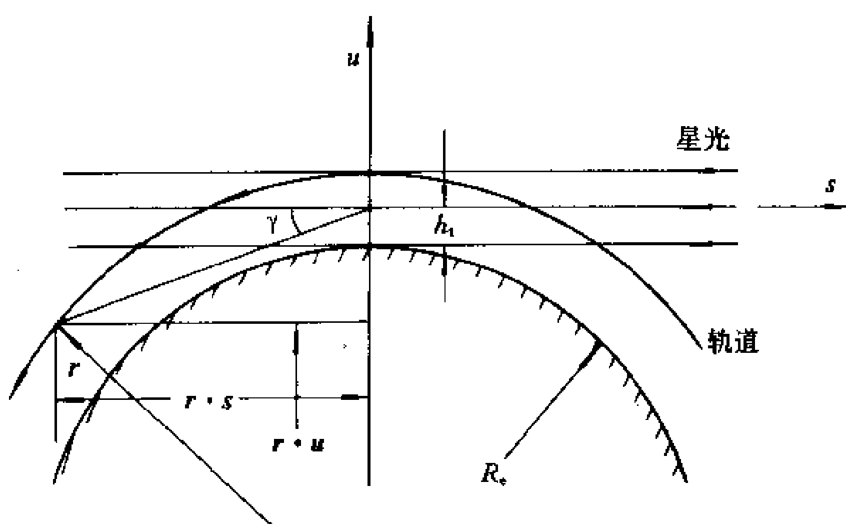


图 4.4-2

令星光矢量为 $\boldsymbol{s}$，由地球指向被观测的星，定义矢量 $\boldsymbol{u}$ 为在星光与卫星位置矢量组成的平面内垂直于星光的单位矢量，即

$$\boldsymbol{u}=\frac{(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{s}}{|(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{s}|} \tag{4.4-9}$$

在图 4.4-2 中，标积 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}$ 为卫星位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 在矢量 $\boldsymbol{u}$ 方向上的投影，$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}$ 为卫星沿星光方向至 $\boldsymbol{u}$ 矢量方向的垂直距离。如星敏感器由尾部观测，则可得观测方程为

$$h_t = \boldsymbol{r} \cdot \frac{(\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{s}}{|(\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{s}|} - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s})\tan\gamma - R_e + h_b \tag{4.4-10}$$

式中，h_t 是由实测 γ 角经式(4.4-8)换算得出的观测量；h_b 为星光切线高度的系统误差；矢量 $\boldsymbol{s}$ 是被折射的那颗星的星光方向，由星历表得出。

3. 掩星观测模型

星光折射观测的精度是建立在大气模型准确度的基础上，此模型跨越的范围从 20 km～80 km，可以认为大范围的模型准确性比小范围的差，约束使用大气模型的范围有利于提高观测量的精度。约束的极限是取星光的切线高度等于某固定值，一般取最低高度，$h_{min}=20$ km，星光折射角为最大值 $\gamma_{max}=227.2''$。轨道观测量选为星光折射角等于 γ_{max}时的时刻 t^*，在此时刻后，认为星光不可见，此时刻为掩星时刻。掩星观测模型为

$$\boldsymbol{r}(t^*) \cdot \frac{(\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}(t^*)) \times \boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}(t^*) \times \boldsymbol{s}|} - [\boldsymbol{r}(t^*) \cdot \boldsymbol{s}]\tan\gamma_{max} = R_e + h_{min}$$

4.4.2 利用导航星的自主定轨

对于用户卫星的自主定轨，导航星的作用相当于将地基测轨移至已精确确定的地球轨道上，成为天基测轨。导航星受主控站和监控站的监测和跟踪，得到的星历表很精确。导航星的星载时钟与全球定位系统的时间精确同步。导航星发射的电文包含该时间的同步信息、卫星星历表和校正时钟误差等参数。用户卫星接收到导航星的时间码，与本星时间的比差为电波传播时间乘以光速，即得导航星至用户卫星的斜距，称为伪距。以此为基础，用户卫星还可测导航星伪距的变化率。

由伪距测量原理得测量方程

$$\rho^0 = \rho + c(\Delta t_u - \Delta t_n) + c\Delta t_a \tag{4.4-11}$$

式中，ρ 为用户卫星至导航星的真距离；

ρ^0 为用户卫星至导航星的伪距；

c 为光速；

Δt_n 为导航星时钟相对全球定位系统时间的偏差；

Δt_u 为用户卫星时钟相对全球定位系统时间的偏差；

Δt_a 为电波经电离层的传播延迟。

测速是通过测量导航卫星载波的多普勒频移实行的。

与地面单站测轨、定轨相似，测量单个导航星的伪距、伪距变率，以及依据该星的星历，用户卫星可自主地进行初轨确定，参见图 4.4-3。

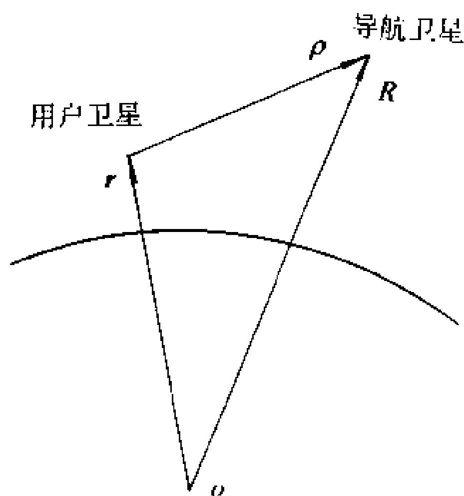


图 4.4-3

令导航星的星历位置矢量为 $\boldsymbol{R}$，待定用户卫星的位置矢量为 $\boldsymbol{r}$，有几何关系

$$\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho} \tag{4.4-12}$$

由自身标积，得

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})=\rho^2$$

再微分，得

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot(\dot{\boldsymbol{R}}-\dot{\boldsymbol{r}})=\rho\dot{\rho}$$

如无测量误差，上两式的标量 ρ，$\dot{\rho}$为测量的伪距及其变率。如在时刻 t_1，t_2，t_3 测得伪距及其变率 ρ_i，$\dot{\rho}_i(i=1, 2, 3)$，则有相应时刻的非线性方程

$$\left.\begin{aligned}&(X_i-x_i)^2+(Y_i-y_i)^2+(Z_i-z_i)^2=\rho_i^2\\&(X_i-x_i)(\dot{X}_i-\dot{x}_i)+(Y_i-y_i)(\dot{Y}_i-\dot{y}_i)+(Z_i-z_i)(\dot{Z}_i-\dot{z}_i)=\rho_i\dot{\rho}_i\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad(i=1, 2, 3)\end{aligned}\right\} \tag{4.4-13}$$

式中 X_i，Y_i，Z_i 和 $\dot{X}_i$，$\dot{Y}_i$，$\dot{Z}_i(i=1, 2, 3)$为某颗导航星矢量 $\boldsymbol{R}$ 在三个时刻的坐标和速度分量，是已知量。x_i，y_i，z_i 和 $\dot{x}_i$，$\dot{y}_i$，$\dot{z}_i(i=1, 2, 3)$为用户卫星矢量 $\boldsymbol{r}$ 在相应时刻的坐标和速度分量，是待确定量。按二体轨道的特点，在三个时刻用户卫星的位置矢量 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$ 位于同一轨道平面。若已知某一时刻 t_1 的位置 $\boldsymbol{r}_1$ 和速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_1$，则任意时刻 t_2 的位置和速度矢量 $\boldsymbol{r}_2$，$\dot{\boldsymbol{r}}_2$ 可以用 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_1$ 的线性组合表示，因为前者总是在 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_1$ 决定的平面内。在此线性组合中，$\boldsymbol{r}_1$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_1$ 的系数是时间差的函数，并且与 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$有关，即有线性组合式[35]

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}_2&=F(\boldsymbol{r}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_1, t_2-t_1)\boldsymbol{r}_1+G(\boldsymbol{r}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_1, t_2-t_1)\dot{\boldsymbol{r}}_1\\\dot{\boldsymbol{r}}_2&=\dot{F}(\boldsymbol{r}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_1, t_2-t_1)\boldsymbol{r}_1+\dot{G}(\boldsymbol{r}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_1, t_2-t_1)\dot{\boldsymbol{r}}_1\end{aligned}\right\} \tag{4.4-14}$$

函数 F，G 可以分解为(t_2-t_1)的级数，对于 t_3 时刻的 $\boldsymbol{r}_3$，$\dot{\boldsymbol{r}}_3$，有与式(4.4-14)相似的 $\boldsymbol{r}_1$，$\dot{\boldsymbol{r}}_1$ 的线性组合式。因此，在式(4.4-13)$i=2, 3$ 的方程中，属于 t_2，t_3 时刻的卫星矢量的各分量均为 t_1 时刻卫星矢量的坐标分量的函数，由此得出包含 x_1，y_1，z_1 和 $\dot{x}_1$，$\dot{y}_1$，$\dot{z}_1$ 六个未知量的六个非线性方程(4.4-13)，可用牛顿-拉夫森迭代法求解。

依据几何关系式(4.4-12)，如在同一时刻，测得三颗导航星与用户卫星的伪距，可建立三个包含用户卫星坐标 x，y，z 的非线性方程。从而利用伪距测量，可求得若干时刻的卫星坐标，再应用高斯方法确定轨道。从几何关系角度，利用三颗导航星伪距定轨和利用地面三站测距定轨本质上相似[40]。图 4.4-4 是导航星与用户卫星的几何关系，导航星位置 R_1，R_2，R_3 与三个地面测距站相当，但测距矢量 $\boldsymbol{\rho}_i$ 的指向相反。令由导航星 1 指向导航星 2,3 的相对矢量为 $\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$，有几何关系

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_1, \qquad \boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{R}_3-\boldsymbol{R}_1 \tag{4.4-15}$$

和

$$\boldsymbol{\rho}_1=\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{\rho}_3-\boldsymbol{b}_3$$

建立导航星星座坐标系，原点位于导航星 1，以相对矢量 $\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$ 组成坐标平面，坐标矢量定义为

$$\boldsymbol{i}=\frac{1}{b_2}\boldsymbol{b}_2, \qquad \boldsymbol{j}=\frac{\boldsymbol{b}_3-(\boldsymbol{b}_3\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{b}_3-(\boldsymbol{b}_3\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{i}|}, \qquad \boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} \tag{4.4-16}$$

在此坐标系中，用户卫星的位置坐标可描述为

$$x_b=(-\boldsymbol{\rho}_1)\cdot\boldsymbol{i}, \quad y_b=(-\boldsymbol{\rho}_1)\cdot\boldsymbol{j}, \quad z_b=(-\boldsymbol{\rho}_1)\cdot\boldsymbol{k} \tag{4.4-17}$$

由几何关系式(4.4-15)可得

$$\left.\begin{aligned}\rho_2^2 &= \rho_1^2 + b_2^2 + 2\boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 \\ \rho_3^2 &= \rho_1^2 + b_3^2 + 2\boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{b}_3\end{aligned}\right\} \quad (4.4\text{-}18)$$

将坐标矢量定义式(4.4-16)代入坐标式(4.4-17),引用关系式(4.4-18),用户卫星在导航星星座坐标的位置分量可直接求得

$$\left.\begin{aligned}x_b &= \frac{1}{2b_2}(\rho_1^2 - \rho_2^2 + b_2^2) \\ y_b &= \frac{1}{2(\boldsymbol{b}_3 \cdot \boldsymbol{j})}[\rho_1^2 - \rho_3^2 + b_3^2 - (\boldsymbol{b}_3 \cdot \boldsymbol{i})x_b] \\ z_b &= \pm\ (\rho_1^2 - x_b^2 - y_b^2)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\} \quad (4.4\text{-}19)$$

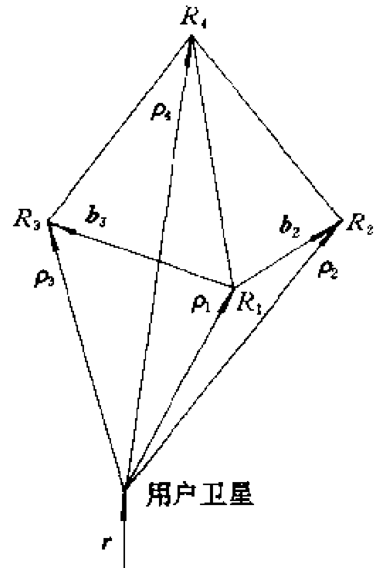


图 4.4-4

根据导航星的空间几何分布的先验知识,可判别选取上式的±号。由于导航星座坐标式(4.4-15)定义在赤道惯性坐标,由式(4.4-19)和(4.4-12),可得用户卫星在赤道惯性坐标的位置矢量 $\boldsymbol{r}$。

导航星定轨与地面测站定轨的重要区别是,导航星伪距测量是单向式,时钟误差的影响较大,通常须应用四颗导航星建立四个伪距方程,求解用户卫星的三个坐标分量和时钟偏差。依据伪距测量式(4.4-11),如各导航星的时钟偏差相同,略去传播延迟,有简化式

$$\rho_i^0 = \rho_i + B \qquad i = 1,2,3,4 \qquad (4.4\text{-}20)$$

式中 B 为时钟偏差对应的等效距离偏差,由此可得

$$\rho_1^2 - \rho_i^2 = \rho_1^{0^2} - \rho_i^{0^2} + 2(\rho_i^0 - \rho_1^0)B \qquad i = 2,3,4$$

代入坐标式(4.4-19),得包含时钟误差的用户星坐标

$$\left.\begin{aligned}x_b &= \frac{1}{2b_2}[\rho_1^{0^2} - \rho_2^{0^2} + b_2^2 + 2(\rho_2^0 - \rho_1^0)B] \\ y_b &= \frac{1}{2(\boldsymbol{b}_3 \cdot \boldsymbol{j})}[\rho_1^{0^2} - \rho_3^{0^2} + b_3^2 + 2(\rho_3^0 - \rho_1^0)B - 2(\boldsymbol{b}_3 \cdot \boldsymbol{i})x_b]\end{aligned}\right\} \quad (4.4\text{-}21)$$

因式(4.4-19)是非线性式,引用第四颗导航星,按上述类同的推导程序,可得

$$\begin{aligned}z_b &= (-\boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{k}) \\ &= [\rho_1^{0^2} - \rho_4^{0^2} + b_4^2 + 2(\rho_4^0 - \rho_1^0)B - 2(\boldsymbol{b}_4 \cdot \boldsymbol{i})x_b - 2(\boldsymbol{b}_4 \cdot \boldsymbol{j})y_b]\frac{1}{2(\boldsymbol{b}_4 \cdot \boldsymbol{k})}\end{aligned} \quad (4.4\text{-}22)$$

再取 $i=1$ 的伪距式(4.4-20)作为包含时钟偏差 B 的第4个独立方程,其展开式为

$$(\rho_1^0 - B)^2 = x_b^2 + y_b^2 + z_b^2 \qquad (4.4\text{-}23)$$

式中坐标 x_b, y_b, z_b 是时钟偏差 B 的线性关系,因此,式(4.4-23)是时钟偏差 B 的二次代数方程,可直接求解。

为分析时钟偏差,电波延迟偏差对定轨误差的传播,须建立线性化关系式。依据式(4.4-11)和(4.4-12),又定义 $\boldsymbol{L}$ 为用户卫星至导航星的单位矢量,即有 $\boldsymbol{\rho}=\rho\boldsymbol{L}$,以矢量 $\boldsymbol{L}$ 与(4.4-12)进行标积,并引入时钟误差,得导航星的导航方程的一般形式:

$$\boldsymbol{L}_i \cdot \boldsymbol{r} - B_u = \boldsymbol{L}_i \cdot \boldsymbol{R}_i - \rho_i^0 + B_i \qquad i = 1,\cdots,n \qquad (4.4\text{-}24)$$

式中，下标 i 为导航星的序号；

B_i 为导航星时钟偏差的等效距离误差；

B_u 为用户卫星时钟偏差的等效距离误差。

导航方程中待定量是用户卫星位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的三个分量 x,y,z 和用户卫星时钟偏差的等效距离误差 B_u。将导航方程式(4.4-24)改写为矩阵形式，得线性方程组

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{X}_u = \boldsymbol{D}\boldsymbol{R} - \boldsymbol{\rho}^0 \tag{4.4-25}$$

式中，$\boldsymbol{X}_u = (x\ y\ z\ -B_u)^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{R} = (x_1\ y_1\ z_1\ B_1 \cdots x_n\ y_n\ z_n\ B_n)^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{\rho}^0 = (\rho_1^0 \cdots \rho_n^0)^{\mathrm{T}}$；

n 为导航星的总数。

矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 都由用户卫星至导航星的方向余弦组成，有形式

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_n \end{bmatrix}$$

式中 l_i，0 均为行矢量：

$$l_i = (L_{ix}\ L_{iy}\ L_{iz}\ 1) \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

$$0 = (0\ 0\ 0\ 0)$$

L_{ix}, L_{iy}, L_{iz} 为用户卫星至第 i 颗导航星的方向余弦。当有多于四颗导航星参与使用，导航方程(4.4-25)的方程数大于未知数，其最小二乘解为

$$\boldsymbol{X}_u = (\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{R} - \boldsymbol{\rho}^0) \tag{4.4-26}$$

在用户卫星位置分量未确定前，矩阵 $\boldsymbol{G}$ 为待定，须用迭代法求解方程(4.4-26)，由用户卫星位置的初始估算至迭代收敛。

通过多颗导航星的伪距测量可以对时钟偏差作出估计，但星历表误差、传播延迟误差和仪器误差仍是引起定轨误差的因素，与地面三站测距定轨相似，有定轨方差式

$$\mathrm{cov}(\delta\boldsymbol{X}_u) = (\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G})^{-1}\mathrm{cov}(\delta\boldsymbol{\rho}^0)$$

或

$$\begin{aligned}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \sigma_t^2)^{\frac{1}{2}} &= [\mathrm{tr}(\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G})^{-1}]^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma_\rho \\ &= \mathrm{GDOP} \cdot \sigma_\rho \end{aligned} \tag{4.4-27}$$

式中，σ_t 为时钟偏差估值的方差；GDOP 定义为几何精度降低率，表明利用导航星的定轨误差不仅决定于伪距测量精度，还与选用的导航星和用户卫星之间的空间几何有直接的密切关系。

GDOP 的分母是矩阵($\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}$)的模，对于四颗导航星的情况，矩阵 $\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}$ 可写成[41]

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_1 & \boldsymbol{L}_2 & \boldsymbol{L}_3 & \boldsymbol{L}_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

此矩阵的行列式可化成

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}| &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_1 - \boldsymbol{L}_4 & \boldsymbol{L}_2 - \boldsymbol{L}_4 & \boldsymbol{L}_3 - \boldsymbol{L}_4 & \boldsymbol{L}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [\boldsymbol{L}_1 - \boldsymbol{L}_4 \quad \boldsymbol{L}_2 - \boldsymbol{L}_4 \quad \boldsymbol{L}_3 - \boldsymbol{L}_4] \end{aligned} \tag{4.4-28}$$

参见图 4.4-5，在以用户卫星 P 为中心的单位圆球面上，①，②，③，④为四颗导航星的交点，也是用户卫星至导航星单位矢量 $\boldsymbol{L}_1,\boldsymbol{L}_2,\boldsymbol{L}_3,\boldsymbol{L}_4$ 的端点，有矢量差式

$$\boldsymbol{L}_1-\boldsymbol{L}_4=\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{L}_2-\boldsymbol{L}_4=\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{L}_3-\boldsymbol{L}_4=\boldsymbol{c}$$

为确保定轨精度，应选择有良好空间分布(相对用户卫星)的四颗导航星，使 GDOP 极小，根据式(4.4-28)，应有矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性独立不共面，并且相互之间的夹角最大，即在以用户卫星为中心的单位圆球面上，四颗导航星组成的四面体的体积为最大。

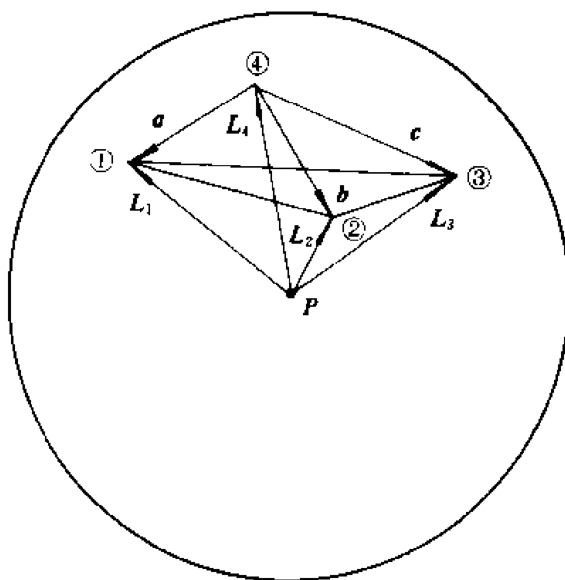


图 4.4-5

第五章　卫星姿态动力学

物体(刚体)的姿态是物体相对观察者的几何角度关系的统称。卫星应用任务要求卫星姿态在空间保持高精度定向,或要求卫星姿态在空间按预定要求进行机动。自然,卫星姿态的数学描述是卫星姿态控制建模的基础。

卫星的姿态运动是卫星绕自身质心的转动运动,简称为卫星的角运动。卫星姿态动力学是论述和分析卫星角运动的固有特性——动力学特性,是设计卫星姿态控制系统的前提。

本章限于论述刚体卫星的动力学问题,有关挠性卫星动力学问题见第九章。

5.1　参考坐标系

在讨论卫星的姿态时,首先要选定空间参考坐标系,不规定参考坐标系就无从描述卫星的姿态。至少要建立两个坐标系才能严格地确定卫星的姿态,一个是空间参考坐标系,另一个是固连于卫星的星体坐标系,后者的三个坐标轴和参考坐标轴之间的角度关系描述了卫星姿态的状况。在实际使用时,两个坐标系还不够,因为姿态敏感器的测量轴并不能总是与选定的星体坐标轴一致,要通过测量坐标的转换才能使星体坐标和空间参考坐标联系起来。另外为了获得参考天体在某个空间参考坐标系中的方向,还要引用一些辅助坐标系。下述参考坐标系的原点都位于卫星质心,随着卫星在轨道上移动,坐标轴的方向应由卫星任务而定。

惯性坐标系 $ox_i y_i z_i$:坐标轴在空间平移,但指向保持不变。通常保持平行于地心赤道惯性坐标系(见第一章),或与某一特定时刻的轨道坐标系保持平行。

轨道坐标系 $ox_o y_o z_o$:卫星轨道平面为坐标平面,z_o 轴由质心指向地心(又称当地垂线),x_o 轴在轨道平面内与 z_o 轴垂直并指向卫星速度方向,y_o 轴与 x_o、z_o 轴右手正交且与轨道平面的法线平行,见图 5.1-1,此坐标系在空间中是旋转的。对地定向的三轴稳定卫星(如遥感卫星、通信卫星)的姿态定义在此坐标系,通常称 x_o,y_o,z_o 轴为滚动、俯仰和偏航轴。利用卫星轨道运动参数 $\boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{v}$,可将轨道坐标系的各坐标轴的单位矢量表示为

$$\boldsymbol{x}_o = \boldsymbol{y}_o \times \boldsymbol{z}_o, \qquad \boldsymbol{y}_o = \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}|}, \qquad \boldsymbol{z}_o = -\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \tag{5.1-1}$$

地心-太阳坐标系 $ox_p y_p z_p$:卫星-地球-太阳平面为坐标平面,z_p 轴在此平面内并指向地心,x_p 轴在此平面内与 z_p 轴垂直并朝向太阳,y_p 轴与 x_p、z_p 右手正交且与太阳方向垂直。通常地球导航卫星的姿态定义在此坐标系,见图 5.1-2。令太阳方向为 $\boldsymbol{S}$,地心方向为 $\boldsymbol{E}$,坐标轴的单位矢量描述为

$$\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{y}_p \times \boldsymbol{z}_p, \qquad \boldsymbol{y}_p = \frac{\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{r}|}, \qquad \boldsymbol{z}_p = -\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \tag{5.1-2}$$

太阳-黄道坐标系 $ox_S y_S z_S$:太阳黄道平面为坐标平面,x_S 轴指向太阳圆盘中心,z_S 轴指向黄极 C,y_S 轴位于黄道平面且与 x_S、z_S 右手正交。通常三轴稳定的科学卫星的姿态定义在此坐标系,见图 5.1-3。

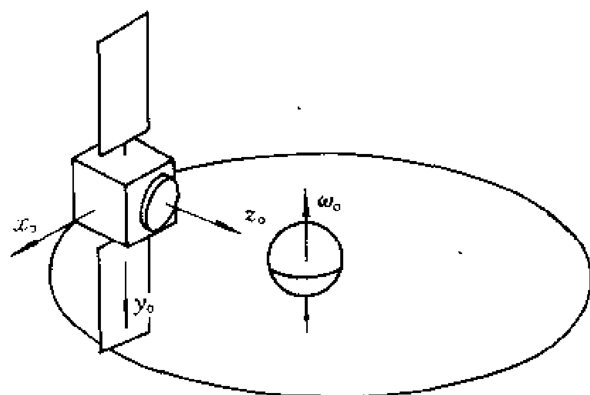
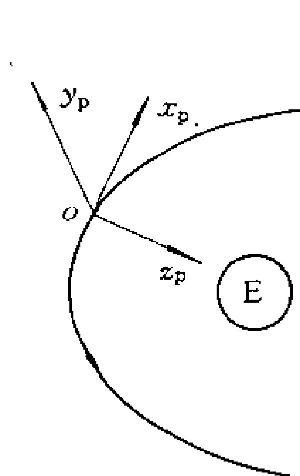
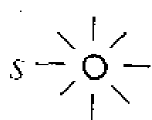


图 5.1-1





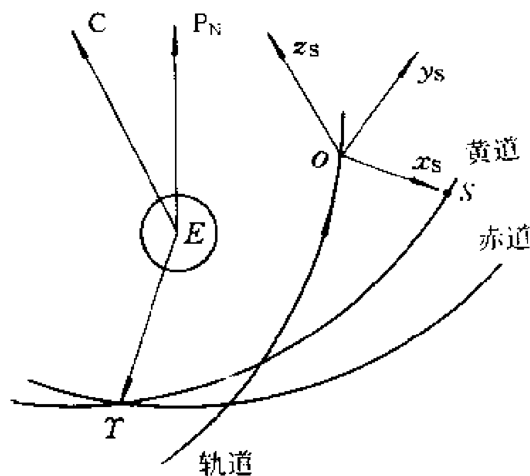


图 5.1-2

图 5.1-3

坐标系之间的转换矩阵可直接由新坐标轴在原坐标中的方向矢量组成。以 $\boldsymbol{R}$ 表示转换矩阵,其第一个下标表示新坐标,第二个下标表示原坐标。

例如,$\boldsymbol{R}_{oi}$表示由惯性坐标至轨道坐标的转移矩阵。该矩阵由轨道坐标轴单位矢量 $\boldsymbol{x}_o,\boldsymbol{y}_o,\boldsymbol{z}_o$(见式(5.1-1))组成,可列为

$$\boldsymbol{R}_{oi} = [\boldsymbol{x}_o\ \boldsymbol{y}_o\ \boldsymbol{z}_o]^T \tag{5.1-3}$$

另一种表示转移矩阵的方式是坐标的几何转动法。如已知卫星轨道六要素 a,e,ω,i,Ω,f(见第一章),则按轨道几何的定义,赤道惯性坐标与轨道坐标的转移矩阵又可列为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{oi} &= R_z(\omega+f)R_x(i)R_z(\Omega)\\ &= \begin{bmatrix} \cos(\omega+f) & \sin(\omega+f) & 0\\ -\sin(\omega+f) & \cos(\omega+f) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos i & \sin i\\ 0 & -\sin i & \cos i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\Omega & \sin\Omega & 0\\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{5.1-4}$$

又如已知太阳的平黄经 u_S 和黄赤夹角 i_S,则赤道惯性坐标与太阳 黄道坐标的转移矩阵为

$$\boldsymbol{R}_{Si} = R_z(u_S)R_x(i_S)$$

$$
=\begin{bmatrix}\cos u_S & \sin u_S & 0\\ -\sin u_S & \cos u_S & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos i_S & \sin i_S\\ 0 & -\sin i_S & \cos i_S\end{bmatrix} \tag{5.1-5}
$$

上两式中矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的单下标表示坐标转轴，括号内的标量表示转角。

5.2 姿态的描述

卫星本体坐标轴 x_b, y_b, z_b 相对参考坐标系 $ox_r\ y_r\ z_r$ 的方向确定卫星姿态的状况，如图5.2-1所示，下标 r 表示某种选用的参考坐标。姿态描述体现在这些坐标轴方向的物理量，称为姿态参数，有多种形式。最一般性的姿态参数是本体坐标轴与参考坐标轴之间的方向余弦。这种方法不直观、缺乏明显的几何图像概念，常用刚体转动的欧拉角表示卫星姿态，但欧拉转动包含奇点状况，因此在特定任务中采用姿态四元素式。由于卫星姿态可唯一确定，各种姿态参数之间可以相互转换，同时，相对各种参考坐标的姿态亦可相互转换。

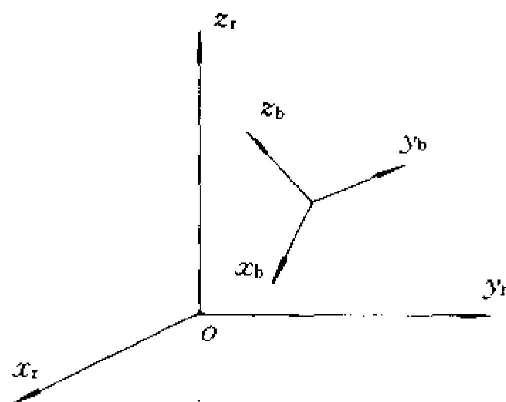


图 5.2-1

对于自旋卫星，自旋姿态主要体现在自旋轴的方向上。通常卫星自旋轴为星体的某一主惯量轴，以矢量 $\boldsymbol{P}$ 表示，在赤道惯性坐标的方向定义为赤经、赤纬 α、δ，因此，自旋矢量 $\boldsymbol{P}$ 的描述为

$$
\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}_i\\ \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{y}_i\\ \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{z}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha\\ \sin\delta\end{bmatrix}
$$

由于自旋方向的定轴性，这些姿态参数为常值，但在轨道坐标系则不同。在轨道坐标中，自旋方向定义为滚动角(φ)和偏航角(ψ)，前者 φ 角为自旋轴与其在轨道地平平面($x_o\,y_o$ 平面)上的投影之间的夹角，后者 ψ 角为该投影与轨道面法线(y_o 轴)之间的夹角。随着轨道运动，此两角是周期性交变的，如在 $t=0$ 时刻，两角的初值为 φ_0,ψ_0，则自旋轴在轨道坐标系的方向可写为

$$
\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\cos\beta(t) & 0 & \sin\beta(t)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta(t) & 0 & \cos\beta(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi_0\sin\psi_0\\ \cos\varphi_0\cos\psi_0\\ -\sin\varphi_0\end{bmatrix}
$$

式中，$\beta(t)$为卫星从 $t=0$ 起沿轨道转过的角度，$\beta(t)=\int_0^t\omega_0(t)\mathrm{d}t$。

根据滚动角、偏航角的定义，从起始时刻 t_0，当卫星沿轨道转过的角度 β 为

$$
\beta=\arctan\left(-\frac{\tan\varphi_0}{\sin\psi_0}\right)
$$

时，滚动角 $\varphi=0$，即自旋轴垂直于地心方向，在此点，偏航角 ψ 达最大值，有

$$
\psi_{\max}=\arccos(\cos\varphi_0\cos\psi_0)
$$

卫星再转过 90°，偏航角 $\psi=0$，滚动角 φ 达最大值，有

$$\varphi_{max} = \psi_{max}$$

因此，在轨道坐标中，描述自旋轴方向的滚动角、偏航角呈相互交替的形态。

自旋姿态的描述是三轴姿态描述的简化形式，下面列举姿态描述的一般形式。

5.2.1　方向余弦式

为简便，直接以 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ 表示坐标轴的单位矢量，下标表示坐标系的种类，例如，b，r 分别代表星体和参考坐标系。这两套坐标轴之间的方向余弦共有九个，以 A_{xx}，A_{xy}，…表示，有

$$\left.\begin{array}{lll} \boldsymbol{x}_b \cdot \boldsymbol{x}_r = A_{xx} & \boldsymbol{y}_b \cdot \boldsymbol{x}_r = A_{yx} & \boldsymbol{z}_b \cdot \boldsymbol{x}_r = A_{zx} \\ \boldsymbol{x}_b \cdot \boldsymbol{y}_r = A_{xy} & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{x}_b \cdot \boldsymbol{z}_r = A_{xz} & \cdots & \cdots \end{array}\right\} \tag{5.2-1}$$

利用这些方向余弦，任一根星体坐标轴的单位矢量在参考坐标系中的方向有下列形式：

$$\boldsymbol{x}_b = A_{xx}\boldsymbol{x}_r + A_{xy}\boldsymbol{y}_r + A_{xz}\boldsymbol{z}_r \tag{5.2-2}$$

将方向余弦组成一个矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} \tag{5.2-3}$$

根据式(5.2-2)，星体坐标系在参考坐标系中的几何方向可被确定为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_b \\ \boldsymbol{y}_b \\ \boldsymbol{z}_b \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_r \\ \boldsymbol{y}_r \\ \boldsymbol{z}_r \end{bmatrix} \tag{5.2-4}$$

在卫星三轴姿态确定问题中，因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 完全确定了卫星姿态在参考坐标系中的状态，故称此方向余弦阵 A 为姿态矩阵。矩阵中的每个元素为姿态参数，由于参考坐标系和星体坐标系都是正交坐标系，此九个元素还满足六个约束方程。由各单位矢量的模值可导出三个约束方程：

$$\left.\begin{array}{l} A_{xx}^2 + A_{xy}^2 + A_{xz}^2 = 1 \\ A_{yx}^2 + A_{yy}^2 + A_{yz}^2 = 1 \\ A_{zx}^2 + A_{zy}^2 + A_{zz}^2 = 1 \end{array}\right\} \tag{5.2-5}$$

由星体坐标轴的正交特性可导出另外三个约束方程：

$$\left.\begin{array}{l} A_{xx}A_{yx} + A_{xy}A_{yy} + A_{xz}A_{yz} = 0 \\ A_{xx}A_{zx} + A_{xy}A_{zy} + A_{xz}A_{zz} = 0 \\ A_{yx}A_{zx} + A_{yy}A_{zy} + A_{yz}A_{zz} = 0 \end{array}\right\} \tag{5.2-6}$$

因此只有三个姿态参数是独立的。换言之，只要用三个独立参数就可描述卫星的三轴姿态在参考坐标系中的状态。

根据约束方程(5.2-5)和(5.2-6)可以得知姿态矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有下列特性：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T} = \boldsymbol{I}$$

$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，此式表明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵。实际上，姿态矩阵也就是参考坐标系与星体坐标系之间的转换矩阵，如已有单位参考矢量 $\boldsymbol{V}$，它在星体坐标系和参考坐标系中表示成

$$\boldsymbol{V} = (V_x)_b\boldsymbol{x}_b + (V_y)_b\boldsymbol{y}_b + (V_z)_b\boldsymbol{z}_b$$

或

$$\boldsymbol{V} = (V_x)_r \boldsymbol{x}_r + (V_y)_r \boldsymbol{y}_r + (V_z)_r \boldsymbol{z}_r$$

将上两式两端分别与矢量 $\boldsymbol{x}_b, \boldsymbol{y}_b, \boldsymbol{z}_b$ 标积，并令 $(\boldsymbol{V})_b$，$(\boldsymbol{V})_r$ 表示矢量在星体坐标和参考坐标系中的方向余弦，则

$$(\boldsymbol{V})_b = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{V})_r \tag{5.2-7}$$

用方向余弦表示的姿态矩阵是姿态描述的一般形式。姿态确定的问题就是如何把这些方向余弦与卫星姿态敏感器的测量几何联系起来，如何根据卫星姿态敏感器测量参考矢量 $\boldsymbol{V}$ 的测量值得出 $(\boldsymbol{V})_b$ 以及利用在参考坐标系中已知的 $(\boldsymbol{V})_r$，求解式(5.2-7)得出姿态矩阵 $\boldsymbol{A}$。

5.2.2 欧拉角式

在工程技术中，希望三个姿态参数具有更简便、更明显的几何意义，并能用姿态敏感器直接测出这些参数，能较方便地求解用这些姿态参数描述的姿态动力学方程。欧拉角是这种最合适的姿态参数。根据欧拉定理，刚体绕固定点的位移也可以是绕该点的若干次有限转动的合成。在欧拉转动中，将参考坐标系转动三次得到星体坐标系。在三次转动中每次的旋转轴是被转动坐标系的某一坐标轴，每次的转动角即为欧拉角。因此，用欧拉角确定的姿态矩阵是三次坐标转换矩阵的乘积。这些坐标转换矩阵都有如下标准形式：

$$\boldsymbol{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.2-8}$$

显然，姿态矩阵还与三次转动的顺序有关，转动顺序可分为两类。

第一类：第一次和第三次转动是绕同类坐标轴进行的，第二次转动是绕另两类轴中的一轴进行的。

第二类：每次转动是绕不同类别的坐标轴进行的。

如以数字顺序 1，2，3 分别代表各类坐标系的坐标轴 x,y,z，则 12 种欧拉转动顺序可表示为

1-2-1　1-3-1　2-1-2

2-3-2　3-1-3　3-2-3

及

1-2-3　1-3-2　2-1-3

2-3-1　3-1-2　3-2-1

最常用的欧拉角是按 3-1-3 或 3-1-2 顺序得出，各次欧拉转角分别记为 ψ,θ,φ 和 ψ,φ,θ。

参见图 5.2-2，参考坐标轴为 X,Y,Z，按第一类转动顺序 3-1-3：先绕 Z 轴转 ψ 角，得过渡坐标系 $x'y'z'$，其中 z' 轴与 Z 轴一致，坐标转换矩阵为 $\boldsymbol{R}_z(\psi)$；其次绕 x' 轴转 θ 角，又得过渡坐标系 $x''y''z''$，其中 x'' 轴与 x' 轴一致，坐标转换矩阵为 $\boldsymbol{R}_x(\theta)$；最后绕 z'' 轴转 φ 角，得星体坐标系 $x_b y_b z_b$，其中，z_b 轴与 z'' 轴一致，坐标转换矩阵为 $\boldsymbol{R}_z(\varphi)$。根据坐标转换矩阵的标准式(5.2-8)，得出用第一类欧拉转动顺序表示的姿态矩阵为

$$A_{313}(\psi,\theta,\varphi)=R_z(\varphi)R_x(\theta)R_z(\psi)$$

$$=\begin{bmatrix} c\varphi c\psi - c\theta s\varphi s\psi & c\varphi s\psi + c\theta s\varphi c\psi & s\theta s\varphi \\ -s\varphi c\psi - c\theta c\varphi s\psi & -s\varphi s\psi + c\theta c\varphi c\psi & s\theta c\varphi \\ s\theta s\psi & -s\theta c\psi & c\theta \end{bmatrix} \quad (5.2\text{-}9)$$

式中，字符"c"，"s"分别为"cos"和"sin"的缩写形式。对照方向余弦阵式(5.2-3)，3-1-3 欧拉角与方向余弦阵元素的关系式是

$$\psi=\arctan\left[-\frac{A_{zx}}{A_{zy}}\right]$$

$$\theta=\arccos[A_{zz}]$$

$$\varphi=\arctan\left[\frac{A_{xz}}{A_{yz}}\right]$$

如欧拉角 $\theta=0$，则欧拉转动处于奇异状况，ψ 角和 φ 角不能唯一确定。3-1-3 欧拉角常用于描述自旋卫星的姿态。上述自旋矢量的赤经、赤纬可表示为

$$\alpha=\psi-90^\circ,\qquad \delta=90^\circ-\theta$$

自旋姿态的第三物理量是自旋方位角，即自旋卫星横轴相对某参考轴的转角 μ。按姿态矩阵的定义，由式(5.2-9)该转角可描述为

$$\mu=\arctan\left[-\frac{A_{yx}}{A_{xx}}\right]$$

$$=\psi+\arctan[\cos\theta\tan\varphi]$$

第二类转动顺序的 3-1-2 转动见图 5.2-3，同理，可得姿态矩阵为

$$A_{312}(\psi,\varphi,\theta)=R_y(\theta)R_x(\varphi)R_z(\psi)$$

$$=\begin{bmatrix} c\theta c\psi - s\varphi s\theta s\psi & c\theta s\psi + s\varphi s\theta c\psi & -c\varphi s\theta \\ -c\varphi s\psi & c\varphi c\psi & s\varphi \\ s\theta c\psi + s\varphi c\theta s\psi & s\theta s\psi - s\varphi c\theta c\psi & c\varphi c\theta \end{bmatrix} \quad (5.2\text{-}10)$$

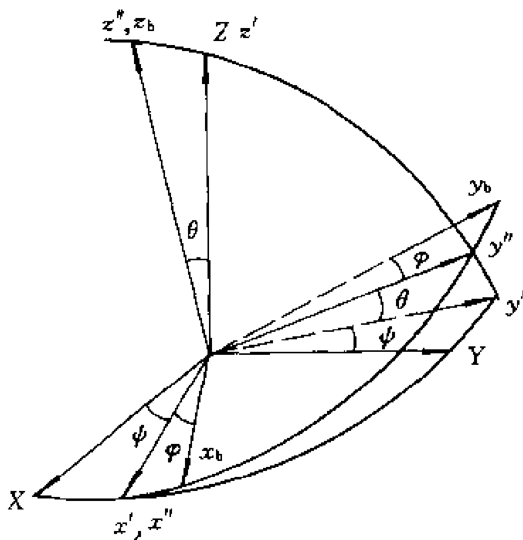


图　5.2-2

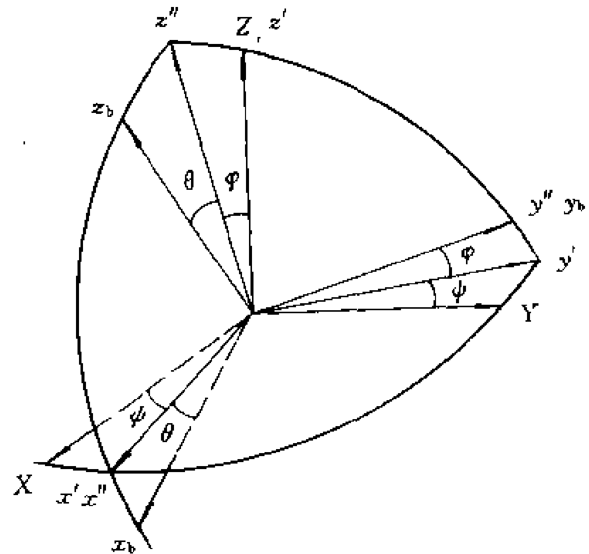


图　5.2-3

以及 3-1-2 欧拉角与方向余弦阵元素的关系：

$$\psi = \arctan\left[-\frac{A_{yx}}{A_{yy}}\right]$$

$$\varphi = \arcsin[A_{yz}]$$

$$\theta = \arctan\left[-\frac{A_{xz}}{A_{zz}}\right]$$

此类欧拉转动的奇异发生在 $\varphi=90°$ 的情况，ψ 角和 θ 角在同一平面转动，不能唯一确定。

如欧拉角 ψ,φ,θ 都为 α 小量，则姿态矩阵式(5.2-10)的小参量式为

$$\boldsymbol{A}_{312}(\psi,\varphi,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \varphi \\ \theta & -\varphi & 1 \end{bmatrix} \tag{5.2-11}$$

如参考坐标系为轨道坐标系 $ox_oy_oz_o$，由式(5.2-11)和图 5.2-3，可见欧拉角 ψ,φ,θ 的几何意义为

ψ 为偏航角——卫星滚动轴 x_b(指向卫星速度方向)在当地水平面上的投影与轨道 x_o 轴的夹角；

θ 为俯仰角——卫星滚动轴 x_b 与其在当地水平面投影的夹角；

φ 为滚动角——卫星俯仰轴 y_b 与其在当地水平面投影的夹角。

因此这种转动顺序又称为偏航、滚动、俯仰顺序。

5.2.3 欧拉轴/角参数式

应用姿态矩阵表示卫星姿态要用九个方向余弦，在求解方向余弦时还要引入六个约束方程，使用很不方便，特别是这种描述方法没有直接显示出卫星姿态的几何图像。欧拉角式需多次三角运算，并有奇点问题。而欧拉轴/角参数式具有独特的优点。在理论力学中有一个著名的欧拉定理：刚体绕固定点的任一位移，可由绕通过此点的某一轴转过一个角度而得到。此定理来源于正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个性质：一个常实正交矩阵至少有一个特征值为 1 的特征矢量，亦即存在一个满足下面等式的单位矢量 $\boldsymbol{e}$：

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}$$

此式表明代表刚体转轴方向的矢量 $\boldsymbol{e}$ 在星体坐标中的分量与在参考坐标系中的分量相同，而任何姿态转动都对应一个转换矩阵 $\boldsymbol{A}$。描述姿态的参数有四个——转轴的单位矢量 $\boldsymbol{e}$ 在参考坐标系中的三个方向余弦 e_x,e_y,e_z 以及绕此转轴的转角 Φ。下面叙述此四个姿态参数和九个方向余弦之间的转换关系。

参见图 5.2-4，矢量 $\boldsymbol{a}$ 与欧拉轴 $\boldsymbol{e}$ 夹 θ 角，绕 $\boldsymbol{e}$ 轴旋转时，矢量 $\boldsymbol{a}$ 在轴线为 $\boldsymbol{e}$ 的圆锥面上移动，与 $\boldsymbol{e}$ 轴的夹角不变，转过 Φ 角，矢量 $\boldsymbol{a}$ 移至 $\boldsymbol{a}'$。在垂直于 $\boldsymbol{e}$ 的圆锥底面上作坐标矢量 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}$：

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{a\sin\theta}(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{a})$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{e} = \frac{1}{a\sin\theta}(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{e} = \frac{1}{a\sin\theta}[\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{e}]$$

过 $\boldsymbol{a}'$ 的端点，作矢量 $\boldsymbol{u}'$

$$\boldsymbol{u}' = \cos\Phi\boldsymbol{u} + \sin\Phi\boldsymbol{v}$$

利用这些坐标矢量，可将矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}'$ 表示为

$$\boldsymbol{a} = a\cos\theta\boldsymbol{e} + a\sin\theta\boldsymbol{u}$$

$$a' = a\cos\theta e + a\sin\theta u'$$

将前述矢量u'和u,v的表达式代入上式,有

$$a' = (1-\cos\Phi)(e\cdot a)e + \cos\Phi a + \sin\Phi(e\times a) \tag{5.2-12}$$

以式(5.2-12)为例,参考坐标轴x_r经欧拉转动得出对应的星体坐标轴x_b,可表示为

$$x_b = (1-\cos\Phi)(e\cdot x_r)e + \cos\Phi x_r + \sin\Phi(e\times x_r) \tag{5.2-13}$$

对于y_b,z_b可得出类似的表达式。

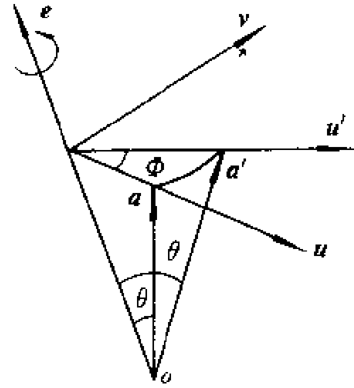


图 5.2-4

令欧拉轴e在参考坐标系的矢量式为

$$e = e_x x_r + e_y y_r + e_z z_r$$

将此欧拉轴矢量e代入式(5.2-13),以及另两个类似的y_b,z_b表达式,可得出用e_x,e_y,e_z,Φ等四个姿态参数描述的姿态矩阵:

$$A(e,\Phi) = \begin{bmatrix} c\Phi + e_x^2(1-c\Phi) & e_xe_y(1-c\Phi)+e_zs\Phi & e_xe_z(1-c\Phi)-e_ys\Phi \\ e_xe_y(1-c\Phi)-e_zs\Phi & c\Phi+e_y^2(1-c\Phi) & e_ye_z(1-c\Phi)+e_xs\Phi \\ e_xe_z(1-c\Phi)+e_ys\Phi & e_ye_z(1-c\Phi)-e_xs\Phi & c\Phi+e_z^2(1-c\Phi) \end{bmatrix}$$

$$= \cos\Phi I + (1-\cos\Phi)ee^{T} - \sin\Phi\tilde{E} \tag{5.2-14}$$

式中,ee^{T}为矢量的外积,$\tilde{E}$为斜对称矩阵:

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix} \tag{5.2-15}$$

转轴e称为欧拉轴,转角Φ称为欧拉转角,因此这种定义卫星姿态的方法称为欧拉轴/角参数式。表面上共有四个参数,但仍然只有三个参数是独立的,因此$\|e\| = e_x^2+e_y^2+e_z^2=1$。对照这两种姿态矩阵式(5.2-4)与式(5.2-14),可以根据欧拉轴/角参数式表示两个坐标系之间的方向余弦。如已知方向余弦,按下式计算欧拉参数:

$$e = \frac{1}{2\sin\Phi}\begin{bmatrix} A_{yz}-A_{zy} \\ A_{zx}-A_{xz} \\ A_{xy}-A_{yx} \end{bmatrix} \tag{5.2-16}$$

$$\cos\Phi = \frac{1}{2}[\mathrm{tr}A - 1]$$

$\mathrm{tr}A = A_{xx}+A_{yy}+A_{zz}$是姿态矩阵$A$的迹。绕任意转轴转动相同的$\Phi$角,姿态矩阵的迹不变。

当姿态相对参考坐标的转动很小时,欧拉轴/角参数式的姿态矩阵可写为

$$A(e,\Delta\Phi) = I - \Delta\Phi\tilde{E} \tag{5.2-17}$$

相当于绕欧拉轴转动微角$\Delta\Phi$。

欧拉转角Φ反映两套坐标轴之间的几何关系。参见图5.2-5,令φ_x,φ_y,φ_z是参考坐标系和星体坐标系中对应坐标轴之间的夹角,显然,姿态矩阵中对角线上的元素可以表示成

$$A_{mm} = \cos\varphi_m = \cos\Phi + e_m^2(1-\cos\Phi), \qquad m = x,y,z$$

经过三角恒等变换,上式化成

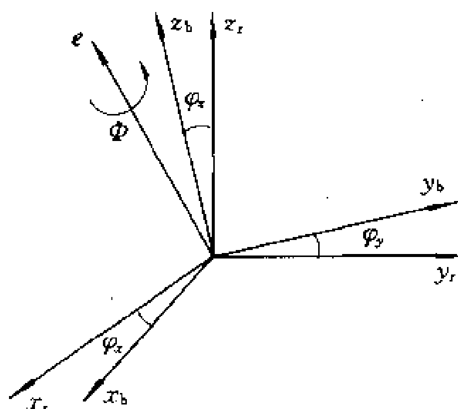


图 5.2-5

$$2\sin^2\frac{\varphi_m}{2}=(1-e_m^2)2\sin^2\frac{\Phi}{2},\qquad m=x,y,z$$

将 $m=x,y,z$ 分别代入上式，并将三式相加，得

$$\sin^2\frac{\Phi}{2}=\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\varphi_x}{2}+\sin^2\frac{\varphi_y}{2}+\sin^2\frac{\varphi_z}{2}\right)$$

此式给出了对应坐标轴的偏离角与绕欧拉轴的转角之间的关系。当偏角较小时，有

$$\Phi=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2}$$

这个公式对于评价姿态确定误差是很有用的。

5.2.4 欧拉四元素式

为了便于对姿态矩阵进行矩阵运算，由欧拉轴/角参数式组成另外四个姿态参数，前三个代表欧拉轴的方向，第四个代表欧拉转角，定义 $\boldsymbol{q}$ 由三维矢量 $\hat{\boldsymbol{q}}$ 和标量 q_4 组成，

$$\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{q}}\\ q_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\\ q_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_x\sin\frac{\Phi}{2}\\ e_y\sin\frac{\Phi}{2}\\ e_z\sin\frac{\Phi}{2}\\ \cos\frac{\Phi}{2}\end{bmatrix}\tag{5.2-18}$$

此四个参数满足约束方程

$$q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2=1\tag{5.2-19}$$

利用三角公式：$\cos\Phi=2\cos^2\frac{\Phi}{2}-1$，$\sin\Phi=2\sin\frac{\Phi}{2}\cos\frac{\Phi}{2}$，可将欧拉轴/角姿态矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e},\Phi)$ 化成四元素姿态矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e},\Phi)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$$

$$
=\begin{bmatrix} q_1^2-q_2^2-q_3^2+q_4^2 & 2(q_1q_2+q_3q_4) & 2(q_1q_3-q_2q_4) \\ 2(q_1q_2-q_3q_4) & -q_1^2+q_2^2-q_3^2+q_4^2 & 2(q_2q_3+q_1q_4) \\ 2(q_1q_3+q_2q_4) & 2(q_2q_3-q_1q_4) & -q_1^2-q_2^2+q_3^2+q_4^2 \end{bmatrix}
$$

$$
=(q_4^2-\hat{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{q}})I+2\hat{\boldsymbol{q}}\hat{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}-2q_4\tilde{\boldsymbol{Q}} \tag{5.2-20}
$$

式中$\tilde{\boldsymbol{Q}}$为$\hat{\boldsymbol{q}}$的斜对称矩阵，

$$
\tilde{\boldsymbol{Q}}=\begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}
$$

以及四元素与方向余弦的关系：

$$
\hat{\boldsymbol{q}}=\frac{1}{4q_4}\begin{bmatrix} A_{yz}-A_{zy} \\ A_{zx}-A_{xz} \\ A_{xy}-A_{yx} \end{bmatrix} \tag{5.2-21}
$$

$$
q_4=\pm\frac{1}{2}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A}+1)^{\frac{1}{2}}
$$

与方向余弦矩阵相比，欧拉参数仅含四个变量和一个约束方程；与欧拉轴/角参数式相比，姿态矩阵的元素不含三角函数。姿态矩阵本质上是坐标转换矩阵，欧拉参数不仅反映相对参考坐标系的姿态，也可看作为姿态机动参数。如令姿态机动前的姿态参数为$\boldsymbol{q}$，机动后的姿态参数为$\boldsymbol{q}''$，姿态机动参数为$\boldsymbol{q}'$，则有姿态矩阵的乘积表达式：

$$
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}'')=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}')\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) \tag{5.2-22}
$$

将矩阵按式(5.2-20)展开，可归纳得出姿态欧拉参数的矢量关系式：

$$
\begin{bmatrix} q_1'' \\ q_2'' \\ q_3'' \\ q_4'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_4' & q_3' & -q_2' & q_1' \\ -q_3' & q_4' & q_1' & q_2' \\ q_2' & -q_1' & q_4' & q_3' \\ -q_1' & -q_2' & -q_3' & q_4' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \tag{5.2-23}
$$

或

$$
\begin{bmatrix} q_1'' \\ q_2'' \\ q_3'' \\ q_4'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & q_4 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1' \\ q_2' \\ q_3' \\ q_4' \end{bmatrix} \tag{5.2-24}
$$

不难看出，上面两式中$\boldsymbol{q}'$矩阵和$\boldsymbol{q}$矩阵都为正交矩阵，可以求逆。如已知初始姿态$\boldsymbol{q}$，并给定目标姿态$\boldsymbol{q}''$，则利用上面两式即可求得实现姿态向目标姿态机动的姿态机动参数$\boldsymbol{q}'$，从而按式(5.2-18)得出欧拉轴的方向和转角，这是欧拉四元素法的一大优点。

运用上述规则可列出欧拉参数与欧拉角的关系式。以欧拉 3-1-3 转动为例：

第一次转动的参数为

$$
q_1=q_2=0,\qquad q_3=\sin\frac{\psi}{2},\qquad q_4=\cos\frac{\psi}{2}
$$

第二次转动的参数为

$$
q_1=\sin\frac{\theta}{2},\qquad q_2=q_3=0,\qquad q_4=\cos\frac{\theta}{2}
$$

第三次转动的参数为

$$q_1 = q_2 = 0, \quad q_3 = \sin\frac{\varphi}{2}, \quad q_4 = \cos\frac{\varphi}{2}$$

最终,欧拉 3-1-3 转动得出的欧拉参数可按式(5.2-23)列出:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\left(\frac{\varphi}{2}\right) & s\left(\frac{\varphi}{2}\right) & 0 & 0 \\ -s\left(\frac{\varphi}{2}\right) & c\left(\frac{\varphi}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c\left(\frac{\varphi}{2}\right) & s\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ 0 & 0 & -s\left(\frac{\varphi}{2}\right) & c\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\left(\frac{\varphi}{2}\right) & 0 & 0 & s\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 0 & c\left(\frac{\theta}{2}\right) & s\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 \\ 0 & -s\left(\frac{\theta}{2}\right) & c\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 \\ -s\left(\frac{\varphi}{2}\right) & 0 & 0 & c\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ c\left(\frac{\psi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

应用四元素代数方法,可进一步简化欧拉参数姿态矩阵的运算。代数四元素的定义为

$$\boldsymbol{q} = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} + q_4 \tag{5.2-25}$$

并有矢量乘积规则

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1 \\ \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j} \end{aligned}\right\} \tag{5.2-26}$$

和约束方程 $\sum_{i=1}^{4} q_i^2 = 1$。代数四元素的逆 $\boldsymbol{q}^{-1}$ 为

$$\boldsymbol{q}^{-1} = -q_1\boldsymbol{i} - q_2\boldsymbol{j} - q_3\boldsymbol{k} + q_4$$

它符合定义:

$$\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}^{-1} \cdot \boldsymbol{q} = 1 - 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$$

令两个四元素 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{q}'$ 相乘,乘积为 $\boldsymbol{q}''$,可写成

$$\boldsymbol{q}'' = \boldsymbol{q}\boldsymbol{q}' = (q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} + q_4)(q_1'\boldsymbol{i} + q_2'\boldsymbol{j} + q_3'\boldsymbol{k} + q_4') \tag{5.2-27}$$

利用四元素乘积规则式(5.2-26),(5.2-27)乘积的展开式与式(5.2-24)的结果等同,因此,式(5.2-27)即为用代数四元素法表示姿态转动所对应的姿态参数的转换。比较式(5.2-22)和(5.2-27),可见姿态四元素乘积的顺序与姿态矩阵乘积的顺序相反。

利用四元素逆的定义,可更简便得出将初始姿态 $\boldsymbol{q}$ 转到目标姿态 $\boldsymbol{q}''$所需姿态机动四元素 $\boldsymbol{q}'$,即有

$$\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{q}^{-1}\boldsymbol{q}'' = (-q_1\boldsymbol{i} - q_2\boldsymbol{j} - q_3\boldsymbol{k} + q_4)(q_1''\boldsymbol{i} + q_2''\boldsymbol{j} + q_3''\boldsymbol{k} + q_4'') \tag{5.2-28}$$

利用乘积规则,此式比式(5.2-24)的矩阵求逆运算更为简便。

5.3 姿态运动学方程

姿态运动学方程是姿态参数在姿态机动过程中变化的方程。令姿态相对参考坐标的转速为 ω,转轴为 $\boldsymbol{e}$,即 $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}$。如在时刻 t 姿态矩阵为 $\boldsymbol{A}(t)$,在 $t+\Delta t$ 时刻姿态矩阵为 $\boldsymbol{A}(t+\Delta t)$,则

$$\boldsymbol{A}(t + \Delta t) = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}(t)$$

$\boldsymbol{A}'$ 为绕 $\boldsymbol{e}$ 轴转过 $\Delta\varphi = \omega\Delta t$ 角的转动矩阵,按欧拉轴/角参数式,此转动矩阵可写为

$$A' = \cos\Delta\varphi I + (1-\cos\Delta\varphi)ee^{\mathrm{T}} - \sin\Delta\varphi\tilde{E}$$

按式(5.2-15)中 $\tilde{E}$的定义，当 $\Delta\varphi\ll1$，有 $\sin\Delta\varphi=\omega\cdot\Delta t$，

$$A' = I - \tilde{\omega}\Delta t$$

式中，$\tilde{\omega}$ 为 ω 的斜对称矩阵：

$$\tilde{\omega}=\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{5.3-1}$$

因此，在 $t+\Delta t$ 时刻，姿态矩阵可展开为

$$A(t+\Delta t) = A(t) - \tilde{\omega}A\cdot\Delta t$$

即可得以姿态矩阵表示的姿态运动方程

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to0}\frac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t} = -\tilde{\omega}A \tag{5.3-2}$$

应用姿态四元素与方向余弦的关系式，可得姿态四元素的变化方程。以 q_4 为例，由式(5.2-21)微分得

$$\dot{q}_4 = \frac{1}{8q_4}(\dot{A}_{xx}+\dot{A}_{yy}+\dot{A}_{zz})$$

按式(5.3-2)，矩阵元素的导数可列为

$$\dot{A}_{xx} = \omega_z A_{yx} - \omega_y A_{zx}$$

$$\dot{A}_{yy} = -\omega_z A_{xy} + \omega_x A_{zy}$$

$$\dot{A}_{zz} = \omega_y A_{xz} - \omega_x A_{yz}$$

代入 $\dot{q}_4$ 的等式，并利用式(5.2-21)，可得

$$\dot{q}_4 = -\frac{1}{2}(q_1\omega_x + q_2\omega_y + q_3\omega_z)$$

同样，可得其他欧拉参数-四元素的微分式，归纳为

$$\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \dot{q}_3\\ \dot{q}_4\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\\ q_4\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & q_4 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\\ 0\end{bmatrix}$$

上式为姿态四元素运动方程，可简写为

$$\dot{q} = \frac{1}{2}\Omega(\omega)q \tag{5.3-3}$$

此为线性微分方程，不含三角函数，无奇点问题，并且方程的解必定满足约束条件式(5.2-19)。

令四元素的模为

$$\| \boldsymbol{q} \| = \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}$$

则其微分式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| \boldsymbol{q} \| = \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$= \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Omega}]\boldsymbol{q}$$

因 $\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{\Omega}$，四元素微分方程(5.3-3)的解的模值恒为常值。

从欧拉角转动顺序可得姿态欧拉角的运动方程，姿态相对参考坐标的转速 $\boldsymbol{\omega}$ 在星体坐标中可表示为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \boldsymbol{x}_b + \omega_y \boldsymbol{y}_b + \omega_z \boldsymbol{z}_b$$

此转速可视为三次欧拉转动的合成。以 3-1-3 和 3-1-2 顺序为例，参见图 5.2-2，图 5.2-3，又以 $\hat{\mathbf{1}},\hat{\mathbf{2}},\hat{\mathbf{3}}$分别表示顺序转轴矢量 $\hat{\mathbf{1}} = (1\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}$，$\hat{\mathbf{2}} = (0\ 1\ 0)^{\mathrm{T}}$，$\hat{\mathbf{3}} = (0\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}$，则有

$$\boldsymbol{\omega}_{313} = R_3(\varphi)\{\dot{\varphi}\hat{\mathbf{3}} + R_1(\theta)[\dot{\theta}\hat{\mathbf{1}} + R_3(\psi)\dot{\psi}\hat{\mathbf{3}}]\}$$

即

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_{313} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \end{bmatrix} \tag{5.3-4}$$

和

$$\boldsymbol{\omega}_{312} = R_2(\theta)\{\dot{\theta}\hat{\mathbf{2}} + R_1(\varphi)[\dot{\varphi}\hat{\mathbf{1}} + R_3(\psi)\dot{\psi}\hat{\mathbf{3}}]\}$$

即

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_{312} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi + \dot{\varphi}\cos\theta \\ \dot{\psi}\sin\varphi + \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta \end{bmatrix} \tag{5.3-5}$$

由姿态动力学方程(见 5.4 节)得姿态角速率，再利用上两式求解姿态角的变化。按 3-1-3 顺序，由式(5.3-4)得姿态角方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}_{313} = \frac{1}{\sin\theta}\begin{bmatrix} \omega_x\sin\varphi + \omega_y\cos\varphi \\ \omega_x\cos\varphi\sin\theta - \omega_y\sin\varphi\sin\theta \\ -\omega_x\sin\varphi\cos\theta - \omega_y\cos\varphi\cos\theta + \omega_z\sin\theta \end{bmatrix} \tag{5.3-6}$$

对于 3-1-2 顺序，有

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}_{312} = \frac{1}{\cos\varphi}\begin{bmatrix} -\omega_x\sin\theta + \omega_z\cos\theta \\ \omega_x\cos\theta\cos\varphi + \omega_z\sin\theta\cos\varphi \\ \omega_x\sin\theta\sin\varphi + \omega_y\cos\varphi - \omega_z\cos\theta\sin\varphi \end{bmatrix} \tag{5.3-7}$$

以上两组为非线性方程，并有奇点，分别为 $\theta = 0°$ 和 $\varphi = 90°$。与运动方程欧拉四元素四元素显得优越。

5.4 姿态动力学方程

卫星的姿态运动是卫星绕自身质心的转动运动，姿态动力学方程可从刚体的动量矩公式

和定理导出,即欧拉-牛顿法:刚体对惯性空间某固定点的角动量的变化率等于作用于刚体的所有外力对此点力矩的总和。参见图 5.4-1,在以空间固定点 S 为原点的惯性坐标系中,角动量定理可写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_S}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_S \tag{5.4-1}$$

H,M 为刚体的角动量和作用在刚体的外力矩,下标表示相对何种基准点。刚体角动量是刚体内质量元相对该基准点的动量矩之总和,在 S 坐标系中可写成

$$\boldsymbol{H}_S = \int \boldsymbol{R} \times \dot{\boldsymbol{R}} \mathrm{d}m \tag{5.4-2}$$

上式的积分为刚体的体积分,$\mathrm{d}m$ 为刚体的质量微元,$\boldsymbol{R}$ 和 $\dot{\boldsymbol{R}}$为该质量微元在空间惯性坐标的位置和速度。

由作用在刚体微元 $\mathrm{d}m$ 上的外力 $\mathrm{d}F$,形成对 S 点的总力矩为

$$\boldsymbol{M}_S = \int \boldsymbol{R} \times \mathrm{d}\boldsymbol{F} = \int \boldsymbol{R} \times \ddot{\boldsymbol{R}}\, \mathrm{d}m \tag{5.4-3}$$

令 o 点为刚体内任一固定点,有几何关系(见图 5.4-1)

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_o + \boldsymbol{\rho}$$

式中 ρ 为质量元 $\mathrm{d}m$ 相对 o 点的位置。将几何关系式代入式(5.4 2),有

$$\boldsymbol{H}_S = \boldsymbol{H}_o + \boldsymbol{R}_o \times \int \dot{\boldsymbol{R}}\, \mathrm{d}m \tag{5.4-4}$$

$$\boldsymbol{H}_o = \int \boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{R}}\, \mathrm{d}m \tag{5.4-5}$$

H_o 为刚体相对 o 点的角动量,同理引用几何关系式,力矩式(5.4-3)可改写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_S &= \int \boldsymbol{\rho} \times \ddot{\boldsymbol{R}}\, \mathrm{d}m + \boldsymbol{R}_o \times \int \ddot{\boldsymbol{R}}\, \mathrm{d}m \\ &= \boldsymbol{M}_o + \boldsymbol{R}_o \times \int \ddot{\boldsymbol{R}}\, \mathrm{dm}\end{aligned} \tag{5.4-6}$$

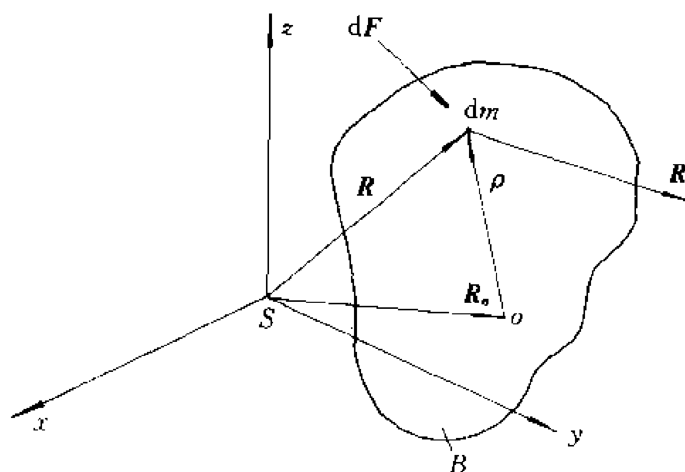


图 5.4-1

式中 M_o 为外力相对 o 点的力矩。再将式(5.4-4),(5.4-6)代入角动量定理式(5.4-1),得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_o}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}_c-\dot{\boldsymbol{R}}_o\times\int\dot{\boldsymbol{R}}\,\mathrm{d}m \tag{5.4-7}$$

如 o 点固定,$\dot{\boldsymbol{R}}_o=0$,则上式(5.4-7)与式(5.4-1)等同。

再以 o 点为原点,定义惯性坐标系,其坐标轴惯性平行,在此坐标系中,质量元的速度为 $\dot{\boldsymbol{\rho}}$,此质量元在空间的速度可写成

$$\dot{\boldsymbol{R}}=\dot{\boldsymbol{R}}_o+\dot{\boldsymbol{\rho}}$$

将上式速度关系代入式(5.4-5),有

$$\boldsymbol{H}_o=\boldsymbol{H}_{oo}-\dot{\boldsymbol{R}}_o\times\int\dot{\boldsymbol{\rho}}\,\mathrm{d}m \tag{5.4-8}$$

$$\boldsymbol{H}_{oo}=\int\boldsymbol{\rho}\times\dot{\boldsymbol{\rho}}\,\mathrm{d}m \tag{5.4-9}$$

$\boldsymbol{H}_{oo}$ 称为相对 o 点的相对角动量,即不计及 o 点的运动。将角动量式(5.4-8),(5.4-9)代入式(5.4-7),得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{oo}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}_o+\ddot{\boldsymbol{R}}_o\times\int\boldsymbol{\rho}\,\mathrm{d}m$$

上式左端为刚体在 o 点惯性坐标系中相对 o 点的相对角动量的变率,从上式右端可看出,如 o 点仅作等速运动 ($\ddot{\boldsymbol{R}}_o=0$) ,或 o 点与刚体的质心重合 ($\int\boldsymbol{\rho}\,\mathrm{d}m=0$) ,则可将角动量定理直接用于刚体的相对角动量,有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{oo}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}_o \tag{5.4-10}$$

下文论及角动量均指相对自身质心的角动量,因此,可略去下标"oo"。

质量元 $\mathrm{d}m$ 在质心惯性坐标系的移动速度是刚体相对质心的转动引起的,有

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$$

式中 $\boldsymbol{\omega}$ 为刚体在质心惯性坐标系的转速矢量,代入角动量式(5.4-9),有

$$\boldsymbol{H}=\int\boldsymbol{\rho}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}m \tag{5.4-11}$$

令在惯性坐标质量元 $\mathrm{d}m$ 的位置分量为 x,y,z,转速 $\boldsymbol{\omega}$ 的分量为 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$,由双重叉积公式 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$,有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})=&[\omega_x(y^2+z^2)-\omega_y(xy)-\omega_z(xz)]\boldsymbol{e}_x\\&+[-\omega_x(xy)+\omega_y(x^2+z^2)-\omega_z(yz)]\boldsymbol{e}_y\\&+[-\omega_x(xz)-\omega_y(yz)+\omega_z(x^2+y^2)]\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

式中 $\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ 为该坐标轴的单位矢量,代入角动量式(5.4-11),得

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega} \tag{5.4-12}$$

称式中 $\boldsymbol{I}$ 为刚体的惯量矩阵,其形式为

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}I_x&-I_{xy}&-I_{xz}\\-I_{xy}&I_y&-I_{yz}\\-I_{xz}&-I_{yz}&I_z\end{bmatrix} \tag{5.4-13}$$

矩阵中对角线元素为刚体绕坐标轴 x,y,z 的转动惯量,其他元素为惯量积,有

$$I_x=\int(y^2+z^2)\mathrm{d}m,\qquad I_{xy}=\int(xy)\mathrm{d}m$$

$$I_y = \int (x^2 + z^2) \mathrm{d}m, \qquad I_{yz} = \int (yz) \mathrm{d}m$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) \mathrm{d}m, \qquad I_{xz} = \int (xz) \mathrm{d}m$$

由此，惯量矩阵的一般形式可改写为

$$I = \int (\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}}) \mathrm{d}m = \int (-\tilde{\boldsymbol{\rho}} \tilde{\boldsymbol{\rho}}^{\mathrm{T}}) \mathrm{d}m \tag{5.4-14}$$

式中，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，$\tilde{\boldsymbol{\rho}}$为矢量 $\boldsymbol{\rho}$ 的斜对称矩阵，

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \tag{5.4-15}$$

由于上述的质心惯性坐标系与刚体(星体)不固连，在星体转动过程中，惯量阵为非常值矩阵，不便于动力学分析。为此，必须选取固连于星体的本体坐标系 $ox_b y_b z_b$，获得常值惯量阵；同时在本体坐标系描述星体相对空间的角动量及角动量定理，即在动坐标中描述矢量相对固定参考坐标的变化。设有本体矢量 $\boldsymbol{a}$，在参考坐标中该矢量为 $\boldsymbol{a}'$，按姿态矩阵定义，有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}'$，将其微分，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{A}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}'}{\mathrm{d}t} \tag{5.4-16}$$

前述已有转换矩阵变化率的公式(5.3-2)：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{A}$$

$\tilde{\boldsymbol{\omega}}$为动坐标相对参考坐标的转速矢量的斜对称矩阵式(5.3-1)，将上式代入式(5.4-16)，有

$$\boldsymbol{A}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}$$

在上式中应用了矢量叉积的矩阵形式：$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\tilde{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}$，$\tilde{\boldsymbol{b}}$为斜对称阵，与式(5.4-15)的形式相同。在式(5.4-16)中，$\boldsymbol{A}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}'}{\mathrm{d}t}$意义为在动坐标系描述矢量相对参考坐标系的变化率，可记为$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right|_r$，另一个$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$为在动坐标系描述矢量在该动坐标系的变化率，可记为$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right|_b$。因此，矢量相对固定参考坐标的变化率，等于矢量在动坐标的变化率和动坐标相对参考坐标的转速矢量与该矢量的叉积之和：

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right|_r = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right|_b + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}$$

通常，上式简写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}$$

$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$表示绝对微分，$(\dot{\ })$表示相对微分。

最后，将角动量定理式(5.4-10)转入星体坐标(略去下标 o)，即得姿态动力学方程

$$\dot{\boldsymbol{H}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{M} \tag{5.4-17}$$

或写成

$$\dot{\boldsymbol{H}}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{M}$$

$\tilde{\omega}$为斜对称矩阵，与式(5.4 15)相似。上式的展开式为

$$\dot{H}_x+\omega_y H_z-\omega_z H_y=M_x$$

$$\dot{H}_y+\omega_z H_x-\omega_x H_z=M_y$$

$$\dot{H}_z+\omega_x H_y-\omega_y H_x=M_z$$

式中角动量分量 H_x, H_y, H_z 由式(5.4-12)定义为

$$\left.\begin{aligned}H_x&=I_x\omega_x-I_{xy}\omega_y-I_{xz}\omega_z\\H_y&=-I_{xy}\omega_x+I_y\omega_y-I_{zy}\omega_z\\H_z&=-I_{xz}\omega_x-I_{yz}\omega_y+I_z\omega_z\end{aligned}\right\}\tag{5.4-18}$$

由此可见，星体绕某轴的角动量不仅决定于绕此轴的转速，还与绕其他两轴的转速有关。这是由惯量积 I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}引起的动力学耦合，使卫星姿态控制过程复杂化。因此，惯量矩阵的选取和调整是卫星总体设计的重要内容。

星体的惯量与坐标轴的选取密切相关，如在原坐标的惯量矩阵为 $\boldsymbol{I}$，则在新坐标的惯量矩阵为 $\boldsymbol{I}'$。令原坐标与新坐标的转换矩阵为 $\boldsymbol{R}$，质量元位置矢量分别为 ρ 和 ρ'，相互关系为

$$\rho'=\boldsymbol{R}\rho$$

根据惯量矩阵式(5.4-14)，可得惯量矩阵的转换式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}'&=\int(\rho'^{\mathrm{T}}\rho'\boldsymbol{E}-\rho'\rho'^{\mathrm{T}})\mathrm{d}m\\&=\int(\rho^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\rho\boldsymbol{E}-\boldsymbol{R}\rho\rho^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})\mathrm{d}m\\&=\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\end{aligned}\tag{5.4-19}$$

利用转换矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的正交性质 $\boldsymbol{R}^{-1}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$，由 $\boldsymbol{H}'=\boldsymbol{I}'\omega'$，可得

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}'(\boldsymbol{R}\omega)$$

或

$$\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}'\boldsymbol{R})\omega=\boldsymbol{I}\omega$$

因此，新坐标的惯量阵与原坐标的惯量阵的关系可写为

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}'\boldsymbol{R}$$

与式(5.4-19)等同。

根据惯量矩阵各元素的等式，惯量矩阵为实对称矩阵。由矩阵理论，惯量矩阵可有正交的特征矢量和对应的实特征值，标记为 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ 和 $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$，其关系式为

$$\boldsymbol{I}\boldsymbol{e}_x=\lambda_x\boldsymbol{e}_x,\qquad \boldsymbol{I}\boldsymbol{e}_y=\lambda_y\boldsymbol{e}_y,\qquad \boldsymbol{I}\boldsymbol{e}_z=\lambda_z\boldsymbol{e}_z$$

选取正交矩阵 $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}=[\boldsymbol{e}_x\,\boldsymbol{e}_y\,\boldsymbol{e}_z]^{\mathrm{T}}$，可将惯量矩阵 $\boldsymbol{I}$ 正交化，可写出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}&=\boldsymbol{I}[\boldsymbol{e}_x\,\boldsymbol{e}_y\,\boldsymbol{e}_z]=[\lambda_x\boldsymbol{e}_x\,\lambda_y\boldsymbol{e}_y\,\lambda_z\boldsymbol{e}_z]\\&=[\boldsymbol{e}_x\,\boldsymbol{e}_y\,\boldsymbol{e}_z]\begin{bmatrix}\lambda_x&0&0\\0&\lambda_y&0\\0&0&\lambda_z\end{bmatrix}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_\lambda\end{aligned}$$

或写成

$$\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}_\lambda$$

可见，经特定的坐标转换(矩阵 $\boldsymbol{R}$)，新的惯量矩阵为对角矩阵 $\boldsymbol{I}_\lambda$，其对角元素为 $\lambda_x,\lambda_y,\lambda_z$，所有惯量积都为零。根据转换矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的定义，新坐标的正交坐标轴的基矢量即为特征矢量 $\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$，因此，称其为惯量主轴，对角元素 $\lambda_x,\lambda_y,\lambda_z$ 为绕该主轴的主惯量。

通常，卫星是由若干个刚体组成的系统，(挠性体见第九章)其中一个为主体，其他为子体。系统的动力学方程仍由式(5.4-17)描述，但式中角动量包含更多的成分，参见图 5.4-2，系统质心坐标系固连于主体 B_1，主体的转速为 $\boldsymbol{\omega}_1$。相对主体系统质心坐标系，第 n 子体的质心位于 $\boldsymbol{o}_n$，转速为 $\boldsymbol{\omega}_n$，体中质量元的位置表示为 $\boldsymbol{r}_n$(略去下标 i)。子体质心坐标系相对主体系统坐标的转换矩阵为 R_n。在系统坐标中，主体和子体的质心位置不变，各体中质量元的几何关系式是

$$\boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{o}_n + \boldsymbol{\rho}_n, \qquad n = 1,2,\cdots,N \tag{5.4-20}$$

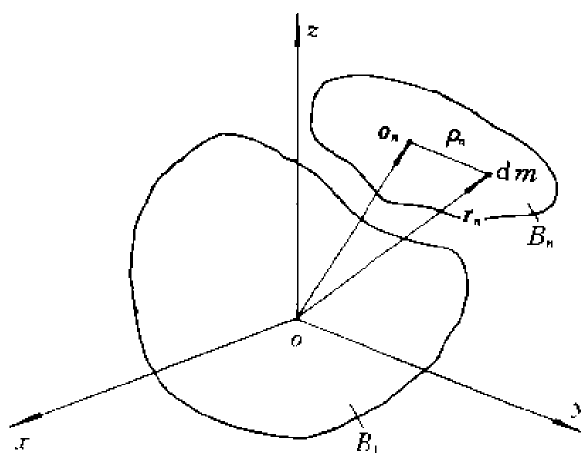


图 5.4-2

这里下标 n 代表刚体的序号，$\boldsymbol{r}_n$ 和 $\boldsymbol{\rho}_n$ 泛指在第 n 体内任一质量元的位置矢量。质量元相对空间的速度是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_n}{\mathrm{d}t} &= \dot{\boldsymbol{r}}_n + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_n \\ &= \boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\rho}_n + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_n, \qquad n = 1,2,\cdots,N\end{aligned}$$

对于主体 $\dot{\boldsymbol{r}}_1=0$，上式无右端第一项。

由此，系统的角动量可列为各子体角动量之和：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H} &= \sum_{n=1}^{N}\int \boldsymbol{r}_n \times \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_n}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}m \\ &= \sum_{n=1}^{N}\int \boldsymbol{r}_n \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_n)\mathrm{d}m + \sum_{n=1}^{N}\int \boldsymbol{r}_n \times (\boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\rho}_n)\mathrm{d}m\end{aligned} \tag{5.4-21}$$

上式右端第一项实为各子体 $B_n(n=2,\cdots,N)$相对于主体处于冻结状态时整个系统的角动量，第二项为各子体相对于主体的角动量之和。将几何关系式(5.4-20)代入式(5.4-21)，并考虑到对主体和各子体，有

$$\int \boldsymbol{\rho}_n \mathrm{d}m = 0, \qquad n = 1,2,\cdots,N$$

卫星系统角动量可列为

$$H = \sum_{n=1}^{N} o_n \times (\omega_1 \times o_n) m_n + \int \rho_1 \times (\omega_1 \times \rho_1) \mathrm{d}m + \sum_{n=2}^{N} \int \rho_n \times [(\omega_1 + \omega_n) \times \rho_n] \mathrm{d}m \tag{5.4-22}$$

上式中 m_n 为第 n 体的总质量。右端第一项为主体及各子体质量集中于自身质心 $o_n(n=1,\cdots,N)$时，整个系统的角动量；第二、三项为主体和各子体以自身质心为基准点的相对空间的角动量。令主体和各子体在自身坐标的惯量阵为 I_1 和 I_n，引用各子体坐标相对主体坐标的转换矩阵 R_n 和惯量阵的转换关系，系统角动量(5.4-22)的矩阵形式可写为

$$H = (I_o + I_1 + \sum_{n=2}^{N} R_n^{\mathrm{T}} I_n R_n)\omega_1 + \sum_{n=2}^{N} R_n^{\mathrm{T}} I_n \omega_n \tag{5.4-23}$$

式中，I_o 为主体和子体的集中质量在主体质心系统坐标系的惯量阵，即

$$I_o = \sum_{n=1}^{N} (o_n^{\mathrm{T}} o_n E - o_n o_n^{\mathrm{T}}) m_n \tag{5.4-24}$$

5.5 自旋卫星姿态运动特性

自旋卫星的姿态动力学就是经典力学中刚体绕定点转动的问题，在许多理论力学书中有详细的论述。为了便于说明自旋卫星姿态运动的特点以及姿态控制中的一些问题，有必要阐述刚体自旋运动的一些基本特性。

5.5.1 轴对称卫星的自由运动

令 $oxyz$ 是卫星的主惯量坐标系，各坐标轴都与通过质心的主惯量轴一致，卫星绕这些轴的主惯量是 I_x、I_y、I_z。在此本体主轴坐标系中，惯量积等于零，卫星姿态自由转动力学方程最简单，这就是欧拉方程。它可从式(5.4-5)和式(5.4-14)直接导出(当外力矩 $M=0$)：

$$\left.\begin{aligned} I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z = 0 \\ I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x = 0 \\ I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.5-1}$$

前面已提及角速度 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ 是刚体对空间的瞬时转速 ω 在本体坐标系中的分量。要分析单旋体自由运动的性质，定量地描述星体的运动参数，必须从动力学方程(5.5-1)中解出星体角速率 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$。为了便于说明运动的基本性质，先假定星体对自旋轴 oz 是轴对称的，星体的惯量椭球是旋转椭球，绕通过星体质心的横轴的横向惯量都相等，即 $I_x=I_y$，从式(5.5-1)中第三个方程得出 ω_z 等于常值。令 $I_x=I_y=I_t$，$\omega_z=\omega_s$，$\Omega_n=\left(\frac{I_z}{I_t}-1\right)\omega_s$，在无外力矩作用下，动力学方程(5.5-1)进一步简化为

$$\left.\begin{aligned} \dot{\omega}_x + \Omega_n\omega_y = 0 \\ \dot{\omega}_y - \Omega_n\omega_x = 0 \\ \dot{\omega}_z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.5-2}$$

从此方程组可以看出对称自旋卫星的自旋运动是独立的，与横向运动之间没有耦合作用。令初

始条件为 $\omega_x(0)=\omega_0\cos\varphi,\omega_y(0)=\omega_0\sin\varphi,\omega_z(0)=\omega_s$，方程组(5.5-2)的解是

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega_0\cos(\Omega_n t+\varphi)\\ \omega_0\sin(\Omega_n t+\varphi)\\ \omega_s\end{bmatrix}\tag{5.5-3}$$

从式(5.5-3)可以看出星体姿态运动的特点：在星体坐标系中，角速率分量 ω_x,ω_y 周期性地变化，周期为$\frac{2\pi}{\Omega_n}$，而自旋转速始终为常数 ω_s。在此坐标系中星体的转速矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 可以表达成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}&=\omega_x\boldsymbol{e}_x+\omega_y\boldsymbol{e}_y+\omega_z\boldsymbol{e}_z\\&=\omega_0\cos(\Omega_n t+\varphi)\boldsymbol{e}_x+\omega_0\sin(\Omega_n t+\varphi)\boldsymbol{e}_y+\omega_z\boldsymbol{e}_z\\&=\boldsymbol{\omega}_t+\omega_z\boldsymbol{e}_z\end{aligned}\tag{5.5-4}$$

式中，$\boldsymbol{\omega}_t=\omega_x\boldsymbol{e}_x+\omega_y\boldsymbol{e}_y$ 是 ω_x,ω_y 的合成角速率矢量。由于它们处在和自旋轴垂直的平面内，因此称之为横向角速率。此矢量的幅值为 $\omega_t=\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2}=\omega_0$。由于 ω_x,ω_y 是周期性变化的，在星体坐标系的 xy 平面内，横向角速率矢量 $\boldsymbol{\omega}_t$ 绕 oz 轴旋转，转速为 Ω_n。因此星体的瞬时转速 $\boldsymbol{\omega}$ 绕自旋轴作圆锥运动，见图 5.5-1。

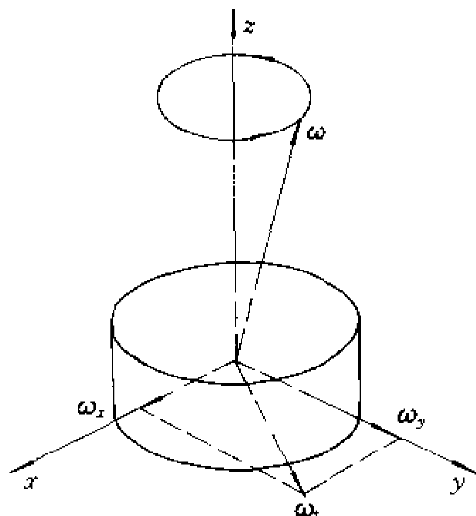


图　5.5-1

对扁粗形的自旋卫星，它的自旋轴惯量 I_z 大于横向轴惯量 I_t（通称惯量比大于 1），所以 $\Omega_n>0$，在这种情况下星体的转速矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 绕自旋轴作圆锥运动的方向和自旋转速同向。对于细长形的自旋卫星，因 $I_t>I_z$（通称惯量比小于 1），$\Omega_n<0$，星体的转速 $\boldsymbol{\omega}$ 作圆锥运动的方向和自旋转速反向。

为了进一步说明星体自旋轴的运动规律，利用在空间中固定的角动量矢量 $\boldsymbol{H}$ 作为基准，此矢量在星体坐标中可以表示成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=I_x\omega_x\boldsymbol{e}_x+I_y\omega_y\boldsymbol{e}_y+I_z\omega_z\boldsymbol{e}_z\\&=I_t\boldsymbol{\omega}_t+I_z\omega_z\boldsymbol{e}_z\end{aligned}\tag{5.5-5}$$

从式(5.5-5)可看出，角动量矢量 $\boldsymbol{H}$ 由横向、轴向两部分组成，由于横向角速率 $\boldsymbol{\omega}_t$ 绕自旋轴旋转，因此自旋轴也作圆锥运动，使这两部分旋转着的矢量的合成矢量 $\boldsymbol{H}$ 在空间中定向。比较式(5.5-4)与式(5.5-5)，可将瞬时转速矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 表示为

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{I_t}\boldsymbol{H}+\left(-\frac{I_z}{I_t}+1\right)\omega_z\boldsymbol{e}_z=\frac{H}{I_t}\boldsymbol{e}_h-\Omega_n\boldsymbol{e}_z\tag{5.5-6}$$

$\boldsymbol{e}_h$ 为沿角动量方向的单位矢量，式(5.5-6)应看作是从空间观察 $\boldsymbol{\omega}$ 的结果。从式(5.5-6)中可看出一个重要的结论：角动量 $\boldsymbol{H}$、瞬时转速 $\boldsymbol{\omega}$、自旋轴 z 三个矢量必定在同一平面内，见图 5.5-2。此平面绕矢量 $\boldsymbol{H}$ 旋转，这是因为矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 绕 z 轴作圆锥运动。因此 $\boldsymbol{\omega}$ 矢量将同时作两种圆锥运动（见图 5.5-3），一是绕星体主惯量轴 z 作的圆锥运动，其转速为 Ω_n，它称为本体章运速率；另一种是绕角动量 $\boldsymbol{H}$ 作的圆锥运动，旋转速度是 $\Omega=\frac{H}{I_t}$（可以从式(5.5-6)看出），它称为空间章

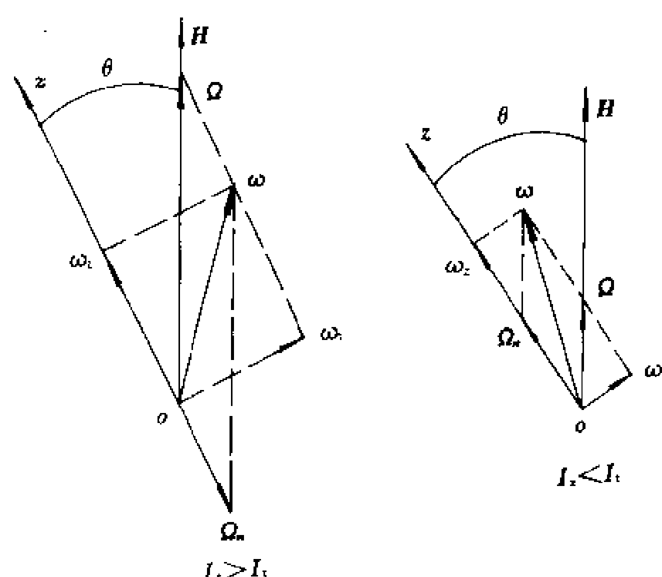


图 5.5-2

动速率。转速 ω 绕 z 轴的圆锥称为本体锥，而绕 $\boldsymbol{H}$ 的圆锥称为空间锥。显然，此空间锥在空间中是固定的，整个星体的姿态运动是星体绕自旋轴旋转，同时本体锥在空间锥上滚动。此两圆锥的切线就是转速矢量的方向，在此瞬时，星体内沿此切线方向上的质点都处在静止状态。由于本体锥在空间锥上滚动，星体的自旋轴 z 也绕角动量 $\boldsymbol{H}$ 作圆锥运动，根据 z,H,ω 共面的性质，z 轴绕 $\boldsymbol{H}$ 作圆锥运动的速度就等于空间章动速率 Ω，z 轴矢量与 $\boldsymbol{H}$ 的夹角 θ 称为章动角。

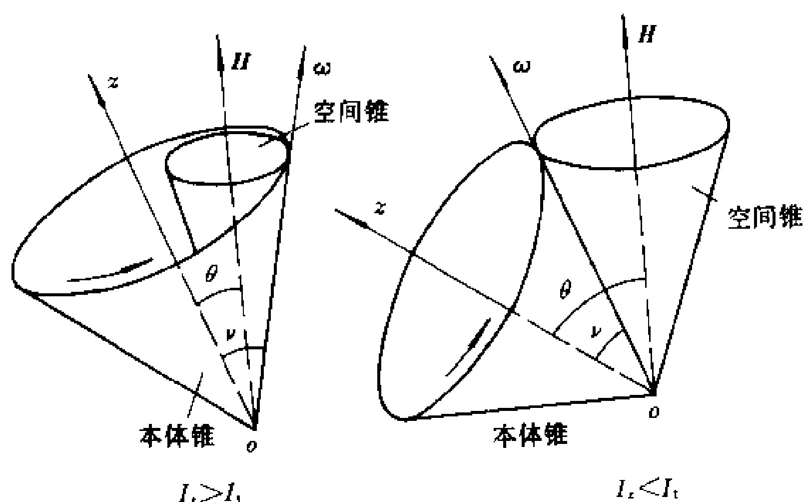


图 5.5-3

根据式(5.5-5)，章动角的计算公式是

$$\theta=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{e}_z}{H}\right)=\arccos\left(\frac{I_z\omega_z}{H}\right) \tag{5.5-7}$$

上式表明，轴对称自旋卫星的章动角是常值。

矢量 $\boldsymbol{H},\omega,z$ 之间的几何关系与星体的轴惯量 I_z 和横惯量 I_t 之比有关。角动量由轴向角

动量 $I_z\omega_z$ 和横向角动量 $I_t\omega_t$ 两部分组成，它们之比等于章动角的正切，$\tan\theta=\frac{I_t\omega_t}{I_z\omega_z}$。角速率也由自旋角速率和横向角速率组成，它们之比等于 ω 和 z 之间的夹角 γ 的正切，$\tan\gamma=\frac{\omega_t}{\omega_z}$，因此有 $\tan\theta=\left(\frac{I_t}{I_z}\right)\tan\gamma$。

如果星体是扁粗形的，它的轴向惯量大于横向惯量，$I_z>I_t$，则 $\theta<\gamma$，角动量 $\boldsymbol{H}$ 在 ω 与 z 矢量之间(见图 5.5-3)，空间锥在本体锥之内。因为 $\Omega_n>0$，所以本体锥的旋转方向和自旋方向相同。当 θ 角较小时，从空间角动量端点观察，ω 矢量端点作圆锥运动的速度近似等于星体自旋速率和本体章动速率之和，即 $\Omega\approx\omega_z+\Omega_n$，自旋轴 z 绕角动量 $\boldsymbol{H}$ 作圆锥运动的空间章动速率大于星体自身的自旋速率。

如果星体是细长形的，它的轴向惯量小于横向惯量，$I_z<I_t$，则 $\theta>\gamma$，角速率矢量 ω 在 $\boldsymbol{H}$ 与 z 之间，空间锥在本体锥之外。因为 $\Omega_n<0$，所以本体锥的旋转方向和自旋方向相反。因此自旋轴绕角动量方向作圆锥运动的空间章动速率近似等于星体自旋速率和本体章动速率之差，即 $\Omega\approx\omega_z+\Omega_n(\Omega_n<0)$，它小于星体的自旋速率。

不同性质的惯量比引起的重大差别，对星体的稳定性起很大的影响。根据章动角 θ 和章动速率 Ω_n 的公式，可导出

$$\cos\theta=\frac{I_z\omega_z}{H}=\frac{I_t}{H}(\omega_z+\Omega_n)$$

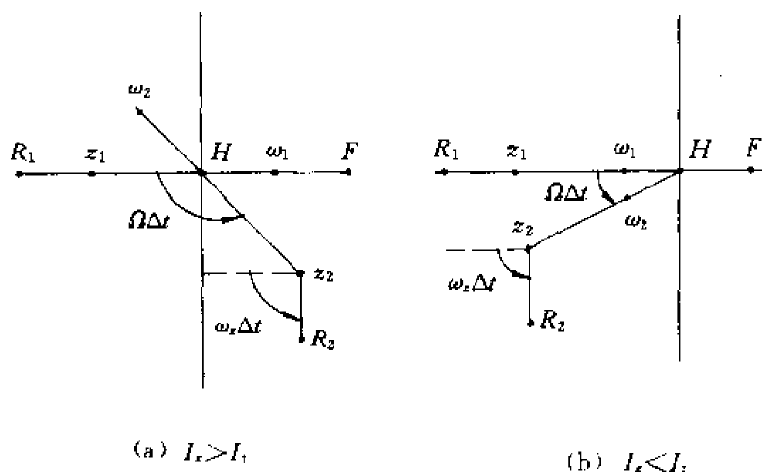
因此，有

$$\left.\begin{aligned}\Omega\cos\theta&=\frac{H}{I_t}\cos\theta=\omega_z+\Omega_n=\frac{I_z}{I_t}\omega_z\\ \Omega_n&=\left(\frac{I_z-I_t}{I_z}\right)\Omega\cos\theta\end{aligned}\right\}\tag{5.5-8}$$

为了进一步说明星体在章动时的运动情况，通过角动量 $\boldsymbol{H}$ 的端点作一垂直于 $\boldsymbol{H}$ 的空间固定平面，令 z,ω 表示自旋轴和转速矢量端点在该平面上的投影，R,F 表示固连在星体上的某参考点和在空间中的某参考点在该平面上的投影。分析星体章动时这些投影点在空间固定平面上移动的轨迹将有助于理解星体章动的特性，图 5.5-4(a)和 5.5-4(b)分别是惯量比大于 1 和小于 1 的星体运动情况，两者的自旋速率相同，但本体章动速率和空间章动速率都不同。不失一般性，假定在 t_1 时刻 H,F,z_1,ω_1,R_1 都位于一条直线上，到 t_2 时刻($t_2=t_1+\Delta t$)，空间章动使 z_1H 直线在空间中转过 $\Omega\Delta t$ 角，自旋轴和转速从 z_1,ω_1 转到 z_2,ω_2，星体自旋使 R_1z_1 线在空间中相对于 z_1H 线转过 $\omega_z\Delta t$ 角，参考点从 R_1 转到 R_2。在图 5.5-4(a)上，由于空间章动速率大于自旋速率，参考点 R 在空间将不断地滞后于 z，显示出 R 在后退。相反，在图 5.5-4(b)上，参考点 R 不断地超前于 z。

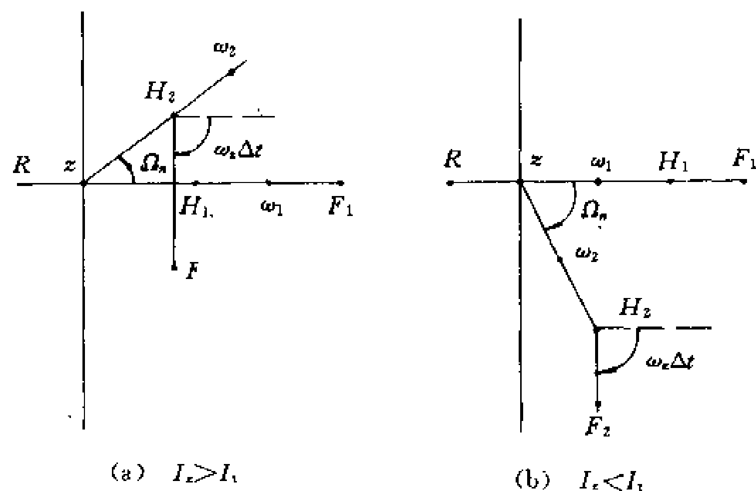
以上是从空间观察星体的章动情况。用类似的方法可以从星体上观察角动量端点 H 和空间参考点 F 的运动。如图 5.5-5 所示，图上的平面垂直于 z 轴并固定在星体上。在图(a)上，本体章动使 ω_1z 线相对于 zR 线顺自旋方向转过 $\Omega_n\Delta t$ 角，角动量和转速从 H_1,ω_1 转到 H_2,ω_2。在图(b)上，本体章动使 ω_1z 线相对 zR 线逆自旋方向转过 $\Omega_n\Delta t$ 角。而星体自旋却使两者的 F_1H_1 线相对于 zR 线反方向转过 $\omega_z\Delta t$ 角，空间参考点从 F_1 转到 F_2。

引用欧拉角和欧拉角运动方程说明星体在空间的章动运动。取角动量 $\boldsymbol{H}$ 矢量为参考坐标的 z 轴。按 3-1-3 欧拉转动顺序(ψ,θ,φ)，欧拉角变化方程为式(5.3-6)，即



(a) $I_z > I_t$　　(b) $I_z < I_t$

图 5.5-4



(a) $I_z > I_t$　　(b) $I_z < I_t$

图 5.5-5

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{\psi} &= (\omega_x \sin\varphi + \omega_y \cos\varphi)\frac{1}{\sin\theta} \\
\dot{\theta} &= \omega_x \cos\varphi - \omega_y \sin\varphi \\
\dot{\varphi} &= \omega_z - (\omega_x \sin\varphi + \omega_y \cos\varphi)\cot\theta
\end{aligned}\right\} \tag{5.5-9}
$$

参见图 5.5-6，欧拉角 θ 为角动量 $\boldsymbol{H}$ 与本体 z_b 轴的夹角，欧拉角 φ 为角动量 $\boldsymbol{H}$ 在本体 $x_b y_b$ 平面上投影与 y_b 轴的夹角。因此角动量 $\boldsymbol{H}$ 在本体坐标的分量可列为

$$
\left.\begin{aligned}
H_x &= H\sin\theta\sin\varphi \\
H_y &= H\sin\theta\cos\varphi \\
H_z &= H\cos\theta
\end{aligned}\right\} \tag{5.5-10}
$$

如星体惯量积为零，由式(5.4-12)，角动量又可列为

$$\left.\begin{aligned} H_x &= I_x \omega_x \\ H_y &= I_y \omega_y \\ H_z &= I_z \omega_z \end{aligned}\right\} \tag{5.5-11}$$

由式(5.5-10)和式(5.5-11)导出 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$，再代入式(5.5-9)，得

$$\dot{\psi} = H\left(\frac{\sin^2\varphi}{I_x} + \frac{\cos^2\varphi}{I_y}\right)$$

$$\dot{\varphi} = H\left[\frac{1}{I_z} - \left(\frac{\sin^2\varphi}{I_x} + \frac{\cos^2\varphi}{I_y}\right)\right]\cos\theta$$

$$\dot{\theta} = H\left(\frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y}\right)\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi$$

如星体横向惯量相等，$I_x=I_y=I_t$，则上式给出结论：

$$\dot{\psi} = \frac{H}{I_t}, \qquad \dot{\varphi} = -\frac{I_z - I_t}{I_t}\omega_z, \qquad \dot{\theta} = 0$$

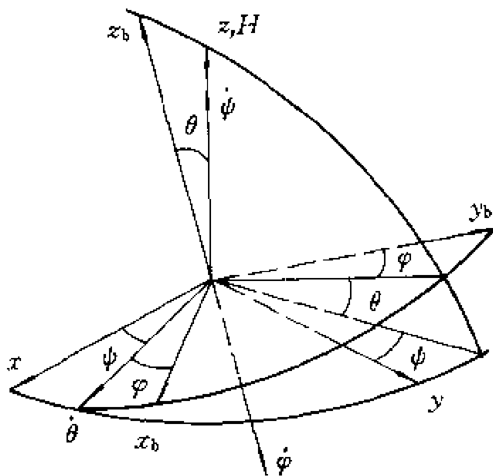


图 5.5-6

即星体章动角 θ 为常值；自旋轴 z_b 绕角动量 $\boldsymbol{H}$ 作锥运动(空间进动)的节线转动速率 $\dot{\psi}$亦为常值，其矢量 $\dot{\boldsymbol{\psi}}$与 $\boldsymbol{H}$ 重合，在空间是固定的；与星体固连的转速矢量$\dot{\boldsymbol{\varphi}}$和星体同进动(称为本体进动速率)，其方向与 $\dot{\boldsymbol{\psi}}$或同向或反向。对于短粗体($I_z>I_t$)，$\dot{\boldsymbol{\varphi}}$与 $\dot{\boldsymbol{\psi}}$反向，称为逆进动；对于细长体($I_z<I_t$)，$\dot{\boldsymbol{\varphi}}$与 $\dot{\boldsymbol{\psi}}$同向，称为顺进动。以欧拉转动分析，星体相对空间的转动运动是$\dot{\boldsymbol{\varphi}}$和 $\dot{\boldsymbol{\psi}}$的合成，即

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\psi}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}}$$

当 $\dot{\theta}=0$，由欧拉角速率 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ 的式(5.3-4)可得

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\omega}\| &= (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

上两式是等同的，星体的转速矢量由两个非正交矢量组成。

联立求解欧拉动力学方程(5.5-1)和运动学方程(5.5-9)可分析姿态的变化过程，共有六个变量：$\omega_x,\omega_y,\omega_z,\psi,\varphi,\theta$，但初条件仅需 4 个独立量，$\omega_x(0),\omega_y(0),\omega_z(0),\psi(0)$。

5.5.2 非轴对称卫星的自由运动

以上讨论了轴对称自旋卫星的自由运动,它的基本特点是:主惯量轴(星体绕其自旋)在空间作圆锥运动,其端点在空间描绘出一个规则的正圆,总角动量在此圆锥的中心线上。如星体是非轴对称的,则星体的轴向转动与横向转动是耦合的,自旋速率 ω_z 不再是常值,主惯量轴的锥运动在空间形成比较复杂的图案。在欧拉动力学方程(5.5-1)中,令 $I_z>I_y>I_x$,在无外力矩作用下此方程组可以改写为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\omega}_x+\lambda_x\omega_y\omega_z&=0\\\dot{\omega}_y-\lambda_y\omega_z\omega_x&=0\\\dot{\omega}_z+\lambda_z\omega_x\omega_y&=0\end{aligned}\right\}\tag{5.5-12}$$

式中,$\lambda_x=\dfrac{I_z-I_y}{I_x}$, $\lambda_y=\dfrac{I_z-I_x}{I_y}$, $\lambda_z=\dfrac{I_y-I_x}{I_z}$。从上式可以导出

$$\left.\begin{aligned}\omega_x\dot{\omega}_x&=-\frac{\lambda_x}{\lambda_y}\omega_y\dot{\omega}_y\\\omega_z\dot{\omega}_z&=-\frac{\lambda_z}{\lambda_y}\omega_y\dot{\omega}_y\end{aligned}\right\}\tag{5.5-13}$$

令初始条件为 $\omega_x(0)=\omega_0,\omega_y(0)=0,\omega_z(0)=\omega_s$,将式(5.5-13)积分,得

$$\omega_x^2=\omega_0^2(1-\xi^2),\qquad \xi=\left(\frac{\lambda_x}{\lambda_y}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\omega_y}{\omega_0}$$

$$\omega_z^2=\omega_s^2(1-k^2\xi^2),\qquad k=\left(\frac{\lambda_z}{\lambda_x}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\omega_0}{\omega_s}$$

再将上两式代入方程组(5.5-12)中的第二个方程,得出 ξ 应满足的微分方程

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2=(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)\tag{5.5-14}$$

$$\tau=\omega_n t,\qquad \omega_n=(\lambda_x\lambda_y)^{\frac{1}{2}}\omega_s$$

此方程式的解是雅科比椭圆函数,即 $\xi=\text{sn }\tau$,它也是周期函数,幅值为±1,其特性有

$$\begin{aligned}&\text{sn}(\tau+4K)=\text{sn }\tau,\qquad &&\text{sn }0=0\\&1-\text{sn}^2\tau=\text{cn}^2\tau,\qquad &&\text{cn }0=1\\&1-k^2\text{sn }\tau=\text{dn}^2\tau,\qquad &&\text{dn }0=1\end{aligned}$$

椭圆函数见图 5.5-7,$\text{sn }\tau$,$\text{cn }\tau$ 的数值在±1 内振荡,周期是 $4K$。数值 K 为椭圆积分:

$$K=\int_0^1\frac{d\xi}{[(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)]^{\frac{1}{2}}}$$

$\text{dn }\tau$ 在+1 和 $\sqrt{1-k^2}$ 内交变,它的周期是 $2K$。引用这些椭圆函数,星体绕各坐标轴的转速等于

$$\left.\begin{aligned}\omega_x&=\omega_0\,\text{cn }\omega_n t\\\omega_y&=\omega_0\left(\frac{\lambda_y}{\lambda_x}\right)^{\frac{1}{2}}\text{sn }\omega_n t\\\omega_z&=\omega_s\,\text{dn }\omega_n t\end{aligned}\right\}\tag{5.5-15}$$

因此自旋轴章动运动的频率是$\frac{\omega_n}{4K}$,自旋转速起伏变化的频率是$\frac{\omega_n}{2K}$,等于两倍章动频率。当 $\omega_n t=lK$ 和 $mK(l=1,3,5,\cdots;m=2,4,6,\cdots)$时,星体的角动量是

$$H^2=I_y^2\omega_0^2\frac{\lambda_y}{\lambda_x}+I_z^2(1-k^2)\omega_s^2$$

和

$$H^2=I_x^2\omega_0^2+I_z^2\omega_s^2$$

由于 H^2 是常值,所以上式对应的自旋轴与角动量轴的夹角分别为

$$\cos\theta_{\max}=\frac{I_z\omega_s}{H},\qquad \cos\theta_{\min}=\frac{I_z\omega_s}{H}\sqrt{1-k^2} \tag{5.5-16}$$

$\theta_{\max},\theta_{\min}$就是在一个章动周期$\left(\frac{4K}{\omega_n}\right)$内章动角的最大值和最小值,章动角同样以两倍章动频率作周期性地变化。如星体的不对称性很小,或章动角很小,这时 $k\ll1$,椭圆函数近似等于三角函数($K\approx\frac{\pi}{2}$),非轴对称星体的自由运动和轴对称体相同。

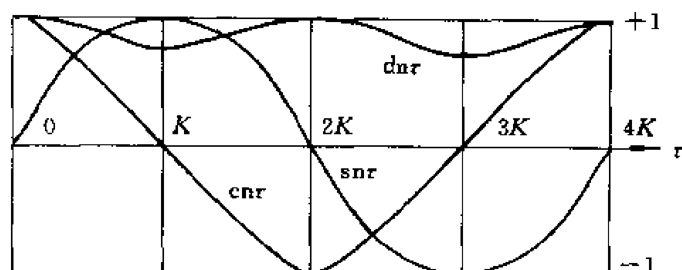


图 5.5-7

5.5.3 Poinsot 运动

可以用类似本体锥、空间锥的几何方法来描述非轴对称自旋卫星的自由运动。在经典刚体动力学中,Poinsot 研究了非对称刚体的自由运动,并形象地给出了这种运动的几何图像(见文献[42~44])。如刚体没有受到外力矩的作用,它的角动量 H 和动能 T 应保持常值,并可用惯量和角速率参数表示成

$$H^2=I_x^2\omega_x^2+I_y^2\omega_y^2+I_z^2\omega_z^2 \tag{5.5-17}$$

$$2T=I_x\omega_x^2+I_y\omega_y^2+I_z\omega_z^2 \tag{5.5-18}$$

这两个等式也就是动力学方程组式(5.5-1)的一次积分,将该方程组依次分别乘以 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ 或 $I_x\omega_x,I_y\omega_y,I_z\omega_z$,相加后再作积分,便可得出上述式子。能量式(5.5-18)可以改写成

$$\frac{\omega_x^2}{\left(\frac{2T}{I_x}\right)}+\frac{\omega_y^2}{\left(\frac{2T}{I_y}\right)}+\frac{\omega_z^2}{\left(\frac{2T}{I_z}\right)}=1 \tag{5.5-19}$$

如把 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ 看作为沿本体主轴坐标系 xyz 各坐标轴上的坐标量,式(5.5-19)在此坐标系中描绘了一个能量椭球(图 5.5-8(a))。椭球面是等动能面,椭球的大小决定于动能值 T。此椭球的半轴长度分别是$\sqrt{\frac{2T}{I_x}},\sqrt{\frac{2T}{I_y}},\sqrt{\frac{2T}{I_z}}$。已知刚体绕任一转轴的惯量可用本体主轴坐标系中的

惯量椭球表示，此椭球的方程是

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{I_x}\right)}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{I_y}\right)}+\frac{z^2}{\left(\frac{1}{I_z}\right)}=1 \tag{5.5-20}$$

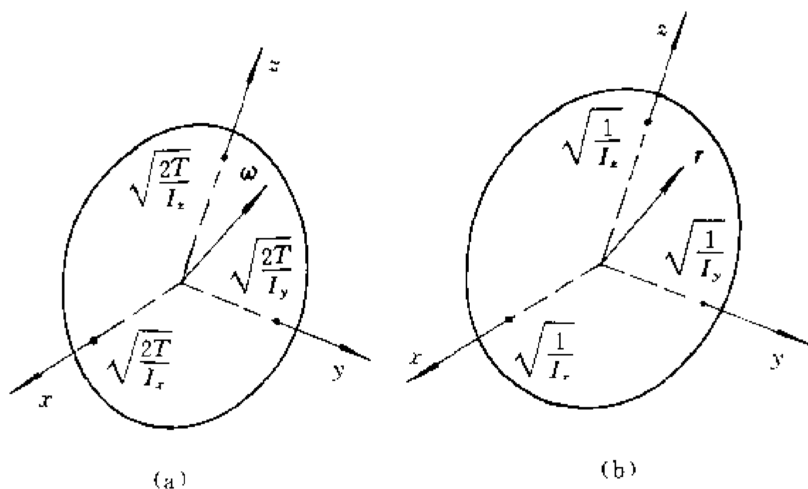


图 5.5-8

它的半轴长为$\sqrt{\frac{1}{I_x}}$,$\sqrt{\frac{1}{I_y}}$,$\sqrt{\frac{1}{I_z}}$(图 5.5-8(b))。从此惯量椭球的中心到球面上任一点的距离 r 与刚体绕沿距离矢量 $\boldsymbol{r}$ 方向的惯量 I 的关系是 $r=\sqrt{\frac{1}{I}}$。能量椭球和惯量椭球的形状相同，两者的尺度比是 $\sqrt{2T}:1$。显然，从能量椭球中心到球面上任一点的距离矢量就是刚体的瞬时转速矢量 $\boldsymbol{\omega}$，它的幅值是 $\|\boldsymbol{\omega}\|=\sqrt{\frac{2T}{I}}$。刚体转速矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 在空间中的变动直接表示了刚体的运动情况，当动能给定时，转速矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的端点只能在能量椭球面上移动。如在转速矢量的端点处求等动能面的梯度，可得

$$\mathbf{grad}\ T=\frac{\partial T}{\partial \omega_x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial T}{\partial \omega_y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial T}{\partial \omega_z}\boldsymbol{e}_z$$

$\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ 为本体坐标轴的单位矢量，利用动能式(5.5-18)，上式可化成

$$\mathbf{grad}\ T=I_x\omega_x\boldsymbol{e}_x+I_y\omega_y\boldsymbol{e}_y+I_z\omega_z\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{H}$$

因此在等动能面上，转速矢量端点处的法线和刚体的角动量平行。由于角动量在空间中是固定的，必然有一垂直于 $\boldsymbol{H}$ 的固定平面与能量椭球相切，切点是瞬时转速矢量的端点，此平面称为不变平面。从椭球中心到此平面的距离 d 也是常值，因为(见图 5.5-9)

$$d=\boldsymbol{\omega}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{H}}{H}\right)=\frac{2T}{H}$$

因此得出结论：刚体绕某一空间固定点运动时，它的固定在本体坐标中的能量椭球在此不变平面上滚动，而且在滚动过程中此椭球的中心始终保持与此不变平面同等距离(图 5.5-9)。随着椭球的滚动，刚体转速矢量的端点——即椭球与不变平面的接触点，分别在椭球面上和不变平面上描绘出一条轨迹，称为本体极迹和空间极迹。因为刚体和 $\boldsymbol{\omega}$ 必然要回到它的起始位置，本

体极迹是条封闭的曲线。如刚体是轴对称的(例如 $I_x=I_y$),能量椭球就是一个绕 z 轴的旋转椭球,本体极迹和空间极迹都形成一个正圆。这和上节的本体锥、空间锥的几何概念是一致的。本体极迹是本体锥与椭球的交线,空间极迹是空间锥与不变平面的交线。

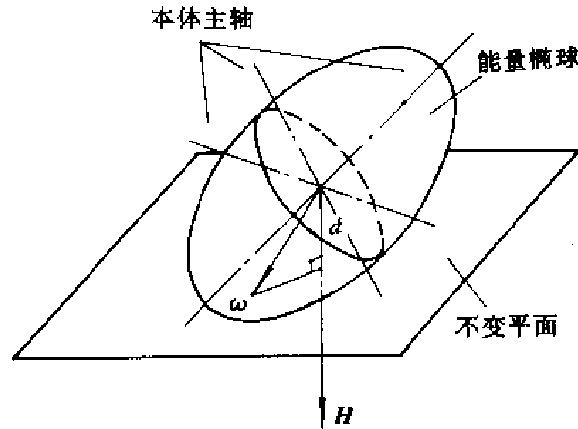


图 5.5-9

由于能量椭球的尺度与动能值有关,所以改用惯量椭球表示刚体的运动更方便。将转速 $\boldsymbol{\omega}$ 规格化,定义

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{I}}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\right) = \frac{1}{\sqrt{2T}}\boldsymbol{\omega} \tag{5.5-21}$$

式中 I 是刚体绕瞬时转轴的惯量。能量椭球式(5.5-19)可化成

$$\frac{\xi_x^2}{\left(\frac{1}{I_x}\right)} + \frac{\xi_y^2}{\left(\frac{1}{I_y}\right)} + \frac{\xi_z^2}{\left(\frac{1}{I_z}\right)} = 1 \tag{5.5-22}$$

它与惯量椭球式(5.5-20)相同。在此椭球面上任一点的距离矢量代表规格化的转速矢量,它的幅值等于刚体绕此方向的惯量。同上,刚体的自由运动也可以看作是此惯量椭球式(5.5-22)在不变平面上滚动,椭球中心到该平面的距离是

$$d' = \xi \cdot \frac{\boldsymbol{H}}{H} = \frac{\sqrt{2T}}{H} \tag{5.5-23}$$

当角动量给定时,具有不同能量的刚体的运动都可看作是同一个惯量椭球在不变平面上的滚动运动,在惯量椭球上每一条闭合的本体极迹都对应具有某一能量值的刚体的自由运动轨迹。利用定义式(5.5-21),可将角动量式(5.5-17)化成

$$\frac{\xi_x^2}{\frac{1}{2T}\left(\frac{H}{I_x}\right)^2} + \frac{\xi_y^2}{\frac{1}{2T}\left(\frac{H}{I_y}\right)^2} + \frac{\xi_z^2}{\frac{1}{2T}\left(\frac{H}{I_z}\right)^2} = 1 \tag{5.5-24}$$

将式(5.5-22)与式(5.5-24)合并,可得

$$I_x\left(I_x - \frac{H^2}{2T}\right)\xi_x^2 + I_y\left(I_y - \frac{H^2}{2T}\right)\xi_y^2 + I_z\left(I_z - \frac{H^2}{2T}\right)\xi_z^2 = 0$$

显然,上式中变量 ξ_x,ξ_y,ξ_z 前的系数至少有一个应是负值,也就是数值$\frac{H^2}{2T}$必在最大与最小主惯量值之间。不失一般性,假定各主惯量之间的关系是 $I_z>I_y>I_x$,则有

$$I_z > \frac{H^2}{2T} > I_x$$

再从式(5.5-22)和式(5.5-24)分别消去 ξ_x,ξ_y,ξ_z，可得如下三个方程式：

$$\left.\begin{aligned} I_y(I_y - I_x)\xi_y^2 + I_z(I_z - I_x)\xi_z^2 &= \frac{H^2}{2T} - I_x \\ -I_x(I_y - I_x)\xi_x^2 + I_z(I_z - I_y)\xi_z^2 &= \frac{H^2}{2T} - I_y \\ I_x(I_z - I_x)\xi_x^2 + I_y(I_z - I_y)\xi_y^2 &= I_z - \frac{H^2}{2T} \end{aligned}\right\} \tag{5.5-25}$$

第一和第三个方程是椭球式(5.5-22)的本体极迹在 yz 和 xy 平面上的投影，都是椭圆。第二个方程是本体极迹在 xz 平面上的投影，是双曲线，该方程式右端的值可正、可负。此正、负值决定双曲线在 xz 平面上的开口方向。当 $\frac{H^2}{2T}=I_y$ 时，该方程式成为双曲线的两条渐近线：

$$\frac{\xi_z}{\xi_x} = \frac{\omega_z}{\omega_x} = \pm\sqrt{\frac{I_x(I_y - I_x)}{I_z(I_z - I_y)}} \tag{5.5-26}$$

根据以上本体极迹的方程式(5.5-25)，并参看图 5.5-10 可得出结论：当角动量 H 给定时，如刚体的动能较大，$T>\frac{H^2}{2I_y}$，所有本体极迹的中心线都是 x 轴，即刚体的转速矢量绕最小惯量主轴 x 作椭圆形的锥运动。如刚体的动能较小，$T<\frac{H^2}{2I_y}$，刚体的转速矢量绕最大主惯量轴 z 作椭圆形的锥运动，如动能取最大或最小值，$T=\frac{H^2}{2I_x}$ 或 $T=\frac{H^2}{2I_z}$，本体极迹为处在 x 轴或 z 轴上的一个极点，即刚体绕 x 轴或 z 轴作恒定旋转。因而，动能 $T=\frac{H^2}{2I_y}$ 成为刚体两种锥运动的分界条件。

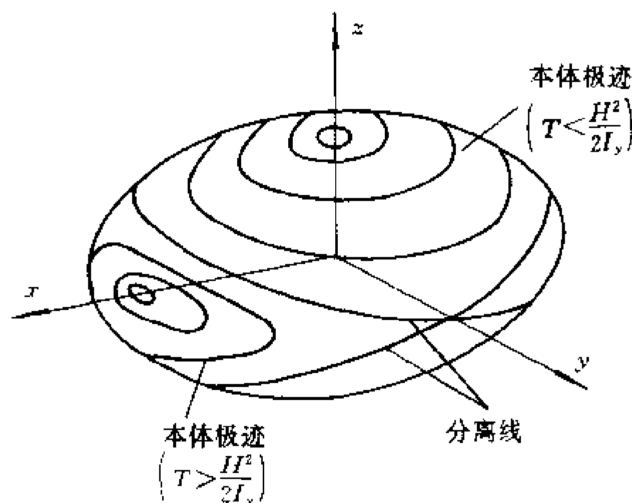


图 5.5-10

显然，刚体绕中间主惯量轴 y 恒定旋转($T=\frac{H^2}{2I_y}$)是不稳定的，这时刚体受到小扰动后，转速矢量端点将落入 $T>\frac{H^2}{2I_y}$ 或 $T<\frac{H^2}{2I_y}$ 的本体极迹区，刚体将改绕 x 轴或 z 轴作锥形旋转。直接

分析动力学方程(5.5-1)，也可得出这样的结论。

5.5.4 绕主轴旋转的稳定性

假定卫星受扰动前的角速率是 $\omega_x=\omega_y=0,\omega_z=\omega_s$；小扰动的作用使卫星运动的初始条件为 $\omega_x(0)=\varepsilon_x,\omega_y(0)=\varepsilon_y,\omega_z(0)=\omega_s+\varepsilon_z$。因为 $\omega_x,\omega_y\ll\omega_z$，可将欧拉方程(5.5-1)线性化，得

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\omega}_x+\frac{(I_z-I_x)(I_z-I_y)}{I_xI_y}\omega_s^2\omega_x=0\\ \ddot{\omega}_y+\frac{(I_z-I_x)(I_z-I_y)}{I_xI_y}\omega_s^2\omega_y=0\end{aligned}\right\}\tag{5.5-27}$$

只有当 $(I_z-I_x)(I_z-I_y)>0$ 时，式(5.5-27)才有稳定解：

$$\left.\begin{aligned}\omega_x&=\omega_0\cos(\sqrt{\lambda_x\lambda_y}t+\varphi_0)\\ \omega_y&=\omega_0\sqrt{\frac{\lambda_y}{\lambda_x}}\sin(\sqrt{\lambda_x\lambda_y}t+\varphi_0)\end{aligned}\right\}\tag{5.5-28}$$

式中，$\lambda_x=\dfrac{I_z-I_y}{I_x},\lambda_y=\dfrac{I_z-I_x}{I_y}$；$\omega_0,\varphi_0$ 决定于初始条件；横向角速率 ω_x,ω_y 的幅值始终为小量。因此，当星体绕最大或最小主惯量轴旋转时(即 $I_z>I_y,I_z>I_x$ 或 $I_z<I_x,I_z<I_y$)，自旋运动是稳定的，而绕中值主惯量轴旋转(即 $I_x<I_z<I_y$)，横向角速率 ω_x,ω_y 将按指数规律发散，导致自旋轴翻滚。

上述的稳定条件是针对刚体的情况，实际上卫星并不是刚体，它包含有非刚体的部件，如具有弹性的天线、燃料贮箱中的液体燃料等。当星体稳定自旋时(即 $\omega_x=\omega_y=0$)，星体内各点的离心力保持不变，星上可发生相对运动的质量都处在平衡状态。但星体章动能引起离心力的变化，因而激励这些可活动部件产生弹性振荡或相对位移。在这种情况下，星体的运动就不能用简单的欧拉方程来描述。如利用劳斯判据或建造李雅普诺夫函数导出稳定条件，则必须针对具体情况列出姿态运动方程，而且给出的稳定判据往往缺乏普遍意义。

但从能量观点可以分析星体运动的趋势，定性地得出具有普遍意义的稳定性条件。它的基本要点是：星体章动时，内部可活动质点的运动伴随着能量损耗，使星体的总动能减少，趋向于最小动能状态。由于角动量守恒，星体的动能不可能全部消失掉，因此在此最小动能状态下，星体的运动不再引起能量的损耗，它将绕某一主惯量轴稳定地自旋。从轴对称($I_x=I_y=I_t$)自旋卫星的角动量和动能公式

$$\left.\begin{aligned}H^2&=I_t^2(\omega_x^2+\omega_y^2)+I_z^2\omega_z^2\\ 2T&=I_t(\omega_x^2+\omega_y^2)+I_z\omega_z^2\end{aligned}\right\}\tag{5.5-29}$$

中可直接看出：当角动量给定时，绕最大主惯量轴纯自旋时星体的动能为最小，$T_{\min}=\dfrac{H^2}{2I_{\max}}$；绕最小主惯量轴旋转的动能为最大，$T_{\max}=\dfrac{H^2}{2I_{\min}}$。将式(5.5-19)改写为量纲为1量的形式：

$$\left(\frac{I_t\omega_t}{H}\right)^2+\left(\frac{I_z\omega_z}{H}\right)^2=1\tag{5.5-30}$$

$$\frac{I_z}{I_t}\left(\frac{I_t\omega_t}{H}\right)^2+\left(\frac{I_z\omega_z}{H}\right)^2=\frac{2TI_z}{H^2}\tag{5.5-31}$$

在 $\left(\dfrac{I_z\omega_z}{H},\dfrac{I_t\omega_t}{H}\right)$ 坐标中，式(5.5-30)描绘的等角动量轨迹是圆。式(5.5-31)描绘的等动能轨迹是

椭圆，如图 5.5-11 所示。如卫星是扁粗形 $I_z>I_t$，此椭圆的长轴与横坐标一致；如星体是细长形 $I_z<I_t$，椭圆的长轴与纵坐标一致。当角动量 H 给定时，星体的运动状态在等角动量圆上对应某一点。最大动能处在 A 或 A' 点。在此点上角动量圆和最大能量椭圆相切。当能量损耗时，因 H 值守恒，星体的运动参数沿着角动量圆移到 B 或 B' 点，到达该点后，能量将不再衰减，所

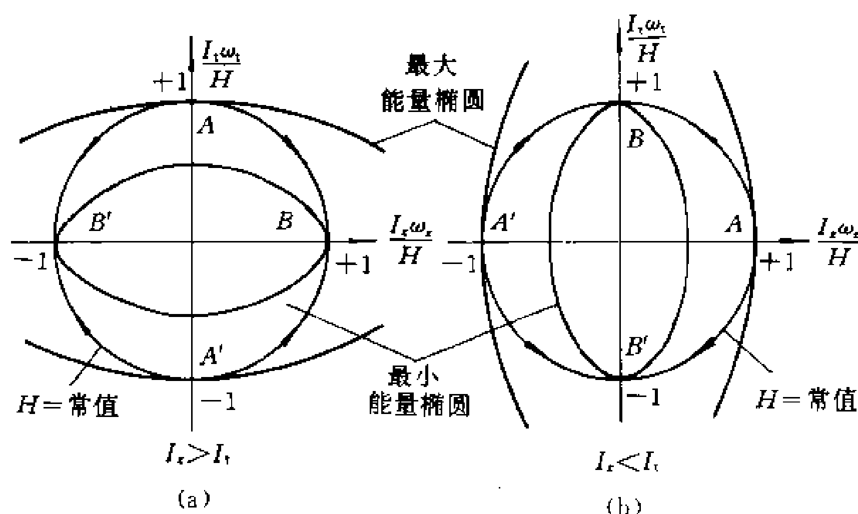


图 5.5-11

以 B，B' 点是稳定平衡点，而 A，A' 点是不稳定点。比较以上两种情况，可以得出结论：在有能量损耗的情况下绕最大主惯量轴自旋才是稳定的。

用解析法也能说明这个重要的原则，在方程式(5.5-29)中，消去 ω_x，ω_y，根据章动角的定义，从式(5.5-7)，可以得出

$$\cos^2\theta = \frac{I_z}{I_z - I_t}\left(1 - \frac{2I_tT}{H^2}\right) \tag{5.5-32}$$

微分后的结果是

$$\sin\theta\cos\theta\dot{\theta} = \frac{I_zI_t\dot{T}}{(I_z - I_t)H^2} \tag{5.5-33}$$

星体内的能量损耗意味着 $\dot{T}<0$，章动角 θ 定义在 0°～90°范围，所以只有当 $I_z>I_t$ 时，章动角才是衰减的，$\theta\dot{\theta}<0$。同样得出结论：章动稳定性要求星体绕最大主惯量轴旋转，这是单自旋卫星设计中的基本准则。如因某些特殊要求卫星必须是细长形，这将增加姿控系统的复杂性，需采用主动式章动阻尼。

5.6 双旋卫星姿态稳定性

这一节讨论对称双旋卫星的姿态运动和稳定性。对称双旋卫星的转子和平台都是静动平衡的，它们的质心都处在轴承轴的轴线上，两者沿自旋方向的主惯量轴和轴承轴线是一致的，并且横向主惯量都是均等的，因此两者组成的卫星系统的惯量矩阵是常值，与平台和转子之间的相对位置无关。双旋卫星的章动运动的基本性质和单自旋卫星相似，但运动的稳定性有很大差别。当平台跟随转子旋转时，星体成为单旋体；当平台消旋后，不跟随转子自转，在一定条件

下平台对转子的章动起镇定作用。

最先研究轴对称双旋稳定性的是 Landon 和 Iorillo。他们用能量耗散法证明出，在双旋卫星中，如只有一个旋转体内存在能量损耗，卫星绕最小主惯量轴的自旋也是稳定的。Iorillo 对于两个旋转体内都存在能量损耗的情况给出了稳定性准则。Linkins 和 Spancer 推广研究了非轴对称双旋卫星的稳定性。

能量耗散法的基本思想是：由于机械能守恒，旋转体内机械能的损耗会引起卫星旋转动能的变化，两者的变化率相等。将这种能量耗散法用于研究双旋卫星的姿态运动，常常假定平台与转子之间无摩擦力，消旋电机不供给或吸收能量，因此这种方法不严格，但却为工程初步设计提供了一些简明的准则。

5.6.1 双旋卫星的章动特性

在下文中，下标 r，p 分别表示转子和平台的参数。在图 5.6-1 中，o 为整星的质心；o_r，o_p 为转子和平台的质心。定义 $o_r x_r' y_r' z_r'$ 为固定在转子上的转子主轴坐标系，原点在 o_r 上。定义 $o_p x_p' y_p' z_p'$ 为固定在平台上的平台主轴坐标系，原点在 o_p 上。定义 $o_r x_r y_r z_r$ 和 $o_r x_p y_p z_p$ 为卫星转子坐标系和卫星平台坐标系，它们的原点都在整星的质心上，但坐标轴分别与转子、平台固连，并且与转子坐标系、平台坐标系的坐标轴平行。令 $e_{x_r}, e_{y_r}, e_{z_r}$ 和 $e_{x_p}, e_{y_p}, e_{z_p}$ 分别为两种卫星坐标系的单位矢量。令 $\omega, \omega_r, \omega_p$ 为卫星系统坐标系、转子坐标系和平台坐标系在空间的转速，如卫星系统坐标系与转子（或平台）固连，则 $\omega=\omega_r$（或 ω_p）。由于连接转子和平台的轴承轴只提供一个绕 z_r 轴（即 z_p 轴）作相对运动的自由度，两者的横向角速率相同，参看图 5.6-1。令平台相对

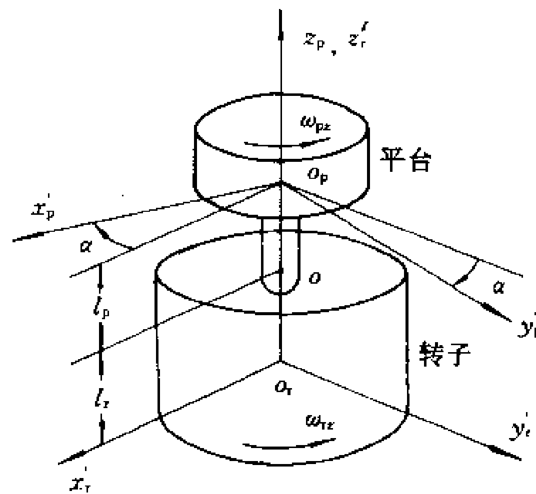


图 5.6-1

于转子的转角为 $\alpha(\alpha<0)$，卫星平台坐标系与卫星转子坐标系的转换关系是

$$\begin{bmatrix} e_{xp} \\ e_{yp} \\ e_{zp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xr} \\ e_{yr} \\ e_{zr} \end{bmatrix} \tag{5.6-1}$$

它的缩写形式为 $[e_p]=R_p[e_r]$。平台与转子的转速关系是

$$\omega_p = \omega_r + \omega_{pr} = R_p\omega + \omega_{pr} \tag{5.6-2}$$

式中 ω_{pr} 是平台相对转子的转速，在平台坐标系中 $(\omega_{pr})_p=[0\ 0\ \Omega']^T$，$\Omega'<0$。因此，式(5.6-2)的

展开式是

$$(\boldsymbol{\omega}_p)_p = \begin{bmatrix} \omega_{px} \\ \omega_{py} \\ \omega_{pz} \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} \omega_{rx}\cos \Omega' t + \omega_{ry}\sin \Omega' t \\ -\omega_{rx}\sin\Omega' t + \omega_{ry}\cos \Omega' t \\ \omega_{rz} + \Omega' \end{bmatrix} \tag{5.6-3}$$

符号$()_p$ 表示在平台坐标系中的分量，下同。

在卫星系统转子坐标系和在卫星系统平台坐标系中描述卫星姿态的运动是等效的。下面采用卫星转子坐标系。令转子和平台在自身坐标系中的惯量矩阵为 $\boldsymbol{I}_r$，$\boldsymbol{I}_p$，两者都是对角矩阵，对角线上的元素都是主惯量 I_{rx}, I_{ry}, I_{rz} 和 I_{px}, I_{py}, I_{pz}，并且 $I_{rx}=I_{ry}=I_{rt}$，$I_{px}=I_{py}=I_{pt}$。再令转子、平台的质心 o_r，o_p 在卫星转子坐标系中的坐标矩阵是 $\boldsymbol{r}_{or}=[0 \quad 0 \quad -l_r]^T$，$\boldsymbol{r}_{op}=[0 \quad 0 \quad l_p]^T$。参照式(5.4-9)，式(5.4-17)，对称双旋卫星的角动量在卫星转子坐标系中为

$$\boldsymbol{H}_r = I(\boldsymbol{\omega}_r)_r + R_p^T I_p (\boldsymbol{\omega}_{pr})_p \tag{5.6-4}$$

式中

$$I = I_r + R_p^T I_p R_p + m_r (l_r^2 E - \boldsymbol{r}_{or} \boldsymbol{r}_{or}^T) + m_p (l_p^2 E - \boldsymbol{r}_{op} \boldsymbol{r}_{op}^T) \tag{5.6-5}$$

m_r，m_p 为转子、平台的质量，将上式及上述的参数代入式(5.6-4)，角动量 $\boldsymbol{H}_r$ 为

$$\boldsymbol{H}_r = \begin{bmatrix} I_t\, \omega_{rx} \\ I_t\, \omega_{ry} \\ I_{rz}\, \omega_{rz} + I_{pz}\, \omega_{pz} \end{bmatrix} \tag{5.6-6}$$

I_t 是卫星的总横向惯量：

$$\begin{aligned} I_t &= I_{rt} + I_{pt} + m_r l_r^2 + m_p l_p^2 \\ &= I_{rt} + I_{pt} + \frac{m_r m_p}{m_r + m_p}(l_r + l_p)^2 \end{aligned} \tag{5.6-7}$$

按照式(5.4-14)，在卫星转子坐标系中，姿态动力学方程(当外力矩为零时)是

$$\left.\begin{aligned} & I_t \dot{\omega}_{rx} + [(I_{rz} - I_t)\omega_{rz} + I_{pz}\omega_{pz}]\omega_{ry} = 0 \\ & I_t \dot{\omega}_{ry} - [(I_{rz} - I_t)\omega_{rz} + I_{pz}\omega_{pz}]\omega_{rx} = 0 \\ & I_{rz}\dot{\omega}_{rz} + I_{pz}\dot{\omega}_{pz} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.6-8}$$

设平台的消旋电机的力矩和轴承摩擦力矩恰好平衡，没有剩余力矩作用在轴承轴上，因此 ω_{pz} 和 ω_{rz} 都是常值。又令

$$\Omega_r = \frac{1}{I_t}[(I_{rz} - I_t)\omega_{rz} + I_{pz}\omega_{pz}] = \Omega_o - \omega_{rz} \tag{5.6-9}$$

$$\Omega_o = \frac{1}{I_t}(I_{rz}\omega_{rz} + I_{pz}\omega_{pz}) \tag{5.6-10}$$

在转子坐标系中转子的角速率就是方程组(5.6-8)的解：

$$(\omega_r)_r = \begin{bmatrix} \omega_t \cos(\Omega_r t + \varphi) \\ \omega_t \sin(\Omega_r t + \varphi) \\ \omega_{rz} \end{bmatrix} \tag{5.6-11}$$

式中，$\omega_t = (\omega_{rx}^2 + \omega_{ry}^2)^{\frac{1}{2}}$ 为横向角速率，ω_t，φ 的数值决定于初始条件。横向角速率矢量 ω_t 在转子坐标系中的旋转速率就是 Ω_r，旋转方向和自旋方向同向或反向与星体的质量特性有关。利用式(5.6-2)，(5.6-3)，可导出平台的转速为

$$(\omega_p)_p = \begin{bmatrix} \omega_t \cos(\Omega_p t + \varphi) \\ \omega_t \sin(\Omega_p t + \varphi) \\ \omega_{pz} \end{bmatrix} \tag{5.6-12}$$

式中

$$\Omega_p = \Omega_r - \Omega' = \Omega_o - \omega_{pz} \tag{5.6-13}$$

Ω_p 就是矢量 ω_t 在平台坐标系中的旋转速率。如果以卫星平台坐标系为参考坐标系，得到的结果是相同的。

对称双旋卫星姿态运动的主要参数可以归纳如下：

Ω_o——空间章动速率；

Ω_r——在转子上观察的章动速率；

Ω_p——在平台上观察的章动速度；

ω_t——平台和转子共同的横向角速率；

ω_{rz}，ω_{pz}——转子、平台对空间的自旋速率；

Ω'——平台相对于转子的转速；

θ——章动角。

双旋卫星的章动角同样定义为横向与轴向角动量的比值：

$$\tan\theta = \frac{I_t\omega_t}{I_{pz}\omega_{pz} + I_{rz}\omega_{rz}} = \frac{\omega_t}{\Omega_o} \tag{5.6-14}$$

对双旋卫星姿态运动有决定意义的参数是惯量比 λ，它的定义是转子部分的自旋惯量和系统横惯量之比，$\lambda=\frac{I_{rz}}{I_t}$。只要平台处于消旋状态，$\omega_{pz}=0$，平台的章动速率就是空间章动速率 $\Omega_p=\Omega_o$，平台的章动方向始终和转子的自旋方向相同。如 $\lambda<1$，则转子章动速率与自旋速率的方向相反；反之，$\lambda>1$，转子章动速率与自旋速率同向。

5.6.2 能量耗散分析

双旋体的角动量由轴向和横向角动量组成，根据式(5.6-6)，总角动量的幅值和总动能(改用字母 $\boldsymbol{E}$ 表示)是

$$\left.\begin{aligned} H^2 &= (I_{rz}\omega_{rz} + I_{pz}\omega_{pz})^2 + (I_t\omega_t)^2 \\ 2\boldsymbol{E} &= I_{rz}\omega_{rz}^2 + I_{pz}\omega_{pz}^2 + I_t\omega_t^2 \end{aligned}\right\} \tag{5.6-15}$$

由于没有外力矩的作用，内部的能量损耗不影响角动量的幅值，它们的变化率为

$$\left.\begin{aligned} \dot{H} &= (I_{rz}\omega_{rz} + I_{pz}\omega_{pz})(I_{rz}\dot{\omega}_{rz} + I_{pz}\dot{\omega}_{pz}) + I_t^2\omega_t\dot{\omega}_t = 0 \\ \dot{E} &= I_{rz}\omega_{rz}\dot{\omega}_{rz} + I_{pz}\omega_{pz}\dot{\omega}_{pz} + I_t\omega_t\dot{\omega}_t \end{aligned}\right\} \tag{5.6-16}$$

由以上两式导出

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -\left(\frac{I_{rz}\omega_{rz} + I_{pz}\omega_{pz}}{I_t} - \omega_{rz}\right) I_{rz}\dot{\omega}_{rz} \\ &\quad - \left(\frac{I_{rz}\omega_{rz} - I_{pz}\omega_{pz}}{I_t} - \omega_{pz}\right) I_{pz}\dot{\omega}_{pz} \\ &= -\Omega_r I_{rz}\dot{\omega}_{rz} - \Omega_p I_{pz}\dot{\omega}_{pz} \end{aligned} \tag{5.6-17}$$

Ω_r，Ω_p 是转子、平台的章动速率。轴对称双旋卫星的转子和平台之间没有力矩耦合，各部分都

有引起能量耗散的因素，总的能量损耗为 $\dot{E}=\dot{E}_r+\dot{E}_p$。$E_r$,$E_p$ 是转子、平台的能量耗散速率，这些能量的耗散是由内部可动部件或质量的相对运动引起的，能量耗散的快慢与这些可动质量的相对运动速度有关。当星体纯自旋时，可动质量处在相对静止状态；当章动时，可动质量受到的离心力是交变的，导致相对运动，运动速度取决于激励频率——章动速度。

能量耗散法的基本思想是：旋转体内部机械能的损耗引起卫星旋转动能的变化。但是，由于角动量守恒，能量损耗的过程必然伴随着角动量的转移，星体的横向角动量转到动能为最小的转轴上去。这种角动量的转移可看作是转子和平台受到一种等效力矩，使转子和平台的自旋速率发生变化。根据以上的分析，式(5.6-17)是转子与平台的动能变化率之和，右面两项分别包含转子与平台角速度的变率，因此可以认为右端两项分别等于转子和平台的能量耗散，即有式

$$\left.\begin{aligned}\dot{E}_r &= -\Omega_r I_{rz}\dot{\omega}_{rz}\\ \dot{E}_p &= -\Omega_p I_{pz}\dot{\omega}_{pz}\end{aligned}\right\} \tag{5.6-18}$$

将上式代入 $\dot{H}=0$ 的式(5.6-16)，得出

$$\begin{aligned}I_t\omega_t\dot{\omega}_t &= \left(\frac{I_{rz}\omega_{rz}+I_{pz}\omega_{pz}}{I_t}\right)\left(\frac{\dot{E}_r}{\Omega_r}+\frac{\dot{E}_p}{\Omega_p}\right)\\ &= \Omega_o\left(\frac{\dot{E}_r}{\Omega_r}+\frac{\dot{E}_p}{\Omega_p}\right)\end{aligned} \tag{5.6-19}$$

式(5.6-19)给出了横向角速率 ω_t 与各部分能量耗散速率和星体章动参数的基本关系式。星体章动稳定的充分必要条件是 $\omega_t\dot{\omega}_t<0$，因为 Ω_o 是整星的空间章动速率，它总是正值，于是此稳定条件可归结为

$$\frac{\dot{E}_r}{\Omega_r}+\frac{\dot{E}_p}{\Omega_p}<0 \tag{5.6-20}$$

在能量耗散过程中，$\dot{E}_r$,$\dot{E}_p$ 总是负值。

短粗形卫星的转子和平台的章动速率 Ω_r,Ω_p 都是正值，卫星姿态总是稳定的。但是，细长形卫星的转子章动速率与自旋转速反向，Ω_r 为负值，因此转子中能量耗散促使卫星章动不稳定；而平台章动速率仍为正值，平台中能量耗散对章动运动起镇定作用。只要在平台上安放效率足够高的章动阻尼器，就可以将卫星设计成细长体，这是与单旋卫星的重要区别。对于同步静止卫星，平台对地定向，它在空间中的转速可以忽略不计，$\omega_{pz}=0$。将式(5.6-9)，(5.6-10)，(5.6-13)的章动参数代入式(5.6-20)，细长形双旋卫星的稳定条件可以化成

$$|\dot{E}_p|>\frac{I_{rz}}{I_t-I_{rz}}|\dot{E}_r| \tag{5.6-21}$$

这就是 Iorillo 的稳定性准则。

式(5.6-14)表明，章动角与横向角速率成正比，近似有 $\omega_t\approx\theta\Omega_o$。将此式代入式(5.6-19)，可得章动角变化的非线性方程，化成标准形式 $\dot{\theta}=-\frac{1}{\tau}\theta$，即用指数规律表示章动角的发散或衰减过程，$\tau$ 为时间常数。利用式(5.6-9)，(5.6-10)，(5.6-13)，并引入惯量比参数 $\lambda=\frac{I_{rz}}{I_t}$，可分别导出转子和平台中的能量耗散引起卫星章动角变化的时间常数

$$\left.\begin{aligned}\tau_r &= \frac{I_t\omega_{rz}^2\lambda(\lambda-1)\theta^2}{(-\dot{E}_r)}\\ \tau_p &= \frac{I_t\omega_{rz}^2\lambda^2\theta^2}{(-\dot{E}_p)}\end{aligned}\right\} \tag{5.6-22}$$

对于细长形的旋卫星，$\tau_r<0$，$\tau_p>0$。卫星章动变化的总时间常数 τ_s 由下式给出

$$\frac{1}{\tau_s}=\frac{1}{\tau_r}+\frac{1}{\tau_p} \tag{5.6-23}$$

5.7 三轴稳定卫星姿态运动特性

三轴稳定卫星姿态的特征是：卫星系统的主体（或称中心体）稳定在空间基准坐标中，即固连于主体的三条正交的星体坐标轴分别与空间基准坐标轴保持平行。针对卫星寿命长期性和能源补给的限制等特定任务需求，卫星姿态三轴稳定的主要控制方式为角动量交换方式。在卫星主体内装有动量装置（可转动的飞轮），通过调节飞轮转速控制卫星主体的转动。因此，卫星系统的角动量 $\boldsymbol{H}_s$ 由两部分组成：

$$\boldsymbol{H}_s=\boldsymbol{H}+\boldsymbol{h} \tag{5.7-1}$$

右端第一项为飞轮转动部件处在“冻结”状态下卫星本体的角动量，第二项为飞轮转动部件相对星体的角动量。

令星体的惯量阵为 $\boldsymbol{I}$（包含“冻结”状态的动量装置在内），星体角动量即为 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I\omega}$，带动量装置的卫星姿态动力学方程的一般式为

$$\boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{I\omega}+\boldsymbol{h})=-\dot{\boldsymbol{h}}+\boldsymbol{T} \tag{5.7-2}$$

左端第二项称为陀螺力矩，右端 $\boldsymbol{T}$ 为外力矩，$\dot{\boldsymbol{h}}$为动量装置对星体的控制力矩。取星体主惯量轴为本体坐标系，惯量阵为对角阵，$\boldsymbol{I}=\mathrm{diag}(I_x,I_y,I_z)$，动量装置的合成角动量沿本体坐标的分量为($h_x\quad h_y\quad h_z$)，则式(5.7-1)可展开为

$$\left.\begin{aligned}I_x\dot{\omega}_x+(I_z-I_y)\omega_y\omega_z &= -\dot{h}_x+h_y\omega_z-h_z\omega_y+T_x\\ I_y\dot{\omega}_y+(I_x-I_z)\omega_z\omega_x &= -\dot{h}_y+h_z\omega_x-h_x\omega_z+T_y\\ I_z\dot{\omega}_z+(I_y-I_x)\omega_x\omega_y &= -\dot{h}_z+h_x\omega_y-h_y\omega_x+T_z\end{aligned}\right\} \tag{5.7-3}$$

式中，T_x,T_y,T_z 为作用在星体上的外力矩。

卫星在轨道坐标系中的姿态由滚动角 φ、俯仰角 θ 和偏航角 ψ 表示。在三轴稳定控制问题中，这些角度均为小量。卫星坐标系 $ox_b\,y_b\,z_b$ 与轨道坐标系 $ox_o\,y_o\,z_o$ 之间的姿态矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & \psi & -\theta\\ -\psi & 1 & \varphi\\ \theta & -\varphi & 1\end{bmatrix}$$

卫星相对于轨道坐标的转速为$(\dot{\varphi},\dot{\theta},\dot{\psi})$，轨道坐标系在空间中的转速为$(0,-\omega_o,0)$。因此，卫星在空间中的转速 $\boldsymbol{\omega}$ 在卫星坐标系中可表示为

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & \psi & -\theta\\ -\psi & 1 & \varphi\\ \theta & -\varphi & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -\omega_o\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\varphi}-\omega_o\psi\\ \dot{\theta}-\omega_o\\ \dot{\psi}+\omega_o\varphi\end{bmatrix}$$

将上式代入式(5.7-3)，得出由姿态角表示的卫星姿态动力学方程：

$$\left.\begin{aligned}&I_x\ddot{\varphi}+[(I_y-I_z)\omega_o^2-\omega_o h_y]\varphi+[(I_y-I_z-I_x)\omega_o-h_y]\dot{\psi}\\&\quad=-\dot{h}_x+\omega_o h_z+T_x\\&I_y\ddot{\theta}+h_z(\dot{\psi}+\omega_o\varphi)-h_x(\dot{\varphi}-\omega_o\psi)\\&\quad=-\dot{h}_y+T_y\\&I_z\ddot{\psi}+[(I_y-I_x)\omega_o^2-\omega_o h_y]\psi-[(I_y-I_z-I_x)\omega_o-h_y]\dot{\varphi}\\&\quad=-\dot{h}_z-\omega_o h_x+T_z\end{aligned}\right\}\quad(5.7\text{-}4)$$

由此可看出，三轴稳定卫星姿态运动的特性与动量装置给出的角动量及其沿三轴的分布有关。在此类系统中，如 h_x,h_y,h_z 的量级等同，并且与 $I_x\omega_o,I_y\omega_o,I_z\omega_o$ 之量级相近，则卫星不具有陀螺定轴性，称为零动量系统。如动量装置的角动量分布特性为

$$\left.\begin{aligned}&|h_y|\gg\max(I_x\omega_o,I_y\omega_o,I_z\omega_o)\\&|h_y|\gg(|h_x|,|h_z|)\end{aligned}\right\}\quad(5.7\text{-}5)$$

则卫星具有陀螺定轴性，称为偏置动量系统。

区别于其他飞行器，在卫星轨道上，卫星姿态的固有特性是受重力梯度力矩的作用。这是因卫星各部分质量受到的地球中心引力不同，其合力并不总是通过质心，而与卫星姿态有关，形成外力矩，见5.8.2节。当卫星主体坐标相对轨道坐标的姿态 ψ,θ,φ 为小角度，重力梯度力矩在本体轴的分量为

$$\left.\begin{aligned}&T_{gx}\approx-3\omega_o^2(I_y-I_z)\varphi\\&T_{gy}\approx-3\omega_o^2(I_x-I_z)\theta\\&T_{gz}\approx0\end{aligned}\right\}\quad(5.7\text{-}6)$$

式(5.7-4)，(5.7-6)组成对地定向三轴稳定卫星的姿态动力学方程。

5.7.1 三轴姿态的稳定性

自旋卫星靠单轴旋转获得陀螺定轴，在空间保持定向稳定。依靠重力梯度力矩或角动量装置，三轴稳定卫星在轨道上也具有稳定的平衡姿态。

如星体内不含角动量部件，$\boldsymbol{h}=0$，由式(5.7-4)和(5.7-6)合成姿态动力学方程

$$\left.\begin{aligned}&I_x\ddot{\varphi}+4\omega_o^2(I_y-I_z)\varphi-\omega_o J\dot{\psi}=0\\&I_y\ddot{\theta}+3\omega_o^2(I_x-I_z)\theta=0\\&I_z\ddot{\psi}+\omega_o^2(I_y-I_x)\psi-\omega_o J\dot{\varphi}=0\end{aligned}\right\}\quad(5.7\text{-}7)$$

式中，$J=I_y-I_z-I_x$；滚动恢复力矩 $4\omega_o^2(I_y-I_z)\varphi$ 是重力梯度力矩 $3\omega_o^2(I_y-I_z)\varphi$ 和轨道运动陀螺力矩 $\omega_o^2(I_y-I_z)\varphi$ 的合成；俯仰恢复力矩 $3\omega_o^2(I_x-I_z)\theta$ 仅为重力梯度力矩；偏航恢复力矩 $\omega_o^2(I_y-I_x)\psi$ 又仅为轨道陀螺力矩。俯仰稳定的必要和充分条件为

$$I_x\geqslant I_z\quad(5.7\text{-}8)$$

即要求重力梯度产生的俯仰恢复力矩为正。俯仰自由运动的自振频率为

$$\lambda_y=\left[\frac{3\omega_o^2(I_x-I_z)}{I_y}\right]^{\frac{1}{2}}$$

由式(5.7-7)可得滚动-偏航自由运动的特征方程为

$$\begin{bmatrix} I_x s^2 + 4\omega_0^2(I_y - I_z) & \omega_0 J s \\ -\omega_0 J s & I_z s^2 + \omega_0^2(I_y - I_x) \end{bmatrix} = 0$$

或

$$a_0 s^4 + a_1 s^2 + a_2 = 0 \tag{5.7-9}$$

其中

$$a_0 = I_x I_z$$

$$a_1 = \omega_0^2[J^2 + I_x(I_y - I_x) + 4I_z(I_y - I_z)]$$

$$a_2 = 4\omega_0^4(I_y - I_z)(I_y - I_x)$$

由劳茨判据，稳定性的必要和充分条件为

$$a_1 \geqslant 0, \qquad a_2 \geqslant 0, \qquad a_1^2 - 4a_2 \geqslant 0$$

由俯仰稳定条件式(5.7-8)和条件 $a_2 \geqslant 0$，得三轴姿态稳定的充分条件为

$$I_y \geqslant I_x \geqslant I_z \tag{5.7-10}$$

因此，对地定向三轴稳定卫星的理想构形是，俯仰轴为最大惯量轴且垂直轨道平面，偏航轴为最小惯量轴且沿地心垂线方向，滚动轴为中间惯量轴。此构形可视为绕最大主惯量轴旋转的自旋卫星，其自旋速率为轨道转速。

由充分且必要的稳定条件得出的三轴主惯量分布见图 5.7-1，非阴影区为稳定区，见文献[46]。

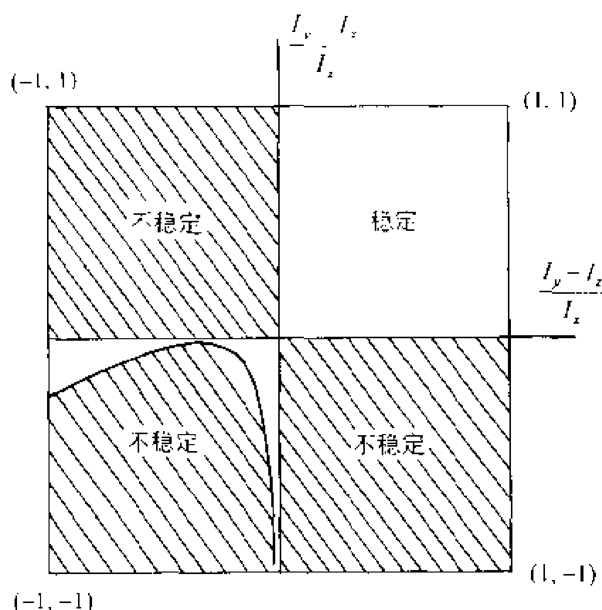


图　5.7-1

如星体含有角动量部件，但限于俯仰轴方向，即 $\boldsymbol{h} = h\boldsymbol{y}_b$，在重力梯度力矩式(5.7-6)作用下，姿态动力学方程式(5.7-4)可简化为

$$
\left.\begin{aligned}
&I_x\ddot{\varphi}+\omega_o[4\omega_o(I_y-I_z)-h]\varphi+[\omega_o J-h]\dot{\psi}=0\\
&I_y\ddot{\theta}+3\omega_o^2(I_x-I_z)\theta=0\\
&I_z\ddot{\psi}+\omega_o[\omega_o(I_y-I_x)-h]\psi-[\omega_o J-h]\dot{\varphi}=0
\end{aligned}\right\}\tag{5.7-11}
$$

滚动-偏航的特征方程与式(5.7-9)等同，但其系数为

$$
\begin{aligned}
&a_0=I_xI_z\\
&a_1=(\omega_o J-h)^2+\omega_o I_x[\omega_o(I_y-I_x)-h]+\omega_o I_z[4\omega_o(I_y-I_z)-h]\\
&a_2=\omega_o^2[4\omega_o(I_y-I_z)-h][\omega_o(I_y-I_x)-h]
\end{aligned}
$$

姿态稳定的充分条件为

$$
\left.\begin{aligned}
&4\omega_o(I_y-I_z)-h\geqslant 0\\
&\omega_o(I_y-I_x)-h\geqslant 0
\end{aligned}\right\}\tag{5.7-12}
$$

与式(5.7-10)相比，由于星体含动量部件，其角动量沿俯仰轴，为建立姿态的固有稳定性，惯量分布可有较大自由度。特别是，如设置动量部件的角动量沿俯仰轴的负方向，即式(5.7-12)中$h<0$，则惯量分布条件式(5.7-10)仅需保留$I_x\geqslant I_z$，保证俯仰稳定性。见式(5.7-11)的第二式。为了保证滚动-偏航的稳定，惯量I_z可不为最小惯量，依靠动量偏置($h<0$)克服因$I_z>I_y$由重力梯度力矩引起的不稳定性，见式(5.7-12)。

5.7.2 动量卫星姿态运动特性

三轴稳定卫星的偏置动量方式是由双旋卫星的稳定方式引申而来的，将旋转体从整星演变缩小成一个旋转飞轮，而将定向不动部分的平台扩大到整个星体，储存在高速飞轮中的角动量同样使卫星具有陀螺定轴性，保持姿态的稳定性，因此，简称动量卫星。在对地定向的卫星中，通常将飞轮提供的偏置角动量设置在卫星俯仰轴的负方向，如这个角动量的方向相对星体坐标是恒定的，而且数值足够大，则它的定向性对其他两轴——滚动轴和偏航轴产生陀螺罗盘效应，使卫星的偏航误差将随着卫星在轨道上的运动耦合为滚动误差，如图 5.7-2 所示。$ox_o y_o z_o$为轨道坐标系，y_o沿轨道转速ω_o的负方向。在①处卫星有一初始偏航角ψ_1，卫星的角动量$\boldsymbol{H}$在x_o方向有一分量，H_1是角动量$\boldsymbol{H}$在轨道平面上的投影。对于地球敏感器，偏航角ψ_1是不可测的，但利用地球敏感器测得的俯仰角，卫星的俯仰控制回路可以保持星体的偏航轴z_b处在y_oz_o平面内。如滚动、偏航控制回路不工作，则当卫星在轨道上运行转过90°到达②时，由于角动量$\boldsymbol{H}$的定向性，它的方向与在①处相同，因此，它在轨道平面上的投影将在②处的z_o轴的负方向，这导致在②处卫星的偏航角为零而滚动角为φ_2，并且$\varphi_2=\psi_1$。当卫星再转过90°时，滚动角又为零，偏航角等于$-\psi_1$。而在90°圆周内的③处，偏航角ψ_3和滚动角φ_3同时存在，显然$\psi_3<\psi_1$，如这时沿偏航轴方向施加一力矩(用外力矩或内部的反作用力矩)使卫星角动量的投影从H_1沿ΔH方向移到H_3，也就是使卫星的俯仰轴在轨道平面上的投影与x_o轴重合，这就消除了滚动角。虽然偏航角仍为ψ_3，但通过这种滚动控制减少了偏航的误差。当然，可将控制力矩在偏航-滚动平面内偏离偏航轴α角，使角动量$\boldsymbol{H}$的投影从H_1沿$\Delta H'$的方向移到H'_3，这时不仅消除了滚动角，而且使偏航角的误差减为ψ'_3。因此，带有偏置角动量的卫星绕偏航轴的姿态误差，在1/4轨道周期内逐渐耦合为绕滚动轴的误差，后者可被测出，控制滚动误差就能间接地、有效地消除偏航误差。这就避免了用直接方式测量卫星绕地心垂线的转动，这是偏置动量方式的最大优点，即不用偏航敏感器的两轴控制系统就能实现三轴稳定的姿态控

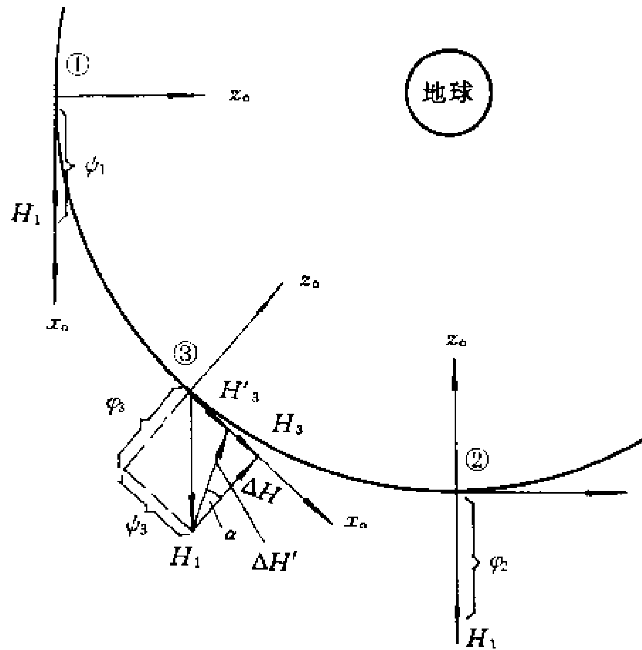


图 5.7-2

制。俯仰和滚动用地球敏感器产生的信号进行控制，偏航控制是通过陀螺定轴性和 1/4 轨道运动耦合实现的，控制力矩应是耦合的。为了使星体的滚动和偏航的耦合运动得到充分的体现，应选取俯仰轴的偏置动量 h_y 满足条件式(5.7-5)。

星体惯量引起的动力学效应使卫星姿态运动具有另一性质，令俯仰轴偏置动量恒为负值，$h_y=-h_B$，代入式(5.7-4)，滚动-偏航耦合运动的特征方程可列为

$$\begin{bmatrix} I_x s^2+\omega_o[\omega_o(I_y-I_z)+h_B] & [\omega_o J+h_B]s \\ -[\omega_o J+h_B]s & I_z s^2+\omega_o[\omega_o(I_y-I_x)+h_B] \end{bmatrix}=0$$

即

$$I_x I_z(s^2+\omega_o^2)(s^2+\omega_n^2)=0 \tag{5.7-13}$$

式中

$$\omega_n^2=\frac{1}{I_x I_z}[\omega_o(I_y-I_z)+h_B][\omega_o(I_y-I_x)+h_B] \tag{5.7-14}$$

再按动力学方程式(5.7-2)和(5.7-3)，令式(5.7-3)中 $h_y=-h_B, \omega_y=-\omega_o$，可导出滚动-偏航控制对象的传递函数框图 5.7-3。从此图和特征方程式(5.7-13)可见，姿态的自由运动包含两种周期运动：一是因沿轨道转动引起的姿态耦合运动，周期即为轨道周期；另一是偏置角动量和星体惯量引起的章动，其角频率为 ω_n，见式(5.7-14)。

一般卫星的惯量大于 200 kg · m²，如偏置角动量为 20 N · m · s，则章动频率可达 0.1 rad/s，比轨道频率 ω_o 高得多。因此，章动是短周期运动，姿态轨道耦合运动是长周期运动，可以分别进行分析。根据式(5.7-4)长周期运动方程是

$$\left.\begin{aligned} \omega_o h_B\varphi+h_B\dot{\psi} &= -\dot{h}_x+\omega_o h_z+T_x \\ -h_B\dot{\varphi}+\omega_o h_B\psi &= -\dot{h}_z-\omega_o h_x+T_z \end{aligned}\right\} \tag{5.7-15}$$

短周期运动的方程式是

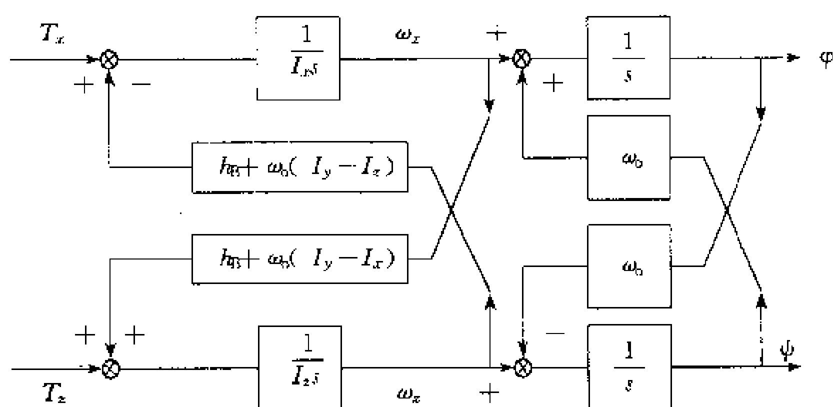


图 5.7-3

$$\left.\begin{aligned} I_x\ddot{\varphi} + h_B\dot{\psi} &= -\dot{h}_x + T_x \\ -h_B\dot{\varphi} + I_z\ddot{\psi} &= -\dot{h}_z + T_z \end{aligned}\right\} \quad (5.7\text{-}16)$$

在(φ,ψ)相图上，卫星自由运动的轨迹如图5.7-4所示，俯仰轴的端点沿章动圆逆时针转动，而章动圆的圆心P_0以轨道频率顺时针转动。

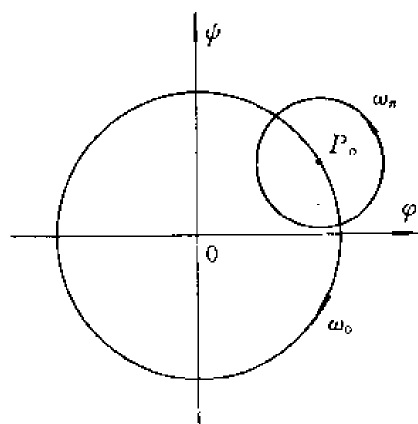


图 5.7-4

总之，滚动-偏航控制对象的特性是两变量的双重振荡环节，要达到高精度姿态稳定必须有效地阻尼这两种长、短周期运动。而在偏置动量系统中只有两个变量——俯仰角和滚动角可测。因此要通过控制系统的设计，缩短滚动、偏航之间的耦合周期以加快偏航的响应，使偏航角的变化快速地反应到滚动通道中去，而滚动角的修正不增大偏航角的误差，并最大可能地减少稳态误差。

在滚动-偏航控制回路中有两种控制量：外力矩T_x,T_z和内部动量装置的角动量h_x,h_z。尽管偏置动量装置有多种形式，从控制自由度的角度可分为三类：固定动量系统、单自由度动量系统和两自由度动量系统。在固定动量系统中，动量装置的角动量在滚动、偏航平面上无分量$h_x=h_z=0$，靠外力矩修正滚动、偏航角。在单自由度系统中，动量装置在滚动、偏航平面上的分量只能有一个自由度的变化，即h_x,h_z两者不是独立的。在两自由度动量系统中，h_x,h_z是互为独立的两个控制量，即动量装置在滚动、偏航平面上分量的数值和方向都是可变的。

5.7.3 动量控制原理

从动力学角度，卫星姿态运动是卫星角动量的表现形式。要使卫星在轨道上保持三轴稳定并对地定向，星体的角动量$\boldsymbol{H}$应是恒定的，其方向与轨道平面垂直，数值等于$I_y\omega_0$(I_y是卫星绕俯仰轴的惯量，ω_0是轨道角速度)。姿态控制的任务是在给定的某一个空间区域内，保持星本体的角动量$\boldsymbol{H}$。作用在卫星上的外力矩有控制力矩和扰动力矩。外控制力矩由喷气反作用力产生，或者是地磁场对卫星上的电流线圈产生的磁控力矩。扰动力矩是由空间环境对卫星的作用力引起的，例如，气动力矩和重力梯度力矩(在特定情况中，重力梯度力矩可作为控制力

矩)。另外,在轨道位置保持时,喷气反作用力方向的偏斜也产生扰动力矩。

卫星角动量有本体角动量 $\boldsymbol{H}$ 和动量装置的角动量 $\boldsymbol{h}$ 两部分,在控制力矩 $\boldsymbol{T}_c$ 和外扰动力矩 $\boldsymbol{T}_d$ 的作用下,星体角动量的变化是

$$\dot{\boldsymbol{H}} = -\dot{\boldsymbol{h}} + \boldsymbol{T}_c + \boldsymbol{T}_d$$

在外力矩作用下,星体角动量变化的积累即是上式的积分,有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(t) &= \boldsymbol{H}(0) + \boldsymbol{h}(0) - \boldsymbol{h}(t) + \int_0^t \boldsymbol{T}_c \mathrm{d}t + \int_0^t \boldsymbol{T}_d \mathrm{d}t \\ &= \boldsymbol{H}(0) + \boldsymbol{h}(0) - \boldsymbol{h}(t) + \boldsymbol{H}_c(t) + \boldsymbol{H}_d(t)\end{aligned} \tag{5.7-17}$$

$\boldsymbol{H}(0)$是卫星本体角动量的初值;$\boldsymbol{H}_c(t)$,$\boldsymbol{H}_d(t)$是外力矩赋予星体的外控角动量和外扰角动量,它们等于外控制力矩和扰动力矩作用于星体的力矩冲量,前者是根据控制指令产生的。

在三轴定向控制中,姿态控制的方式归结为如何设置标称的 $\boldsymbol{H}(0)$,$\boldsymbol{h}(0)$和如何处理 $\boldsymbol{H}_d(t)$。如令 $\boldsymbol{H}(0)$足够大,$\boldsymbol{H}_c(t)$所占的比例很小,卫星在扰动力矩作用下,它的角动量(姿态)变化很缓慢。由于三轴稳定卫星沿轨道运动的角速度很小,即 $\boldsymbol{H}(0)$很小,要获得足够大的角动量,必须在卫星内部装有旋转体(飞轮),使卫星具有与自旋卫星那样的陀螺定轴性,其角动量是 $\boldsymbol{h}$。显然,在对地定向的情况下,$h(0)$的方向应设置在轨道平面的法线方向,即为偏置动量方式。如令 $\boldsymbol{h}(0)=0$,是零动量方式,这时 $\boldsymbol{h}(t)$起支配作用。在这两种方式中都要克服外扰角动量 $\boldsymbol{H}_d(t)$的影响。一种方法是将此角动量"放出",当外扰角动量积累到允许范围的边界时,利用外控制力矩产生的角动量 $\boldsymbol{H}_c(t)$抵消外扰角动量 $\boldsymbol{H}_d(t)$,使星本体的角动量 $\boldsymbol{H}(t)$回到初始值 $\boldsymbol{H}(0)$。另一种方法是"吸收"外扰角动量,在式(5.5-17)中,使飞轮角动量的增量始终与外扰角动量相等,即 $\boldsymbol{h}(t)-\boldsymbol{h}(0)=\boldsymbol{H}_d(t)$,这时星体的角动量将保持恒定。换言之,外扰角动量转入飞轮中,被飞轮"吸收",因此又称这种飞轮为角动量转换装置(简称动量装置)。角动量 $\boldsymbol{h}$ 可以是若干个动量装置产生的合成角动量。如外力矩为零,则卫星角动量 $\boldsymbol{H}$ 守恒,改变动量装置的角动量(数值或方向)将引起星体转动,动量装置正是通过角动量转换起到对卫星姿态的控制作用。这种控制作用又具体表现在动量装置与星体之间的相互力矩作用。使动量装置角动量变化的力矩有内控制力矩 $\boldsymbol{M}_c$和摩擦力矩 $\boldsymbol{M}_f$,力矩方程为

$$\dot{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{M}_c + \boldsymbol{M}_f$$

作用在动量装置的力矩对星体产生反作用,使星体角动量变化,有

$$\dot{\boldsymbol{H}} = -\boldsymbol{M}_c - \boldsymbol{M}_f + \boldsymbol{T}_c + \boldsymbol{T}_d$$

上两式相加,与式(5.7-17)等同,即力矩 $\boldsymbol{M}_c$,$\boldsymbol{M}_f$ 不改变星体系统的总角动量,仅重新分配两者的角动量。由于动量装置对星体系统的角动量贡献等于相对自身质心的角动量,因此,动量装置的控制作用与它在星体中的位置无关,后者仅影响星体系统的惯量。

以偏置动量系统为例,卫星系统角动量 $\boldsymbol{H}_s=\boldsymbol{H}+\boldsymbol{h}$ 在轨道坐标中沿 x_o,z_o 轴变化的方程是

$$\left.\begin{aligned}\dot{H}_{sx} &= \omega_o H_{sz} + T_{dx} \\ \dot{H}_{sz} &= -\omega_o H_{sx} + T_{dz}\end{aligned}\right\} \tag{5.7-18}$$

式中 H_{sx},H_{sz}是星体角动量和动量装置角动量的合成,有

$$\left.\begin{aligned}H_{sx} &= I_x\dot{\varphi} + [\omega_o(I_y - I_z) + h_B]\psi + h_x \\ H_{sz} &= I_z\dot{\psi} - [\omega_o(I_y - I_x) + h_B]\varphi + h_z\end{aligned}\right\} \tag{5.7-19}$$

T_{dy},T_{dz}为外扰动力矩,以静止卫星受太阳光压力矩为例(见 5.8 节),有常值和交变分量两部分:

$$T_{dx} = T_{ox} + T_s\cos(\omega_o t + \eta_s)$$
$$T_{dz} = T_{oz} - T_s\sin(\omega_o t + \eta_s)$$

代入式(5.7-18),角动量的变化规律是

$$\left.\begin{aligned} H_{sx} &= \frac{T_{ox}}{\omega_o}\sin \omega_o t + \frac{T_{oz}}{\omega_o}(1 - \cos \omega_o t) \\ &\quad + T_s t\cos(\omega_o t + \Omega_s) + H_x(0)\cos \omega_o t + H_z(0)\sin \omega_o t \\ H_{sz} &= \frac{T_{oz}}{\omega_o}(\cos \omega_o t - 1) + \frac{T_{ox}}{\omega_o}\sin \omega_o t \\ &\quad - T_s t\sin(\omega_o t + \Omega_s) - H_x(0)\sin \omega_o t + H_z(0)\cos \omega_o t \end{aligned}\right\} \tag{5.7-20}$$

此变化规律描述了光压扰动力矩使卫星角动量 $\boldsymbol{H}_s$ 的端点在轨道坐标系中的轨道平面上投影的轨迹。在式(5.7-20)中第一部分是常值力矩 T_{ox},T_{oz}引起的圆周运动,圆心在$\left(\frac{T_{oz}}{\omega_o},-\frac{T_{ox}}{\omega_o}\right)$,圆半径为$\frac{1}{\omega_o}(T_{ox}^2+T_{oz}^2)^{\frac{1}{2}}$,角频率为 ω_o,见图 5.7-5(a)。第二部分是由交变扰动力矩引起的,角动量端点以阿基米德螺线的形式偏离轨道法线,见图 5.7-2(b)。这两部分都是外扰角动量。第三部分表示在没有干扰力矩作用下角动量在轨道坐标中的周期性变化。$H_{sx}(0)$,$H_{sz}(0)$是角动量的初值,见图 5.7-5(c)。综合式(5.7-18)和(5.7-19),以及图 5.7-5 可得出基本的控制概念。如不考虑卫星的惯量,动量装置又是固定的动量轮,$h_y=-h_B$,$h_x=h_z=0$,在太阳光压作用下,卫星俯仰轴的端点在轨道平面上移动的轨迹的形状与图 5.7-5 相同。这些轨迹直接表示卫星滚动、偏航姿态的变化,滚动角和偏航角为 $\varphi=-\frac{H_{sz}}{h_B}$,$\psi=\frac{H_{sx}}{h_B}$,这里 H_{sx},H_{sz}是式(5.7-20)表示的时间函数。显然,为了减少扰动力矩引起的姿态漂移,要设置足够大的偏置动量。换句话说,固定动量飞轮系统是靠角动量方向的运动起到吸收外扰角动量的作用。如动量装置是两自由度的,可以不断地改变其角动量在星体坐标系中的方向和数值,使它在俯仰轴上的分量 h_y 为定值,而在滚动偏航轴上的分量 h_x,h_z 按图 5.7-5(a),5.7-5(b)中的轨迹变化。这样就可以保

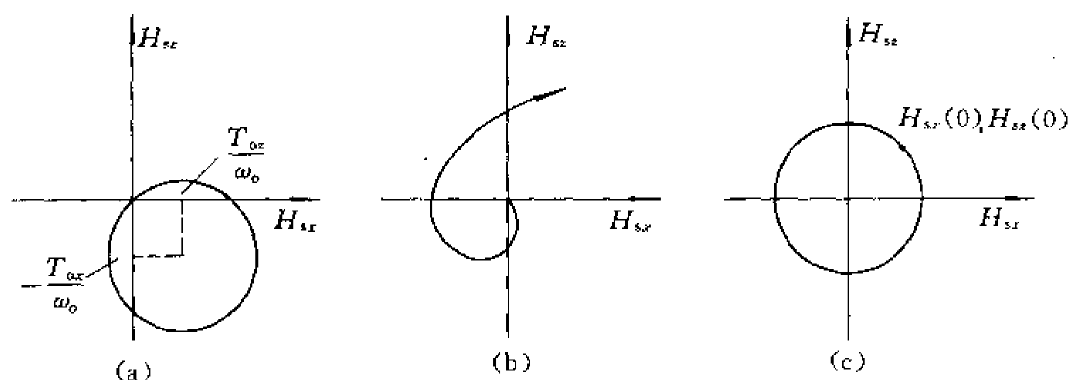


图 5.7-5

持滚动角、偏航角误差为零,不受扰动力矩的影响,动量装置吸收外扰角动量起到代替星体姿态变化的作用。在这种情况下,偏置角动量 h_B 的数值可以选取得较小,只要满足 $|h_B|\gg\max(I_x\omega_o,I_y\omega_o,I_z\omega_o)$即可。

5.8 空间力矩

分析空间环境对卫星产生的各种力矩是卫星姿态控制设计的前提，空间环境力矩的特性和量级是选取姿控方式、姿控部件的重要因素之一。对于应用卫星，主要空间力矩有太阳光压力矩、重力梯度力矩、地磁力矩和气动力矩。这些空间力矩对卫星姿态的影响与轨道高度有关：一般，对于高轨道——1 000 km 以上，主要考虑太阳光压力矩；轨道低于 1 000 km，重力梯度力矩和地磁力矩起主要作用；气动力矩则在 500 km 以下才起作用。空间力矩既可视为影响卫星姿态稳定的外干扰力矩，也可作为有利于控制的辅助力矩或主控力矩。例如，重力梯度卫星依靠重力梯度为姿态稳定提供恢复力矩，地磁场力矩可用于姿控的角动量卸载等。

5.8.1 太阳光压力矩

太阳辐射作用在表面上产生的压力称为太阳光压，其数值等于太阳辐射动量的变化率，也就是被该表面截断的辐射通量，后者等于太阳常数除以光速——I/c。因此，当太阳垂直照射表面积 S 时，其压力的一般估计式为

$$F = \frac{I}{c}S = PS$$

P 为太阳光压，照射全吸收表面（黑体）的光压约为 $P \approx 4.5\times10^{-6}\ \mathrm{N/m^2}$，对于全反射表面（镜面）$P=9.0\times10^{-6}\ \mathrm{N/m^2}$。因此，在一般情况下，太阳光压力按下式估计：

$$\boldsymbol{F} = -P(1+\nu)S\cos^2\sigma\,\boldsymbol{n} + P(1-\nu)S\sin\sigma\cos\sigma\,\boldsymbol{t}$$

$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{t}$ 为受照射面积的法线和切线单位矢量，ν 为表面反射系数，σ 为阳光入射角，见图 5.8-1。

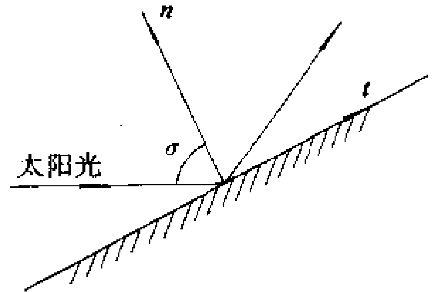


图 5.8-1

在地球赤道同步轨道上，对地定向的通信卫星带有大型太阳帆板，其伸展方向沿俯仰轴，与轨道面法线平行。帆板驱动机构使帆板的法线指向太阳方向。阳光的入射角随太阳的季节运动而变化，但太阳光产生的切向光压总沿帆板转轴。当此转轴不通过卫星质心时，切向光压在卫星 x_b、z_b 平面内产生恒定的干扰力矩，可表示为

$$T_{\sigma x} = -K_t\sin 2\sigma\cdot r_z$$

$$T_{\sigma z} = K_t\sin 2\sigma\cdot r_x$$

K_t 为切向光压系数，r_x，r_z 为帆板转轴在本体 x_b，z_b 轴方向的偏离量，见图 5.8-2。当太阳帆板的结构相对卫星质心不对称时，法向光压的压力中心与卫星质心不重合，则在帆板平面内，光压产生一个垂直于太阳方向的干扰力矩。由于卫星对地定向，z_b 轴指向地心，而帆板对太阳定向，此力矩在星体 x_b，z_b 轴的分量是日交变的，可写为

$$T_{Sx} = K_n(r_{y1} + r_{y2})\sin^2\sigma\cos(\omega_o t + \eta_S)$$

$$T_{Sz} = -K_n(r_{y1} + r_{y2})\sin^2\sigma\sin(\omega_o t + \eta_S)$$

r_{y1}，r_{y2} 为单个帆板压心沿 y_b 轴方向的距离；K_n 为法向光压系数；η_S 为太阳时角——卫星天顶（沿负 z_b 轴方向）对太阳的角距，超前为正、滞后为负，见图 5.8-3。帆板转轴的偏离也引起法向

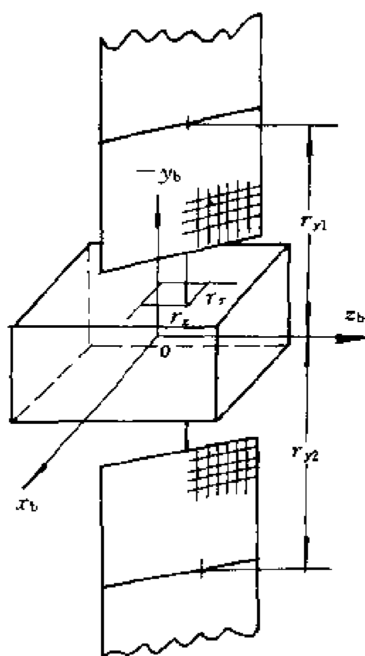


图 5.8-2

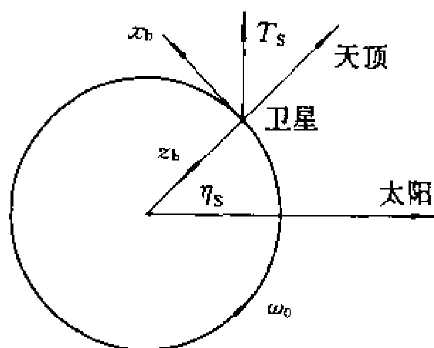


图 5.8-3

光压在 y_b 轴方向产生日交变干扰力矩：

$$T_{S_y} = K_n(r_x + r_z)^{\frac{1}{2}} \sin^2\sigma \cos(\omega_o t + \eta_S + \xi)$$

ξ 为帆板转轴偏离的方位角。因此，在卫星本体坐标中太阳光压可统一表示成

$$\left.\begin{aligned} T_{Dx} &= T_{ox} + T_S \cos(\omega_o t + \eta_S) \\ T_{Dy} &= T'_S \cos(\omega_o t + \eta_S + \xi) \\ T_{Dz} &= T_{oy} - T_S \sin(\omega_o t + \eta_S) \end{aligned}\right\} \tag{5.8-1}$$

从空间观察，切向光压产生的干扰力矩是日交变的，法向光压产生的干扰力矩却是恒定的（保持在太阳光的垂直方向），前者引起卫星角动量在空间作周期性进动，后者使卫星角动量漂移。

5.8.2 重力梯度力矩

卫星体内每个微小质量元都受到地球引力的作用，由于卫星处于地球中心引力场，星体所受引力的分布（数值和方向）与卫星在轨道坐标的姿态有关，引力的合力并不总是通过质心，此项因引力梯度引起的力矩称为重力梯度力矩。参见图 5.8-4，星体内质量元 $\mathrm{d}m$ 受到地球的中心引力为 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$，对质心的力矩为 $\rho\times\mathrm{d}\boldsymbol{F}$，因此，作用在质量元的地心引力对星体质心 o 产生的合成力矩即为重力梯度力矩 $\boldsymbol{T}_g$，其力矩式为

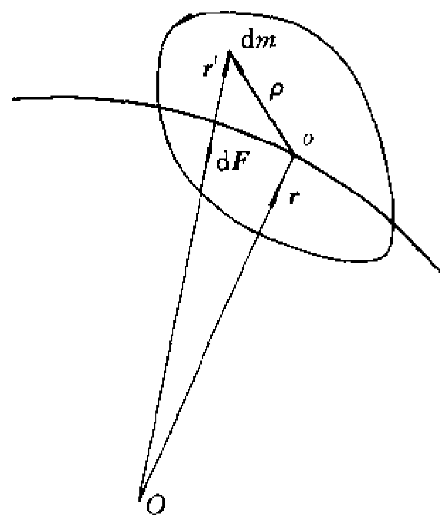


图 5.8-4

$$\boldsymbol{T}_g = \int \rho \times \mathrm{d}\boldsymbol{F} = \int \rho \times \left(-\frac{\mu \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}m\right) \tag{5.8-2}$$

式中，$\boldsymbol{r}'$ 为质量元 $\mathrm{d}m$ 的地心距。

引用式 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\rho}$ 和关系式 $|\boldsymbol{\rho}|\ll|\boldsymbol{r}|$，有近似展开式

$$|\boldsymbol{r}'|^{-3}=r^{-3}\left[1+2\frac{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}\approx r^{-3}\left(1-3\frac{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}\right)$$

将此式代入重力梯度力矩 T_g 的式(5.8-2)有

$$\begin{aligned}T_g&=-\frac{\mu}{r^3}\int\boldsymbol{\rho}\times\left(1-3\frac{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}\right)(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}m\\&=-\frac{\mu}{r^3}\int\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m-\frac{3\mu}{r^5}\int(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\rho})(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}m\end{aligned}$$

在上式应用了式 $\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{\rho}=0$。因 o 点为质心，上式第一项为零，在第二项中应用式 $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{r}$，上式力矩 $\boldsymbol{T}_g$ 可写成

$$\boldsymbol{T}_g=-\frac{3\mu}{r^5}\left[\boldsymbol{r}\times\left(\int\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}m\right)\boldsymbol{r}\right]$$

引用惯量阵公式，有 $\int\boldsymbol{\rho}\,\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}m=\int\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}\,\mathrm{E}\mathrm{d}m-\mathrm{I}$，式中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，$\boldsymbol{I}$ 为星体相对 o 点的惯量阵。再计及 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{E}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{o}$，力矩 $\boldsymbol{T}_g$ 的等式可列为

$$\boldsymbol{T}_g=\frac{3\mu}{r^5}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{r})=\frac{3\mu}{r^3}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{E})\tag{5.8-3}$$

式中，$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{r}/r$，是卫星指向地心的单位矢量。重力梯度力矩 $\boldsymbol{T}_g$ 和惯量阵 $\boldsymbol{I}$ 定义在同一星体坐标中，矢量 $\boldsymbol{E}$ 的方向与星体在轨道坐标的姿态相对应，其方向余弦即为姿态矩阵的三元素：

$$\boldsymbol{E}=(A_{xz}\;A_{yz}\;A_{zz})^{\mathrm{T}}$$

对于圆轨道有 $\mu/r^3=\omega_o^2$，ω_o 为轨道转速。在此轨道上重力梯度力矩在星体坐标的等式可列为

$$\begin{aligned}T_{gx}&=3\omega_o^2[(I_z-I_y)A_{yz}A_{zz}+I_{yz}(A_{yz}^2-A_{zz}^2)+I_{zx}A_{xz}A_{yz}-I_{xy}A_{xz}A_{zz}]\\T_{gy}&=3\omega_o^2[(I_x-I_z)A_{zz}A_{xz}+I_{zx}(A_{zz}^2-A_{xz}^2)+I_{xy}A_{yz}A_{zz}-I_{yz}A_{yz}A_{xz}]\\T_{gz}&=3\omega_o^2[(I_y-I_x)A_{xz}A_{yz}+I_{xy}(A_{xz}^2-A_{yz}^2)+I_{zy}A_{zz}A_{xz}-I_{zx}A_{zz}A_{yz}]\end{aligned}$$

如星体坐标与轨道坐标一致，无姿态误差，则姿态矩阵为对角阵，$A_{xz}=A_{yz}=0$，$A_{zz}=1$。但是，如在此星体坐标中惯量积不为零，则有恒定的重力梯度力矩作用在星体上：

$$\begin{aligned}T_{gx}&=3\omega_o^2(-I_{yz})\\T_{gy}&=3\omega_o^2(I_{zx})\\T_{gz}&=0\end{aligned}$$

可见，沿偏航轴无重力梯度力矩。如星体坐标为主轴坐标(惯量积为零)，则星体姿态引起的重力梯度力矩为

$$\left.\begin{aligned}T_{gx}&=3\omega_o^2(I_z-I_y)A_{yz}A_{zz}\\T_{gy}&=3\omega_o^2(I_x-I_z)A_{xz}A_{zz}\\T_{gz}&=3\omega_o^2(I_y-I_x)A_{xz}A_{yz}\end{aligned}\right\}\tag{5.8-4}$$

以上的论述，给出一重要的事实：地球中心引力场对卫星产生的重力梯度力矩不仅与姿态有关，更与卫星的质量特性有密切关系。在小姿态的情况下，$A_{xz}=-\theta$，$A_{yz}=\varphi$，$A_{xz}\,A_{yz}\ll1$，重力梯度力矩的最简化式为

$$\left.\begin{aligned}T_{gx}&=-3\omega_o^2[(I_y-I_z)\varphi+I_{yz}-I_{xy}\theta]\\T_{gy}&=-3\omega_o^2[(I_x-I_z)\theta-I_{zx}-I_{xy}\varphi]\\T_{gz}&=-3\omega_o^2[I_{yz}\theta+I_{xz}\varphi]\end{aligned}\right\}\tag{5.8-5}$$

5.8.3 地磁力矩

卫星磁矩与地球磁场的相互作用产生磁力矩。卫星磁矩来源于星上电子仪器产生的剩余磁场，或来自姿态控制用的磁矩线圈。控制各个磁矩线圈的电流，可形成预期的卫星磁矩。如令卫星磁矩为 $\boldsymbol{M}_m$，单位是安[培]平方米（A·m²），在卫星所在处地磁场的磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$，单位是韦[伯]每平方米（Wb/m²），则磁力矩 $\boldsymbol{T}_m$ 为

$$\boldsymbol{T}_m = \boldsymbol{M}_m \times \boldsymbol{B}$$

磁力矩的单位是牛[顿]米（N·m）。

为消除卫星剩磁产生的干扰力矩，或利用磁矩线圈产生控制力矩，都以地磁场模型为基础。地磁场的一阶近似模型为磁耦极子模型。耦极子轴线倾斜于地球自转轴约 11.5°。耦极子的北端位于地球北纬 78.5°，东经 289.3°，它是地磁的南极，是地球磁场会聚极，见图 5.8-5。耦

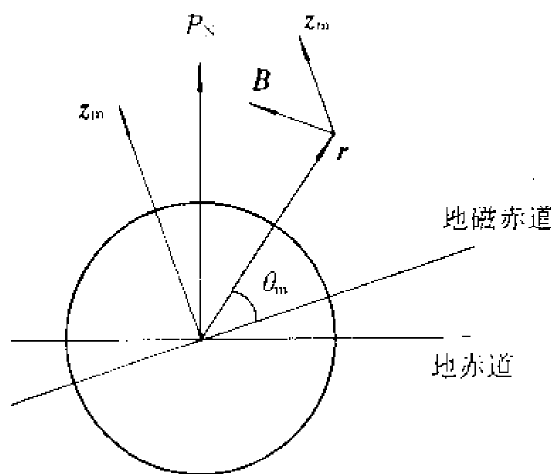


图 5.8-5

极子磁场可分解为两部分，一部分沿卫星径向，另一部分平行于磁耦极子轴线方向 Z_m，有近似式[45]：

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\mu_e}{r^3}\left(3\sin\theta_m \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} - \boldsymbol{z}_m\right)$$

μ_e 是地球磁矩总强度，μ_e 在 7.9×10^{15}Wb·m～8.1×10^{15}Wb·m 范围内变化[45]；θ_m 是卫星向径与地磁赤道的夹角；$\boldsymbol{z}_m$ 是磁耦极子矢量。上式的等效式为

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_e}{r^3}[\boldsymbol{z}_m - 3(\boldsymbol{z}_m \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{E}] \tag{5.8-6}$$

$\boldsymbol{E}$ 是卫星-地心矢量。如在卫星轨道坐标中建立地磁场模型，则上式中矢量 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{z}_m$ 为

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{z}_m = \boldsymbol{R}_{oi}\,\boldsymbol{R}_{ie}\begin{bmatrix}\sin 11.5^\circ \quad \cos 289.3^\circ\\ \sin 11.5^\circ \quad \sin 289.3^\circ\\ \cos 11.5^\circ\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{R}_{oi}$为赤道惯性坐标与卫星轨道坐标的转移矩阵，见式(5.1-4)。$\boldsymbol{R}_{ie}$为地球固连坐标与赤道惯性坐标的转移矩阵：

$$
\boldsymbol{R}_{ie} = \begin{bmatrix} \cos(G_0 + \omega_e t) & -\sin(G_0 + \omega_e t) & 0 \\ \sin(G_0 + \omega_e t) & \cos(G_0 + \omega_e t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

5.8.4 气动力矩

对于 500 km 以下的卫星，气动力矩是主要的空间环境干扰力矩。高层大气分子撞击卫星表面产生气动力，一般可用动量转换原理建立气动力撞击模型，认为入射分子在碰撞中丧失其全部能量，因此气动力模型可写为

$$
\boldsymbol{F}_S = -\frac{1}{2} C_d \rho S (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}_S) \boldsymbol{v}_S \tag{5.8-7}
$$

式中，ρ 是大气密度；S 是迎流面积；$\boldsymbol{n}$ 是该面积的法线矢量；$\boldsymbol{v}_S$ 是面积元相对入射流的平移速度矢量；C_d 是阻力系数，对高层大气取 $C_d=2$。由于地球旋转带动大气旋转，卫星表面的迎流速度 $\boldsymbol{v}_S$ 应计为卫星对地速度，有

$$
\boldsymbol{v}_S = \boldsymbol{v}_o - \boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{r}_S \tag{5.8-8}
$$

$\boldsymbol{v}_o$ 为卫星轨道速度，$\boldsymbol{r}_S$ 为面积 S 的地心向径。如该面积的压力中心相对卫星质心的距离为 $\boldsymbol{\rho}_S$ 则入射流在该面积上产生的气动力矩在星体坐标中为

$$
\boldsymbol{T}_a = \boldsymbol{\rho}_S \times \boldsymbol{F}_S = \tilde{\boldsymbol{\rho}}_S \boldsymbol{R}_{bo} (\boldsymbol{F}_S)_o
$$

式中，$(\boldsymbol{F}_S)_o$ 为由式(5.8-7)，(5.8-8)得出的在轨道坐标中的气动力。

第六章　卫星姿态的确定

6.1　自旋姿态的参考测量

自旋卫星的姿态是指卫星自旋轴在空间中的方向和自旋体相对空间某个基准的旋转相位角。通常，自旋轴的方向定义在赤道惯性坐标系中，用赤经和赤纬表示。装在卫星上的姿态敏感器不能直接测出自旋轴的赤经、赤纬，只能通过扫描，观测到空间中某些参考物体（太阳、地球、恒星等）相对卫星的方向，测量自旋轴与参考物体的方向之间的夹角（或称角距）。在一般情况下还不能直接测出夹角，而是测得与夹角有关的一些姿态信息（脉冲），这些参考天体在赤道惯性坐标系中的方向（赤经和赤纬）是可以精确地确定的。利用这些姿态信息，并借助已知参考体的赤经和赤纬，可以计算出卫星自旋轴的方向。因此，卫星自旋轴方向的测定包含着对姿态信息的测量和姿态确定两部分。章动引起卫星自旋轴绕角动量轴作圆锥运动，这种情况的姿态测定问题显得比较复杂，以下不作特别说明时将认为卫星的几何轴、自旋轴与角动量轴是一致的，在空间中是恒定的。自旋相位角的测定是很直观的，可以不作分析。

卫星的姿态与卫星到参考体的距离无关。因此在分析卫星的姿态时，常把卫星姿态坐标系的原点移到卫星的质心上。为了便于描述空间中的几何关系，常以卫星的质心为原点作一个单位天球，卫星自旋轴的单位矢量的端点位于天球上某一点。同样，参考体方向的单位矢量也可用天球上某一点表示。天球上两点之间的弧长就是从卫星上看到的两个参考体之间夹角的量度。

如能测量出卫星自旋轴与某个参考体 C_1 的方向之间的夹角 θ_1，就可以认为自旋轴必定处在围绕此参考体的圆锥面上，此圆锥的主轴在卫星至参考体的方向上，圆锥的半顶角就是测得的夹角。显然，仅借助于一个参考体还不能确定自旋轴与圆锥面上的哪一条锥线一致，如同时测得卫星自旋轴与另一个参考体 C_2 的方向之间的夹角 θ_2，就可断定卫星自旋轴必在两个圆锥面的交线上，见图 6.1-1。由于这两个锥相交有两条交线，自旋轴只与两者之一重合，必须判别真伪。这两个锥称为天体锥，利用两个天体锥相交是确定卫星自旋轴方向的最基本的方法，称为双锥相交法。

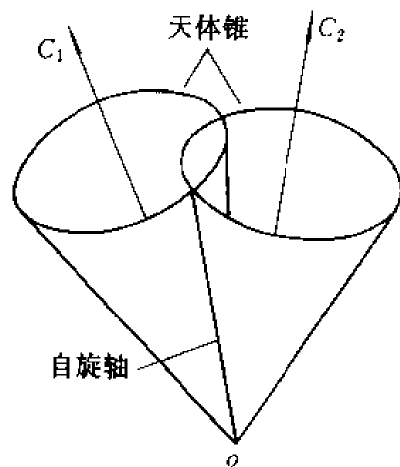


图　6.1-1

从姿态确定的代数法角度，每个天体锥对应一个观测方程，即自旋轴矢量与天体矢量的标积等于与天体方向的夹角的余弦，天体矢量在参考基准中是已知的，因此由若干个观测方程联立求解，得出自旋轴在该参考坐标的方向。

在自旋卫星的姿态测定技术中，最常用的参考天体是太阳和地球，还可利用星座或地球表面的陆标，达到更高的姿态测量精度。在采用地球及其陆标作为参考基准时，天体锥角是变化

的时间函数。下面分别叙述各种参考基准的观测模型和观测方程。

6.1.1 太阳方向的测量

在自旋卫星上常采用V型狭缝式太阳敏感器测量自旋轴 Z 与太阳方向 S 之间的夹角，简称太阳角 θ_S。V型狭缝式太阳敏感器由两个配置成V字形结构的狭缝敏感器组成，每条狭缝内装有敏感太阳光的接收元件(硅光电池)，狭缝使接收元件的光学视场呈扇形平面，其中一个窄缝敏感器 S_1 的平面视场与自旋轴平行，另一个 S_2 是倾斜的，两者的夹角为 σ。如以卫星质心为原点，作一个单位天球，则两个狭缝敏感器的视场在天球上的投影：S_1 的投影是卫星子午圈的一部分；S_2 的投影是与该子午圈夹 σ 角的大圆的一部分，如图6.1-2所示。

图 6.1-2

卫星自旋一周，两个敏感器的平面视场各扫过太阳一次，各自的敏感元件分别输出一个电脉冲。敏感器两次扫过太阳的时间以及两者之间的时间间隔包含着姿态信息。从图6.1-2可直接看出，敏感器 S_1 见到太阳时，S_1 处在大圆 ZC 上，当敏感器 S_2 见到太阳时，S_1 处在大圆 ZE 上，S_2 处在大圆 SB 上，整个敏感器在一周内两次观测到太阳之间的卫星转角为 μ。令 S_1，S_2 在同一圈内见到太阳的时间为 t_1^1，t_1^2，在下一圈内为 t_2^1，t_2^2，则可测出卫星的转速

$$\omega = \frac{2\pi}{t_2^1 - t_1^1} \tag{6.1-1}$$

以及太阳连续穿越两个狭缝的时间内的卫星转角

$$\mu = \omega(t_1^2 - t_1^1) = \omega\Delta t \tag{6.1-2}$$

令两个包含狭缝的大圆相交于 D 点，它相对于卫星质心的角为 ν，在直角球面三角形 SCB 中，有三角公式

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_S\right) = \sin(\mu + \sigma')\tan B$$

利用直角球面三角形 DEB，有

$$\tan\nu = \sin\sigma' \tan B$$

$$\tan\sigma' = \sin\nu \tan\sigma$$

从上两式可求出太阳角 θ_S 为

$$\begin{aligned}\cot\theta_S &= \sin(\mu + \sigma')\frac{\tan\nu}{\sin\sigma'} \\ &= \tan\nu\cos\mu + \frac{\sin\mu}{\tan\sigma\cos\nu}\end{aligned} \tag{6.1-3}$$

因反余切的主值域是 $(0,\pi)$，上式中的太阳角 θ_S 可唯一地确定。通常，安装角 $\gamma=0$，两条狭缝相交于卫星赤道上。当太阳光线与自旋轴垂直时，敏感器的输出 $\Delta t=0$，不利于提高测量精度，为此，将两条狭缝隔开一个圆周角 β。当太阳光线垂直射向自旋轴时有 $\mu=\beta$，仿照式(6.1-3)，太

阳角的计算式为

$$\cot \theta_S = \cot \sigma \sin(\mu - \beta) \tag{6.1-4}$$

因此，太阳方向的姿态观测方程可列为

$$\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{Z} = \cos \theta_S$$

6.1.2 天底方向的测量

卫星自旋轴与地球中心方向之间的夹角称为天底角 θ_e，常用天底矢量 $\boldsymbol{E}$ 表示地球中心方向，如卫星的地心距为 $\boldsymbol{r}$，则

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|}$$

有关 θ_e 的姿态信息是靠装在卫星上的红外地球敏感器取得的，该敏感器内有一视场很尖细(约 1.5°的小圆或方格)的红外望远镜，处在此望远镜焦平面上的红外探测元件能灵敏地接收到地球的红外辐射。此红外望远镜的光轴与自旋轴的夹角是一个事先选定的安装角 γ，卫星自旋一周，光轴在空间扫描出一个圆锥，半锥角是 γ。当扫描锥与地球相交时，敏感器的光轴将穿越地球，由于地球辐射与宇宙空间辐射的不连续性，敏感器产生两个地平穿越脉冲——穿入脉冲和穿出脉冲，如图 6.1-3 所示。

如天球图 6.1-4 所示，虚线大圆表示红外地球敏感器的光轴在天球上的扫描路径，E_i 为光

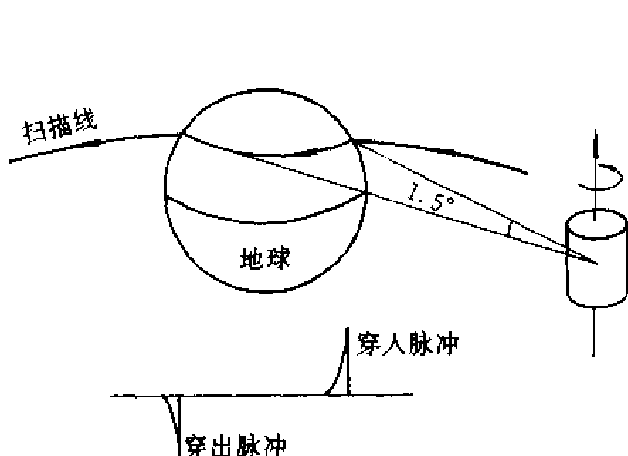


图 6.1-3

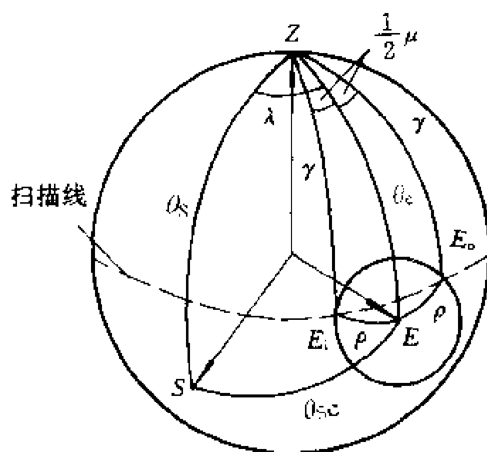


图 6.1-4

轴从空间进入地球的穿入点，E_o 为光轴从地球进入空间的穿出点。在卫星自旋的某一周内光轴穿入地球和穿出地球的时间为 t_i，t_o，地球敏感器穿越地球的弦宽(或称扫描弦宽)为

$$\mu = \omega(t_o - t_i) = \omega \Delta t \tag{6.1-5}$$

式中 t_o，t_i，Δt 是地球敏感器测得的姿态信息，通过遥测传到地面。从卫星上看到地球的视角为 ρ：

$$\rho = \arcsin\left(\frac{R_e}{r}\right)$$

从测轨数据可得卫星的地心距 r，在过渡轨道上它是时间的变量。在图 6.1-4 上的球面三角形 ZEE_i(或 ZEE_o)中，有余弦公式

$$\cos \rho = \cos \gamma \cos \theta_e + \sin \gamma \sin \theta_e \cos \frac{\mu}{2} \tag{6.1-6}$$

上式是 $\cos\theta_e$ 的二次方程，其解为

$$\cos\theta_e = \left\{\cos\rho\cos\gamma \pm \sin\gamma\cos\frac{\mu}{2}\left[\sin^2\gamma\cos^2\frac{\mu}{2} + \cos^2\gamma - \cos^2\rho\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \Big/ \left\{\cos^2\gamma + \sin^2\gamma\cos^2\left(\frac{\mu}{2}\right)\right\} \tag{6.1-7}$$

上式给出的天底角 θ_e 是双重真伪解，在几何上都是有意义的。因此，还得利用先验姿态估计值或其他附加信息解决真伪判别问题。

直接的方法是利用两只地球敏感器测得的姿态信息计算天底角。两只地球敏感器的安装角分别为 $\gamma_N(<90°)$ 和 $\gamma_S(>90°)$，前者表示该敏感器的光轴在卫星赤道面之北，后者在南。通常称前者为北地球敏感器，后者为南地球敏感器。两只敏感器测得的弦宽各为 μ_N,μ_S，这样，就有两个相同的测量方程：

$$\cos\rho = \cos\gamma_N\cos\theta_e + \sin\gamma_N\sin\theta_e\cos\frac{\mu_N}{2}$$

$$\cos\rho = \cos\gamma_S\cos\theta_e + \sin\gamma_S\sin\theta_e\cos\frac{\mu_S}{2}$$

由此可直接求得天底角：

$$\tan\theta_e = \frac{\cos\gamma_S - \cos\gamma_N}{\sin\gamma_N\cos\frac{\mu_N}{2} - \sin\gamma_S\cos\frac{\mu_S}{2}} \tag{6.1-8}$$

并可列出天底方向的姿态观测方程

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{Z} = \cos\theta_e$$

由于卫星自旋轴在空间中定向，而卫星的天底方向 $\boldsymbol{E}$ 在空间中是变化的，只有在特定的条件下，例如卫星的自旋轴与轨道平面垂直时，地球敏感器才能在轨道上的任一位置都可观测到地球。在过渡轨道上，为了完成卫星入轨操作，卫星姿态要多次机动，自旋轴不在轨道法线方向，只在有限的轨道弧段上地球敏感器才能扫描到地球。当卫星自旋轴位于轨道平面内时，地球敏感器的可观测弧段为最短。利用测量方程(6.1-6)，可算出可观测弧段和扫描弦宽。例如，当自旋轴位于同步轨道平面内，且 $\theta_e=90°$ 时，两只地球敏感器的安装角为 $\gamma_N=84°,\gamma_S=96°$。在可见弧段的各个位置上，地平敏感器的扫描弦宽如图 6.1-5 所示，u 为卫星距基准地心方向的角距。因此，两只地球敏感器能同时观测地球的弧段很短，这种确定天底角的方法适用范围很有限。

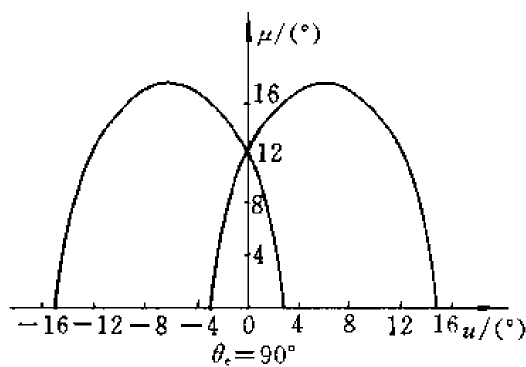


图　6.1-5

更为实用的方法是借助于太阳敏感器的测量信息(图 6.1-4)。令太阳与地球在单位天球的大圆上相隔的角度为 θ_{Se}，并假定太阳敏感器的狭缝 S_1 与地球敏感器的光轴位于同一卫星子午面上，在卫星自旋一周中，从太阳敏感器和地球敏感器测得的姿态信息可以计算地中脉冲与 S_1 脉冲(t_S)之间的角度间隔。从几何角度看，此角度间隔是太阳-自旋轴平面与地心-自旋轴平面之间的夹角，即在太阳和地球之间卫星的自旋转角，简称太阳-地心转角 λ：

$$\lambda = \omega\left[\frac{1}{2}(t_i + t_o) - t_S\right] \tag{6.1-9}$$

在球面三角形 ZSE 中，有余弦公式

$$\cos\theta_{Se} = \cos\theta_S\cos\theta_e + \sin\theta_S\sin\theta_e\cos\lambda$$

将上式与式(6.1-6)联合求解，得天底角

$$\tan\theta_e = \frac{\cos\theta_S\cos\rho - \cos\gamma\cos\theta_{Se}}{\cos\theta_{Se}\sin\gamma\cos\left(\frac{\mu}{2}\right) - \cos\rho\sin\theta_S\cos\lambda} \tag{6.1-10}$$

求解天底角的充要条件是方程(6.1-6)和(6.1-10)的系数行列式不等于零，即

$$\cos\gamma\sin\theta_S\cos\lambda - \sin\gamma\cos\theta_S\cos\frac{\mu}{2} \neq 0$$

上式是借助太阳敏感器测量天底角时，测量几何的限制条件。

6.1.3 陆标和星光方向的测量

在同步气象卫星上装有观测云和地表的扫描辐射计，它的光学视场很窄(约几十微弧度)，灵敏度很高，观测地面的分辨率达 0.5 km～1.5 km，可以分辨地球表面的陆标。在静止轨道上气象卫星的自旋轴垂直于赤道平面，此辐射计随着卫星的自旋对地球进行东西方向的扫描。卫星自转一周，辐射计对地球扫完一行，获得该行的地球图像线之后，辐射计的扫描角(光轴与自旋轴的夹角)步进一次(约几十微弧度)，在下一周，辐射计将获得相邻行的地球图像线。如辐射计视场为 μ_e，扫描地球的南北和东西宽度取为 ρ，则每行图像线由 ρ/μ_e 个像素组成；如步进角为 μ_l，则卫星需转 ρ/μ_l 周才能扫描完一帧，获得一个由 $\rho^2/\mu_e\mu_l$ 个像素组成的网格(相当于一个矩阵)，如图 6.1-6 所示，因此称为网格式扫描。网格矩阵中每一个元素对应于扫描一帧中某一行中某一元的像素，靠各个像素的亮度形成一张图片。在这张图片上可以找到某些指定的陆标在网格中的位置，常以像素的行数 l 和像素的元数 e 表示，见图 6.1-7。

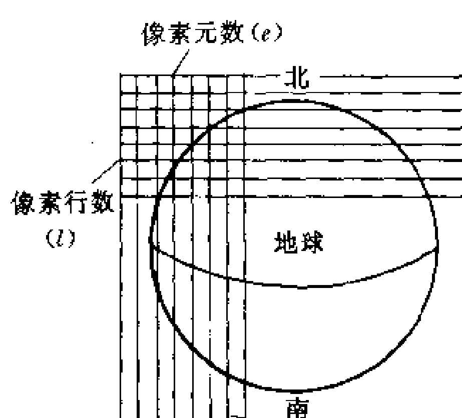


图 6.1-6

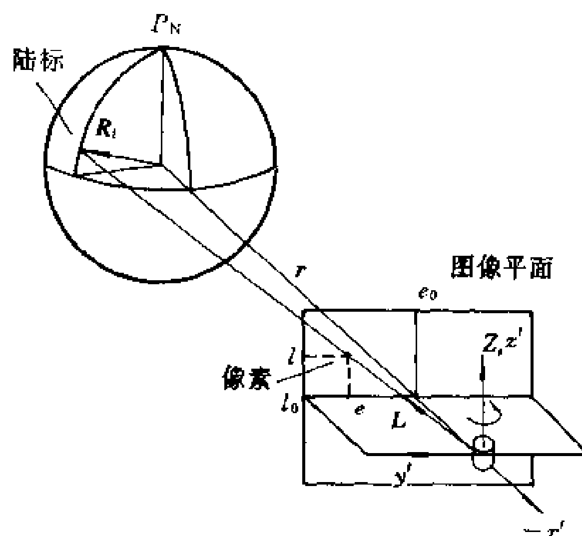


图 6.1-7

定义一个与星体不固连的辅助坐标系 $0x'y'z'$；原点在卫星质心上；z' 轴与自旋轴重合；x'

轴在卫星的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 和自旋轴矢量 $\boldsymbol{Z}$ 组成的平面内，并与 z' 轴垂直，且指向地球通过图像中心；y' 轴与 x'，z' 轴组成正交坐标系。如卫星处在赤道平面上，自旋轴又与赤道平面垂直，则 x' 轴指向地球中心。

如已知某参考陆标在图像上的位置 (l,e)，则陆标在卫星坐标系 $0x'y'z'$ 中的方位角 α_l 和仰角 β_l 为

$$\left.\begin{aligned}\alpha_l &= \mu_e(e_0 - e)\\ \beta_l &= \mu_l(l_0 - l)\end{aligned}\right\} \tag{6.1-11}$$

式中 l_0，e_0 是网格中心位置的行数和元数。因此，从卫星指向陆标的单位矢量 $\boldsymbol{L}$ 与自旋轴 $\boldsymbol{Z}$ 的夹角 θ_l 为

$$\theta_l = 90° - \beta_l$$

相应地，参考陆标方向的姿态观测方程为

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{Z} = \sin\beta_l$$

上式观测方程删弃了陆标测量的另一信息——陆标的方位角 α_l。为提高姿态确定精度，充分利用获取的数据，将姿态信息组合为陆标方向 $\boldsymbol{L}$ 在上述辅助坐标的方向余弦，即

$$\boldsymbol{L} = \cos\alpha_l\cos\beta_l\boldsymbol{e}'_x + \sin\alpha_l\cos\beta_l\,\boldsymbol{e}'_y + \sin\beta_l\boldsymbol{e}'_z \tag{6.1-12}$$

按辅助坐标的定义，坐标轴的单位矢量 $\boldsymbol{e}'_x$，$\boldsymbol{e}'_y$，$\boldsymbol{e}'_z$ 可列为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{e}'_x &= \frac{-\boldsymbol{r} + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{Z})\boldsymbol{Z}}{\sqrt{r^2 - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{Z})^2}}\\ \boldsymbol{e}'_y &= \boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{x}'\\ \boldsymbol{e}'_z &= \boldsymbol{Z}\end{aligned}\right\} \tag{6.1-13}$$

参见图 6.1-7，在赤道惯性坐标中，卫星观测该陆标的单位矢量为

$$\boldsymbol{L} = \frac{\boldsymbol{R}_l - \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{R}_l - \boldsymbol{r}|} \tag{6.1 14}$$

由该陆标的地理经、纬度和高程以及地球扁率，可得该陆标在地球坐标的方向余弦 (R_{lx},R_{ly},R_{lz})，上式中陆标位置的向径 $\boldsymbol{R}_l$ 可列为

$$\boldsymbol{R}_l = \begin{bmatrix}\cos G(t) & -\sin G(t) & 0\\ \sin G(t) & \cos G(t) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R_{lx}\\ R_{ly}\\ R_{lz}\end{bmatrix}$$

$G(t)$ 为该陆标观测时刻格林威治的恒星时角。结合式(6.1-12)，(6.1-13)，(6.1-14)，可列出陆标方向的姿态观测方程为

$$[\boldsymbol{e}'_x\ \boldsymbol{e}'_y\ \boldsymbol{e}'_z]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{R}_l - \boldsymbol{r}]\frac{1}{|\boldsymbol{R}_l - \boldsymbol{r}|} = \begin{bmatrix}\cos\alpha_l & \cos\beta_l\\ \sin\alpha_l & \cos\beta_l\\ & \sin\beta_l\end{bmatrix}$$

上式左端的坐标转移矩阵含有待确定的自旋轴矢量 $\boldsymbol{Z}$(式(6.1-13))。

同步气象卫星的扫描辐射计可以灵敏地测得星光辐射，在卫星图像的角区、在地球圆盘的外围有星光成像。由星光像点的行数和元数，以及类同的关系式(6.1-11)，可得该恒星在上述辅助坐标系(图 6.1-7)的方位角 α_S 和仰角 β_S，又由星光星历表得该星光在赤道惯性坐标的矢量 $\boldsymbol{S}$，仿照 6.1.2 节论述，恒星方向的姿态观测方程可列为

$$[\boldsymbol{e}'_x\ \boldsymbol{e}'_y\ \boldsymbol{e}'_z]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_S & \cos\beta_S \\ \sin\alpha_S & \cos\beta_S \\ & \sin\beta_S \end{bmatrix}$$

6.2 自旋姿态的几何确定

6.2.1 双矢量确定姿态的算法

如上所述，自旋卫星上任一种观测某个参考天体的姿态敏感器，都可以得出两个独立的反映姿态的测量信息，并由此导出该参考天体在固连的星体坐标系中的方向。在实际应用中，得出的两个测量值是姿态敏感器观测到参考天体的时间和自旋轴与该天体方向的夹角。但自旋卫星的姿态参数共有三个：自旋轴的赤经、赤纬和卫星自旋的转角。因此只观测一个参考天体是不够的，如不考虑卫星自旋转角的确定，则有用的测量值只是夹角，还须观测第二个参考天体。

双矢量确定姿态的几何方法是双锥相交法。它是确定卫星自旋轴方向的最基本方法。本节叙述这种几何方法的数学模式，即双矢量确定姿态的算法及其几何概念。定义卫星自旋轴方向的单位矢量为$\boldsymbol{Z}$，参考天体C_1,C_2方向的单位矢量为$\boldsymbol{C}_1$,$\boldsymbol{C}_2$。如已测得卫星自旋轴与天体C_1,C_2方向的夹角为θ_1,θ_2，如图 6.2-1 所示，则姿态确定方程为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{C}_1 \cdot \boldsymbol{Z} &= \cos\theta_1 \\ \boldsymbol{C}_2 \cdot \boldsymbol{Z} &= \cos\theta_2 \\ \boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{Z} &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{6.2-1}$$

第三式是单位矢量的模值约束方程。由于C_1,C_2在地心惯性坐标系中的方向是确定的，并且$\boldsymbol{C}_1 \neq \boldsymbol{C}_2$，因此可以作为确定自旋轴方向的基准坐标矢量。自旋轴$\boldsymbol{Z}$在$\boldsymbol{C}_1$,$\boldsymbol{C}_2$组成的非正交坐标系中的表达式是

$$\boldsymbol{Z} = a_1\boldsymbol{C}_1 + a_2\boldsymbol{C}_2 + a_3(\boldsymbol{C}_1 \times \boldsymbol{C}_2) \tag{6.2-2}$$

显然，坐标分量a_1,a_2,a_3完全确定了自旋轴$\boldsymbol{Z}$的方向。令矢量$\boldsymbol{C}_1$,$\boldsymbol{C}_2$之间的夹角为θ_{12}，将式(6.2-2)代入式(6.2-1)，得

$$\left.\begin{aligned} & a_1 + a_2\cos\theta_{12} = \cos\theta_1 \\ & a_1\cos\theta_{12} + a_2 = \cos\theta_2 \\ & a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\theta_{12} + a_3^2\sin^2\theta_{12} = 1 \end{aligned}\right\} \tag{6.2-3}$$

由于矢量$\boldsymbol{C}_1$,$\boldsymbol{C}_2$不共线，$\theta_{12} \neq 0$，式(6.2-3)前二方程的解是

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\sin^2\theta_{12}}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\cos\theta_{12}) \\ a_2 &= \frac{1}{\sin^2\theta_{12}}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\cos\theta_{12}) \end{aligned}\right\} \tag{6.2-4}$$

再根据单位矢量约束方程，求得

$$a_3 = \pm\frac{1}{\sin\theta_{12}}[1 - a_1^2 - a_2^2 - 2a_1a_2\cos\theta_{12}]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \pm \frac{1}{\sin\theta_{12}}\left[\sin^2\theta_{12} - (\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 - 2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_{12})\right]^{\frac{1}{2}} \tag{6.2-5}$$

上式表明，如从姿态测量信息中只能获得夹角 θ_1, θ_2，则姿态确定方程(6.2-1)有双重姿态解。两个解对称地处在($\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2$)平面的两侧，其中只有一个解是真解，另一个是伪解，还须判别真伪。确定自旋轴 $\boldsymbol{Z}$ 的精度不仅决定于参考矢量的测量精度(θ_1，θ_2 的精度)，还与 C_1, C_2 之间的夹角 θ_{12} 有关，$\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2$ 越靠近，姿态信息的测量误差引起的姿态确定误差越大。

图 6.2-1

借助两个参考天体尚未完全确定自旋卫星的姿态，因为没有充分利用敏感器获得的姿态信息，同时局限于从锥体相交的几何概念观察问题。根据姿态敏感器扫描参考天体(或目标)获得的姿态信息，不仅可得出自旋轴与天体方向之间的夹角，而且还可得出该天体在固连于星体的自旋坐标系中的方位角。此方位角的信息包含在敏感器视场扫过该天体的时间信息中，而上述的夹角即为该天体在自旋坐标系中的余仰角。单个地使用这种方位信息比较困难，但联合使用两个参考天体的方位信息就得出一个重要的测量值，即自旋轴分别与两个参考天体方向组成的平面之间的二面角，或称为两个天体之间的自旋转角。如以太阳、地球作为参考天体，此转角计算式即为式(6.1-9)。

有了参考矢量 $\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2$，可以人为地建立第三个单位参考矢量 $\boldsymbol{C}_3$，它垂直于 $\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2$，即

$$\boldsymbol{C}_3 = \frac{1}{\sin\theta_{12}}(\boldsymbol{C}_1 \times \boldsymbol{C}_2) \tag{6.2-6}$$

如天球图 6.2-2 所示，Z, C_1, C_2, C_3 是单位矢量 $\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \boldsymbol{C}_3$ 在天球上的位置，C_3 与 C_1, C_2 之间的弧长为 90°。如上所述，从姿态敏感器的姿态信息中，能获得两个天体 C_1, C_2 之间的姿态转角 λ，通常定义从 C_1 按卫星自旋方向转向 C_2 的姿态转角为正。通过转角的测量，能导出一个重要的观测量——自旋轴与第三参考矢量 $\boldsymbol{C}_3$ 之间的夹角 θ_3。在图 6.2-2 上，θ_3 包含在球面三角形 ZC_2C_3 中，有三角式

$$\cos\theta_3 = \sin\theta_2\cos\eta'$$

球面三角形 $C_1C_2C_3$ 是直角球面三角形，有 $\eta + \eta' = \xi + \xi' = 90°$，球面三角形 ZC_1C_2 中的正弦公式可以化成

$$\frac{\sin\lambda}{\sin\theta_{12}} = \frac{\sin\eta}{\sin\theta_1} = \frac{\cos\eta'}{\sin\theta_1}$$

图 6.2-2

从上面两式求得

$$\cos\theta_3 = \frac{1}{\sin\theta_{12}}\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\lambda \tag{6.2-7}$$

式中 θ_3 只取正值。虽然 C_3 不代表某个真实天体，但它是确定的，围绕它可以画出第三个假想天体的天体锥，卫星自旋轴必在三个天体锥的唯一的共同交线上，如图6.2-3所示。从图6.2-4中可以看出，在天体 C_1, C_2 之间，绕真解 $\boldsymbol{Z}$ 的姿态转角 λ 不等于绕伪解 $\boldsymbol{Z}'$ 的转角 λ'。因此，引用

第三种测量值——转角确定姿态唯一解的几何概念是：转角的实际测量值可以起到判别两个天体锥相交的真伪解的作用。转角测量的姿态观测方程可列为

$$(\boldsymbol{C}_1 \times \boldsymbol{C}_2) \cdot \boldsymbol{Z} = [1 - (\boldsymbol{C}_1 \cdot \boldsymbol{Z})^2]^{\frac{1}{2}}[1 - (\boldsymbol{C}_2 \cdot \boldsymbol{Z})^2]^{\frac{1}{2}}\sin\lambda$$

转角测量的另一作用是有利于减少姿态的不确定性(见 6.2.4 节)。

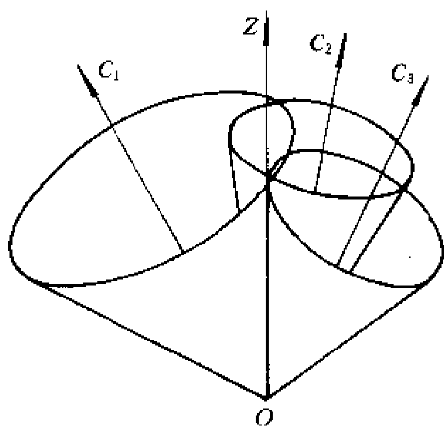


图　6.2-3

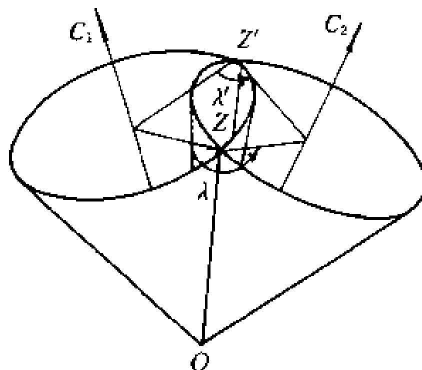


图　6.2-4

根据三个测量值 $\theta_1,\theta_2,\lambda$，列出姿态确定方程：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{C}_1 \cdot \boldsymbol{Z} &= \cos\theta_1 \\ \boldsymbol{C}_2 \cdot \boldsymbol{Z} &= \cos\theta_2 \\ \boldsymbol{C}_3 \cdot \boldsymbol{Z} &= \cos\theta_3 \end{aligned}\right\} \tag{6.2-8}$$

另有单位约束方程 $\boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{Z}=1$。仍用非正交坐标 $\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2,\boldsymbol{C}_3$ 描述姿态 $\boldsymbol{Z}$ 的方向，即

$$\boldsymbol{Z} = a_1'\boldsymbol{C}_1 + a_2'\boldsymbol{C}_2 + a_3'\sin\theta_{12}\boldsymbol{C}_3 \tag{6.2-9}$$

式中系数 a_1,a_2,a_3 带撇号，以示与式(6.2-1)解的区别，但可证明 $a_1=a_1', a_2=a_2', a_3^2=a_3'^2$。

将式(6.2-9)代入式(6.2-8)得姿态确定方程的展开式

$$\left.\begin{aligned} &a_1' + a_2'\cos\theta_{12} = \cos\theta_1 \\ &a_1'\cos\theta_{12} + a_2' = \cos\theta_2 \\ &a_3'\sin\theta_{12} = \cos\theta_3 \\ &a_1'^2 + a_2'^2 + 2a_1'a_2'\cos\theta_{12} + a_3'^2\sin^2\theta_{12} = 1 \end{aligned}\right\} \tag{6.2-10}$$

由前三式可得姿态的唯一解：

$$\left.\begin{aligned} a_1' &= \frac{1}{\sin^2\theta_{12}}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\cos\theta_{12}) \\ a_2' &= \frac{1}{\sin^2\theta_{12}}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\cos\theta_{12}) \\ a_3' &= \frac{1}{\sin^2\theta_{12}}\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\lambda \end{aligned}\right\} \tag{6.2-11}$$

在导出上面第三个解时，引用了三角式(6.2-7)。因此，有 $a'=a_1, a_2'=a_2$，而 a_3' 是唯一解。如要证明 $a_3'^2=a_3^2$，则比较式(6.2-10)和(6.2-3)的单位约束方程，可得出结论：姿态确定方程式(6.2-10)的解自然满足单位约束方程。

根据 a'_3 的等式和式(6.2-9)，可写出

$$a'^2_3 = \frac{1}{\sin^4\theta_{12}}\cos^2\theta_3 \sin^2\theta_{12}$$

$$= \frac{1}{\sin^4\theta_{12}}[\sin^2\theta_{12} - \sin^2\theta_3 \sin^2\theta_{12}] \tag{6.2-12}$$

参看图 6.2-2，在球面三角形 ZC_1C_3 和 ZC_2C_3 中，有三角式

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \sin\theta_3 \cos\tau_1 \\ \cos\theta_2 &= \sin\theta_3 \cos\tau_2 \end{aligned}\right\} \tag{6.2-13}$$

在直角球面三角形 $C_1C_2C_3$ 中，有

$$\tau_1 + \tau_2 = \theta_{12} \tag{6.2-14}$$

利用式(6.2-13)，(6.2-14)，可将式(6.2-5)中小括号项化成

$$\begin{aligned} &\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 - 2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_{12} \\ &= \sin^2\theta_3[\cos^2\tau_1 + \cos^2\tau_2 - 2\cos^2\tau_1\cos^2\tau_2 + 2\sin\tau_1\sin\tau_2\cos\tau_1\cos\tau_2] \\ &= \sin^2\theta_3[\sin\tau_1\cos\tau_2 + \sin\tau_2\cos\tau_1]^2 \\ &= \sin^2\theta_3\sin^2\theta_{12} \end{aligned}$$

将上式代入式(6.2-5)，再与式(6.2-12)比较，就证得 $a'^2_3 = a^2_3$。从图 6.2-3 中三锥相交定姿的几何图形，也可直接推想出，姿态确定方程(6.2-8)的解必定是单位矢量。

这个结论不能表明约束方程是多余的，在实际工程测量中不可避免存在观测量 $\theta_1, \theta_2, \theta_{12}$ 的测量误差。在这种情况下，从式(6.2-8)求得的 $\boldsymbol{Z}$ 一般是不满足约束方程，因此，根据多次观测的结果对姿态作精确估值时，必须考虑约束方程。

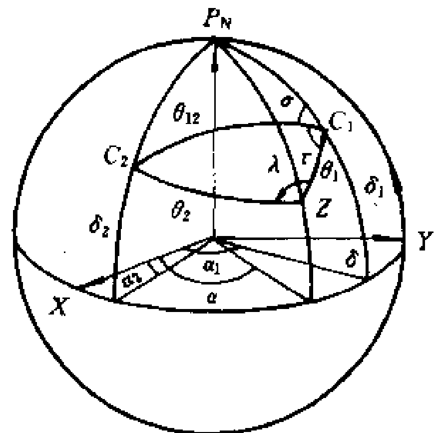


图　6.2-5

参见图 6.2-5，自旋轴矢量 $\boldsymbol{Z}$ 的赤经、赤纬 α, δ 可从天球三角形中直接得出。$\boldsymbol{P}_N$ 是北极方向，已知两根参考矢量 $\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2$ 的赤经 α_1, α_2 和赤纬 δ_1, δ_2 以及夹角 θ_{12}。天体角 θ_1, θ_2 和转角 λ 是实测值，因此球面三角形 ZC_1C_2 是确定的，有正、余弦公式

$$\cos\tau = \frac{\cos\theta_2 - \cos\theta_{12}\cos\theta_1}{\sin\theta_{12}\sin\theta_1}$$

$$\sin\tau = \frac{\sin\theta_2\sin\lambda}{\sin\theta_{12}}$$

从中可以解得 τ 角。而在球面三角形 $P_NC_1C_2$ 中也有正、余弦公式

$$\cos\sigma = \frac{\sin\delta_2 - \sin\delta_1\cos\theta_{12}}{\cos\delta_1\sin\theta_{12}}$$

$$\sin\sigma = \frac{\cos\delta_2\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin\theta_{12}}$$

从中可以解得 σ 角。列出球面三角形 P_NZC_1 的余弦公式

$$\sin\delta = \cos\theta_1\sin\delta_1 + \sin\theta_1\cos\delta_1\cos(\tau + \sigma)$$

由于赤纬的范围是$(-90°\leqslant\delta\leqslant 90°)$，从上式可以直接确定赤纬 δ。利用球面三角形 P_NZC_1 的另两个正、余弦公式

$$\cos(\alpha_1 - \alpha) = \frac{\cos\theta_1 - \sin\delta_1\sin\delta}{\cos\delta_1\cos\delta}$$

$$\sin(\alpha_1 - \alpha) = \frac{\sin\theta_1\sin(\tau + \sigma)}{\cos\delta}$$

可以得出赤经 α 的唯一解。

6.2.2 姿态确定的太阳-地球方式

上述用于姿态确定的参考矢量是任意的，只要两个参考矢量不共线，参考矢量之间的夹角越大越有利。在工程技术中最方便、最常用的是太阳矢量和天底矢量，简称太阳-地球方式。卫星上安装有一个太阳敏感器和一个地球敏感器，在卫星旋转一周内，两个敏感器共给出四个脉冲，它们包含了全部的姿态信息。利用式(6.1-4)，(6.1-10)和(6.1-9)可求得确定姿态解所需的三个测量值：太阳角 θ_S，天底角 θ_e，太阳-地心转角 λ。参照上述双矢量定姿的原则，太阳-地球方式的姿态确定方程可归纳为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{Z} &= \cos\theta_S \\ \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{Z} &= \cos\theta_e \\ (\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{Z} &= \sin\theta_S\sin\theta_e\sin\lambda \end{aligned}\right\} \tag{6.2-15}$$

及单位矢量约束方程 $\boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{Z}=1$。太阳和天底矢量 $\boldsymbol{S},\boldsymbol{E}$ 为已知，由天文和轨道参数得出

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \cos\delta_S & \cos\alpha_S \\ \cos\delta_S & \sin\alpha_S \\ \sin\delta_S & \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

式中，α_S，δ_S 是太阳的赤经、赤纬；x，y，z 是卫星在惯性坐标的位置参数。

在实际工程问题中还须考虑姿态信息不齐全的情况，例如当地球敏感器出现故障时，可能丢失一个地平穿越脉冲(穿入或穿出)，或地球敏感器受到明暗分界线的干扰、无法取得地中脉冲的情况，这时就不能直接导出天底角，但可利用单个地平穿越脉冲，获得太阳-地平(穿入或穿出)转角 λ'，从而替代太阳-地心转角 λ。假定现在只有三个姿态脉冲——一个地平穿入脉冲和两个太阳脉冲，利用穿入脉冲算得 λ'。见图 6.2-6，$\boldsymbol{E}_i$ 为穿入地平矢量，它与太阳矢量的夹角为 θ'_{Se}，但穿入地平矢量 $\boldsymbol{E}_i$ 不是已知的参考矢量。在球面三角形 ZSE_i 中，有

$$\cos\theta'_{Se} = \cos\theta_S\cos\gamma + \sin\theta_S\sin\gamma\cos\lambda'$$

图 6.2-6

由于 θ'_{Se} 满足不等式 $\theta_{Se}-\rho\leqslant\theta'_{Se}<\theta_{Se}$，因此可以确定夹角 θ'_{Se}。这样，有了两个矢量 $\boldsymbol{S},\boldsymbol{E}_i$ 和两个夹角 θ'_{Se}，ρ，就可解出具有双重真伪的地平矢量 E_i，再借助太阳-地平转角 λ' 的实测值，每个地平矢量(作为参考矢量)都可与太阳矢量联合确定自旋轴矢量，因此姿态解也是双重真伪的。另一种方法是利用太阳-地平转角求出天底角，在球面三角形 ZSE_i 中，利用正弦公式计算 ξ 角：

$$\sin\xi = \frac{\sin\gamma\sin\lambda'}{\sin\theta'_{Se}}$$

这里 $0\leqslant\xi\leqslant180^\circ$，再利用球面三角形 SEE_i 的余弦公式

$$\cos\eta=\frac{\cos\rho-\cos\theta_{Se}'\cos\theta_{Se}}{\sin\theta_{Se}'\sin\theta_{Se}}$$

计算 η 角，但由于 $|\cos\theta_{Se}'|\leqslant1$，$\cos\rho\geqslant\cos\theta_{Se}$，上式只取正值，$\eta$ 角有双解。球面三角形 SEZ 给出的天底角

$$\cos\theta_e=\cos\theta_S\cos\theta_{Se}+\sin\theta_S\sin\theta_{Se}\cos(\xi+\eta)$$

也是双重的真伪解。因此，由于缺少太阳-地心转角 λ 的实测值，应用太阳锥、天底锥求得的姿态解是四重真伪的。

同样，如太阳敏感器丢失一个狭缝脉冲将不能直接导出太阳角，但借助天底角和太阳-地心转角可以求出双重真伪的太阳角。假定现有的三个姿态脉冲为地平穿入、穿出脉冲和太阳子午狭缝脉冲，在图 6.2-6 的球面三角形 SEZ 中，有余弦公式

$$\cos\theta_{Se}=\cos\theta_S\cos\theta_e+\sin\theta_S\sin\theta_e\cos\lambda$$

从中可解出双重真伪的太阳角

$$\cos\theta_S=\{\cos\theta_e\cos\theta_{Se}\pm\sin\theta_e\cos\lambda\,(\sin^2\theta_e\cos^2\lambda+\cos^2\theta_e-\cos^2\theta_{Se})^{\frac{1}{2}}\}/(\sin^2\theta_e\cos^2\lambda+\cos^2\theta_e)$$

如只有单个地球弦宽的数据，则上式的天底角也是双重真伪的，直接使用两锥相交的方法将有八个姿态解，但利用太阳-地心转角的实测值，可使姿态解的重数减至四个。

姿态敏感器的测量值组成的观测量有两类：自旋轴与两个参考矢量之间的夹角，在两个参考矢量之间的转角。当姿态信息不完备时，得不到三个观测量，但至少要有其中任意两个观测量，以导出模糊的姿态解。判别真伪姿态解的方法都要通过一段时间的姿态测量，得到一组模糊姿态解的集合，再从这一组包含模糊的集合中选出真解。将每个模糊解集合与姿态的先验值比较，然后选出最接近于初始估计值的解。如没有可提供利用的先验估计值，可根据天底矢量（或地平矢量）在空间转动，而太阳矢量和自旋轴矢量在空间恒定的特点，随着卫星在轨道上运动，天底锥与太阳锥两条交线中的一条在空间中是恒定的，另一条是变动的，因此模糊解中的伪解是分散的，而真解的集合形成一个族。将不同时间的大量测量值进行数据处理，可选择其中保持在族中心的姿态解作为先验姿态，用来消除伪解。

6.2.3 双矢量确定姿态的最优估计

6.2.2 节用两个参考矢量组成的非正交坐标描述自旋姿态，经坐标转换，即可求得自旋姿态在给定惯性坐标的方向，或直接列出在惯性坐标的姿态确定方程

$$\boldsymbol{C}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{Z}=\cos\theta_1$$

$$\boldsymbol{C}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{Z}=\cos\theta_2$$

$$\boldsymbol{C}_3^{\mathrm T}\boldsymbol{Z}=\cos\theta_3$$

及单位约束方程 $\boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{Z}=1$。参考矢量 $\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2,\boldsymbol{C}_3$ 在惯性坐标的方向为已知，其方向余弦为 (C_{1x},C_{1y},C_{1z}) 等，如测量误差为零，则从上式姿态确定方程求得姿态 $\boldsymbol{Z}$ 的方向余弦 (a_x,a_y,a_z)，

$$\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{1x}&C_{1y}&C_{1z}\\C_{2x}&C_{2y}&C_{2z}\\C_{3x}&C_{3y}&C_{3z}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\cos\theta_1\\\cos\theta_2\\\cos\theta_3\end{bmatrix}$$

上式有唯一解的充要条件是参考矢量 $\boldsymbol{C}_1$,$\boldsymbol{C}_2$ 不共线,确保矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行列式不为零。

测量总是有误差的,观测也总是多次的,因此要从成批观测数据中选出姿态的最优估计解,而且满足单位约束条件。令 $\boldsymbol{B}(i)$ 为第 i 次的测量列阵,

$$\boldsymbol{B}(i)=\begin{bmatrix}B_1(i)\\B_2(i)\\B_3(i)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta_1(i)\\\cos\theta_2(i)\\\cos\theta_3(i)\end{bmatrix}$$

假定三个量的测量是独立的,它们的方差各为 σ_1^2,σ_2^2,σ_3^2。从批量观测求姿态的最优解是以二次型指标为极小量的最优估计(见文献[5]),最优指标可列为

$$Q(\boldsymbol{Z})=\sum_i\{\sigma_1^{-2}[B_1(i)-\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{Z}]^2+\sigma_2^{-2}[B_2(i)-\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{Z}]^2+\sigma_3^{-2}[B_3(i)-\boldsymbol{C}_3^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{Z}]^2\}\tag{6.2-16}$$

并有单位约束条件。引用拉格朗日乘子 λ,可求得最优估计是

$$\boldsymbol{Z}=(\boldsymbol{M}-\lambda\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{V}$$

式中,$\boldsymbol{I}$ 为单位阵;乘子 λ 是方程 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}-\lambda\boldsymbol{I})^{-2}\boldsymbol{V}=1$ 的根;$\boldsymbol{M}$,$\boldsymbol{V}$ 由下式得出:

$$\boldsymbol{M}=\sum_i\{\sigma_1^{-2}\boldsymbol{C}_1(i)\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}(i)+\sigma_2^{-2}\boldsymbol{C}_2(i)\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}(i)+\sigma_3^{-2}\boldsymbol{C}_3(i)\boldsymbol{C}_3^{\mathrm{T}}(i)\}$$

$$\boldsymbol{V}=\sum_i\{\sigma_1^{-2}B_1(i)\boldsymbol{C}_1(i)+\sigma_2^{-2}B_2(i)\boldsymbol{C}_2(i)+\sigma_3^{-2}B_3(i)\boldsymbol{C}_3(i)\}$$

实践表明,如测量误差为小量,则单位约束条件可略去,最优解为 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{V}$。

6.2.4 姿态测量几何的分析

自旋卫星的姿态确定就是寻求自旋轴单位矢量在球心位于卫星质心的单位天球上的位置。利用参考天体在此天球上的已知参考点,根据与参考点相关联的每个测量值,可在天球上画出一条等测量曲线。这种曲线就是可能的姿态位置的无限集合,或称可能姿态的轨迹。因此,姿态确定的实质是:根据各测量值在天球上求各测量值对应的可能姿态轨迹的交点。

按照可能姿态轨迹的形状,在自旋卫星姿态测定问题中,测量可分为弧长和转角两类。如测量值是自旋轴与参考天体矢量之间的夹角,则可能姿态在天球上的轨迹是一圆,圆心位于参考矢量在天球上的参考点,圆半径(即可能姿态点与参考点之间的等值弧长)等于该夹角的测量值,如图 6.2-7 所示。但是在两个参考矢量之间,姿态转角测量对应的等转角曲线的几何图形要比等值弧长曲线复杂。引用文献[47]中的一个几何图形(见图 6.2-8),在此图上两个参考点之间的弧长为 $\theta_{12}=30°$。包含天体 C_1,C_2 的大圆将天球分为两部分,转角在 0°和 180°之间的所有等转角线都位于一个半球内,而 180°和 360°之间的所有等转角线则位于另一个半球内。转角 $\lambda=30°$的曲线又把每个半球分为四个象限,每个等转角线(除 $\lambda=\pm30°$外)都由半球中两相对象限内两个不相交部分组成,各个部分的起点和终点都落在参考点 C_1,C_2 或它们的参考点 C_1^{-1},C_2^{-1} 上。

在实际工程技术中没有一种测量值是准确的。单次测量能得出一条等观测量的姿态轨迹,多次测量的结果,得出由多条姿态轨迹组成的轨迹带,而自旋姿态在天球上的可能位置将落在轨迹带的相交区域内,轨迹带的宽度取决于观测量的不确定性。假定两个参考矢量为太阳矢量和天底矢量,图 6.2-9 画出了以太阳角 θ_S 和天底角 θ_e 为观测量时,两条可能姿态的轨迹带。

为了达到足够的姿态确定精度,两条轨迹带的相交区域很小,可以看作在平面上的平行四

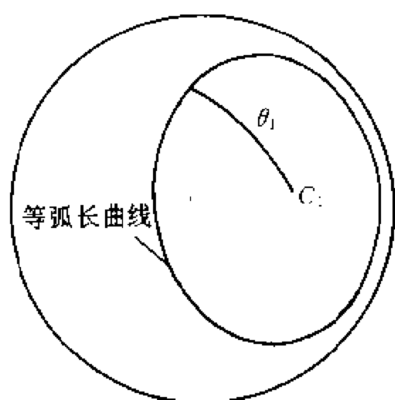


图　6.2-7

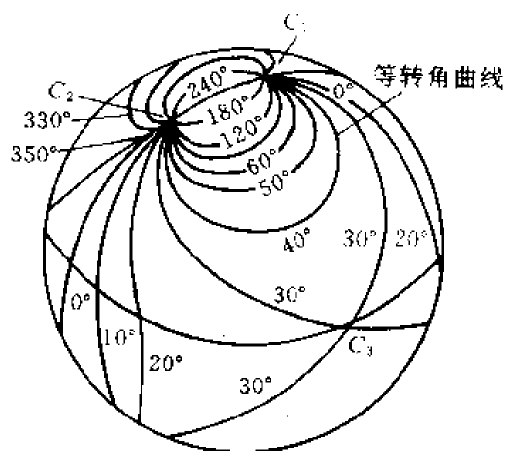


图　6.2-8

边形，它的面积直接反映了姿态确定的不确定性。而平行四边形面积的大小取决于两条轨迹带的宽度和两条轨迹带的相交角，简称相关角。图 6.2-10 是天球图 6.2-9 上姿态不确定区的扩展图，L_{θ_S}，L_{θ_e}表示等太阳角、等天底角的可能姿态轨迹。姿态不确定带的宽度是沿可能姿态轨迹的垂直方向测定的，因此在图 6.2-10 上，姿态不确定带的宽度等于太阳角、天底角观测量的误差 $\Delta\theta_S$，$\Delta\theta_e$。只要太阳落入敏感器的视场范围内，太阳角观测量是从太阳敏感器的测量值(两

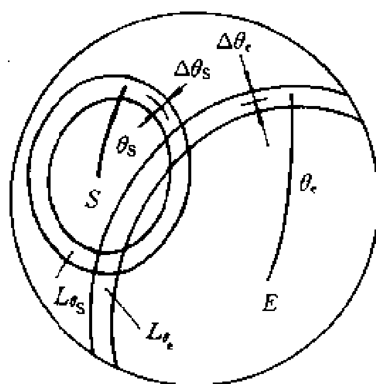


图　6.2-9

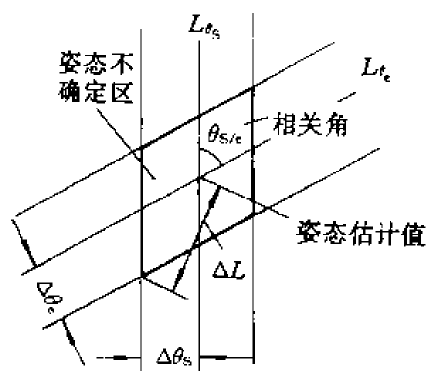


图　6.2-10

个姿态脉冲之间的时间间隔)中直接导出的，同样的敏感器测量误差引起太阳角观测量的误差与卫星姿态方向的关系不十分密切。

但是天底角观测量则不然，敏感器的测量值是两次穿过地平之间的地球弦宽，从弦宽导出天底角的计算精度与卫星相对于地球的姿态密切相关，相同的弦宽测量误差在不同的天底角情况下引起的天底角的计算误差相当悬殊。参见天底角观测天球图 6.1-4 和观测方程(6.1-6)，微分后可得

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\theta_e}=\frac{-\sin\theta_e\cos\gamma+\cos\theta_e\sin\gamma\cos\dfrac{\mu}{2}}{\sin\theta_e\sin\gamma\sin\dfrac{\mu}{2}}$$

上式导数为零的条件是

$$\tan\theta_e = \tan\gamma\cos\frac{\mu}{2} \tag{6.2-17}$$

根据球面直角三角形的公式，当图 6.1-4 天球上球面三角形 ZE_iE_o 中 θ_e 弧和 ρ 弧成 90°时，条件式(6.2-17)成立，地球敏感器的光轴扫描通过地球圆盘中心，弦宽的测量为最大。在此状态，天底角较大的偏差对应弦宽测量的小量变化。因此，弦宽测量的小量不确定性在天球上对应一条较宽的姿态不确定带，式(6.2-17)即为姿态天底角测量几何的奇点。

姿态的等转角轨迹带与转角测量误差 $\Delta\lambda$ 的关系显得较复杂，参见图 6.2-6。例如，在转角等于 30°至 180°范围内，在转角值越大的区域，对应的等转角线分布越密；而在转角值越低的区域，对应的等转角线分布越稀。这表明在不同的姿态几何情况下，相同的转角测量误差引起的可能姿态轨迹带的宽度不同。因此姿态的不确定性不仅与测量误差有关，还与测量几何条件有关。在文献[47]中引用测量密度的概念表达测量几何的状况。测量密度定义为测量值的变化量与对应两条可能姿态轨迹间的垂直弧长之比。如果姿态处在测量密度很低的测量几何区，则小量的测量不确定性将在天球上产生一个很宽的姿态不确定带。

参见图 6.2-11，在等转角轨迹 L_λ 和 $L_{\lambda+\Delta\lambda}$之间，姿态不确定带的宽度是轨迹间垂线的弧长 $\widehat{ZZ'}$。令 B 点为天底角 θ_e 弧的延长线与轨迹 $L_{\lambda+\Delta\lambda}$的交点，$ZB$ 的方向是天底角轨迹的梯度方向，与转角轨迹梯度方向 ZZ' 的的夹角为 $\theta_{e/\lambda}$，即为两种姿态轨迹之间的相关角(见下文)。弧长 $\widehat{ZB}$等于天底角在等 η 角方向的变化量，$\widehat{ZB}=\Delta\theta_e|_\eta$，$\eta$ 为常值。因此，转角变量 $\Delta\lambda$ 对应转角轨迹带的宽度 ΔL_λ 为

$$\Delta L_\lambda = \widehat{ZZ'} = \widehat{ZB}\cos\angle BZZ' - \Delta\theta_e\cos\theta_{e/\lambda}$$

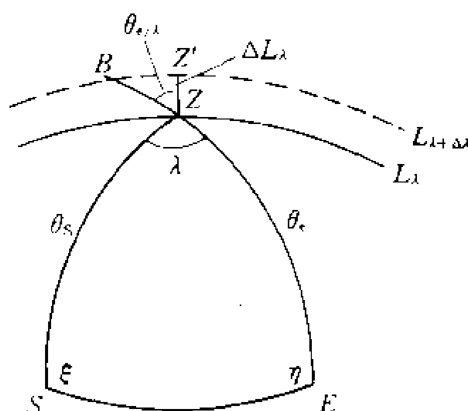


图 6.2-11

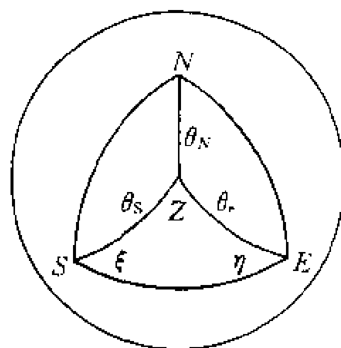


图 6.2-12

由此得转角轨迹带宽与转角测量误差的导数关系式为

$$\frac{dL_\lambda}{d\lambda} = \cos\theta_{e/\lambda}\cdot\frac{d\theta_e}{d\lambda} \tag{6.2-18}$$

从球面三角形 ZSE 的三角式

$$\cot\theta_{Se}\sin\theta_e = \cot\lambda\sin\eta + \cos\theta_e\cos\eta$$

取 λ,θ_e 的微分，并引用该球面三角的正、余弦公式

$$\sin\eta\sin\theta_{Se} = \sin\lambda\sin\theta_S$$

$$\cos\theta_S = \cos\theta_e\cos\theta_{Se} + \sin\theta_e\sin\theta_{Se}\cos\eta$$

可得导数

$$\frac{\mathrm{d}\theta_e}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\tan\theta_S}{\sin\lambda}$$

再引用下文导出的相关角公式，可有

$$\cos\theta_{e/\lambda}=\frac{\cos\theta_S}{\sqrt{\cos^2\theta_S+\cot^2\xi}}$$

代入式(6.2-18)，得

$$\frac{\mathrm{d}L_\lambda}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\sin\theta_S}{\sin\lambda\sqrt{\cos^2\theta_S+\cot^2\xi}}$$

利用测量几何的零矢量 $\boldsymbol{N},\boldsymbol{N}=\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E}$(见图 6.2-12)和球面三角 SZN 和 EZN 的余弦公式

$$\cos\theta_N=\sin\theta_S\sin\xi$$

$$\cos\theta_N=\sin\theta_e\sin\eta$$

可列出转角测量的导数为

$$\frac{\mathrm{d}L_\lambda}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\sin\theta_S\sin\theta_e}{\sin\theta_{Se}\sin\theta_N}\tag{6.2-19}$$

利用 θ_S 弧的导数关系可得相同的等式。因此，转角测量几何的奇点为

$$\boldsymbol{Z}\cdot(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E})=1\tag{6.2-20}$$

姿态的不确定性不仅与姿态轨迹带的宽度有关，还与两轨迹带相交的角度——相关角有关。见图 6.2-10，仅有太阳角 θ_S 和天底角 θ_e 测量。如测量的系统误差范围是确定的，在此范围内概率分布是均匀的，则正确姿态可能位于图 6.2-10 所示的误差平行四边形内任何位置，可用四边形对角线半长度 ΔL 作为姿态不确定性的度量。如单个弧长的不确定宽度为 $\Delta\theta_S,\Delta\theta_e$，则姿态不确定性的估计值为

$$\Delta L=\frac{1}{\sin\theta_{S/e}}[\Delta\theta_S^2+\Delta\theta_e^2+2\Delta\theta_S\Delta\theta_e\cos\theta_{S/e}]^{\frac{1}{2}}\tag{6.2-21}$$

式中，相关角 $\theta_{S/e}$即为太阳-地球转角。弧长测量误差引起的姿态不确定性与转角的正弦成反比，转角反映测量几何——太阳矢量、天底矢量和自旋矢量之间的几何关系。因此，双弧长测量几何的奇点为

$$\boldsymbol{Z}\cdot(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E})=0\tag{6.2-22}$$

即三矢量共面的几何状况。

如仅有单弧长(θ_S 或 θ_e)和转角 λ 的测量，则姿态的不确定性为等弧长轨迹带和等转角轨迹带相交的四边形。参见图 6.2-13，太阳角轨迹 L_{θ_S}与转角轨迹 L_λ 的相关角为 $\theta_{S/\lambda}$，等于轨迹切线的夹角。令 Z' 为姿态自旋矢量 $\boldsymbol{Z}$ 沿 L_λ 轨迹移过一微量，相应地 L_{θ_S}轨迹在垂直方向移动 $\delta\theta_S$ 形成 $L_{\theta_S}+\delta\theta_S$轨迹，且 θ_S 弧与 θ_{Se}

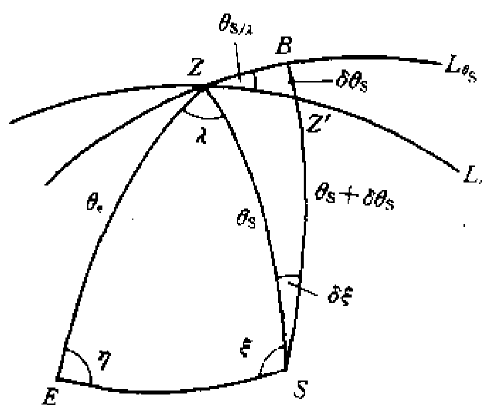


图 6.2-13

弧的夹角 ξ 变化 $\delta\xi$，直角三角形 ZBZ' 为微元三角形，有$\widehat{Z'B}=\delta\theta_S$。在另一微元球面直角三角 ZBS 中，根据正弦定理，有$\widehat{ZB}=\delta\xi\sin\theta_S$。因此，$L_{\theta_S}$和 L_λ 的相关角 $\theta_{s/\lambda}$的式为

$$\tan\theta_{S/\lambda}=\frac{\widehat{Z'B}}{\widehat{ZB}}=\frac{1}{\sin\theta_S}\left(\frac{d\theta_S}{d\xi}\right)_\lambda \tag{6.2-23}$$

式中 λ 为常值。从球面三角形 ZES 的三角式

$$\cot\theta_{Se}\sin\theta_S=\cot\lambda\sin\xi+\cos\theta_S\cos\xi$$

取 θ_S、ξ 的微分，并引用该球面三角的余弦公式

$$\cos\theta_e=\cos\theta_S\cos\theta_{Se}+\sin\theta_S\sin\theta_{Se}\cos\xi$$

$$\cos\eta=-\cos\lambda\cos\xi+\sin\lambda\sin\xi\cos\theta_S$$

可得导数

$$\frac{d\theta_S}{d\xi}=\frac{-\cos\eta\sin\theta_{Se}}{\cos\theta_e\sin\lambda}$$

代入式(6.2-23)，并引用球面三角的正弦公式

$$\sin\eta\sin\theta_{Se}=\sin\lambda\sin\theta_S$$

得相关角

$$\tan\theta_{S/\lambda}=\frac{-\cot\eta}{\cos\theta_e} \tag{6.2-24}$$

同理，可得轨迹 L_{θ_e} 与轨迹 L_λ 的相关角

$$\tan\theta_{e/\lambda}=\frac{-\cot\xi}{\cos\theta_S} \tag{6.2-25}$$

略去上两式的负号，对照测量几何三角形图 6.2-12，该式与球面直角三角形 NZE 和 NZS 的三角关系相符，有

$$\theta_{S/\lambda}=\angle NZE,\qquad \theta_{e/\lambda}=\angle NZS$$

因此，弧长和转角测量几何的奇点为

$$\boldsymbol{Z}\cdot(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{N})=0 \tag{6.2-26}$$

或

$$\boldsymbol{Z}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{N})=0 \tag{6.2-27}$$

即姿态 $\boldsymbol{Z}$ 与 $\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{N}$ 共面，或与 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{N}$ 共面（$\xi=90°$或 $\eta=90°$），天底角轨迹（或太阳角轨迹）与转角轨迹相切（$\theta_{e/\lambda}=0$ 或 $\theta_{s/\lambda}=0$），弧长测量与转角测量给出的姿态信息相同，无可利用的在轨迹垂直方向的姿态信息。仿照图 6.2-10 和式(6.2-21)太阳角弧长测量和转角测量组合的姿态不确定四边形的度量式为

$$\Delta L=\frac{1}{\sin\theta_{S/\lambda}}\left[\Delta\theta_S^2+\Delta\lambda^2\frac{\sin^2\theta_S\sin^2\theta_e}{\sin^2\theta_{Se}\sin^2\theta_N}+2\Delta\theta_S\Delta\lambda\frac{\sin\theta_S\sin\theta_e}{\sin\theta_{Se}\sin\theta_N}\cos\theta_{S/\lambda}\right]^{\frac{1}{2}}$$

天底角弧长测量和转角测量组成的姿态不确定与上式等同，仅需用 $\Delta\theta_e$ 和 $\theta_{e/\lambda}$ 替代 $\Delta\theta_S$ 和 $\theta_{S/\lambda}$。

双弧长 θ_S、θ_e 测量及转角 λ 测量，构成完整的自旋姿态确定的观测模型，综合了上述两种双测量模式的优点，相互排斥各自的缺陷。例如，测量几何奇点的范围大为改善，自旋轴 $\boldsymbol{Z}$ 与 $\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{E}$ 共面（式(6.2-22)），同时又与 $\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{N}$ 共面（式(6.2-26)）以及与 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{N}$ 共面（式(6.2-27)）的条件是

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}=\pm1 \tag{6.2-28}$$

即太阳与地心方向共线。这是奇点限制的极限，测量几何仅含一个有效的参考体，自旋姿态是不可观的。

总之，姿态确定的精度不仅与测量误差有关，而且与测量几何有密切关系，后者是姿态确定问题中的主要课题。因此，在给定的测量误差情况下，要确保获得较高的姿态确定精度，关键是选择良好的测量几何条件，避开劣等的几何条件，使卫星的先验姿态远离各类奇点。所谓测量几何，就是在天球上两个参考点和先验姿态点三者之间的相对位置。在工程问题中，测量几何的限制对发射窗口的安排起重要影响。因此，必须具体分析姿态确定精度与测量几何的关系，从而得出测量几何的限制范围，合理计划发射窗口和测控程序。

6.3 三轴姿态的参考测量

由于卫星主体在空间保持三轴稳定，可以较方便直接测量参考天体或参考目标在敏感器坐标系的方向，通过安装矩阵得出参考基准矢量在卫星本体坐标系的方向。与自旋卫星相比，敏感器测量值给出更为直接的姿态信息，在特定情况下，可直接用于姿态控制。基准矢量除参考天体——地球、太阳、恒星外，还可利用地球磁场和无线电信标等。

6.3.1 天底方向的测量

地球敏感器测量天底地心相对敏感器基准坐标的方向。地球敏感器的形式有多种，基本原理是利用地球边缘区内红外热辐射值的陡变，获得地球地平的信息，经过进一步的技术处理获得地心垂线的方向。因此，通常简称为红外地平仪。

圆锥扫描红外地平仪　仪器的光学场为窄视场（1°～1.5°），地球辐射通过反射镜、透镜等进入敏感器件。反射镜光轴与仪器的机械转轴（扫描轴）相夹扫描角，扫描电机带动反射镜绕扫描轴旋转，反射镜光轴以圆锥形式扫描空间。扫描圆锥与地球表面的交线为红外地平仪扫描地球的路径，在地球边缘的交点为光轴的扫入点和扫出点。几何关系与自旋卫星的地球测姿方式等同，见图 6.3-1。

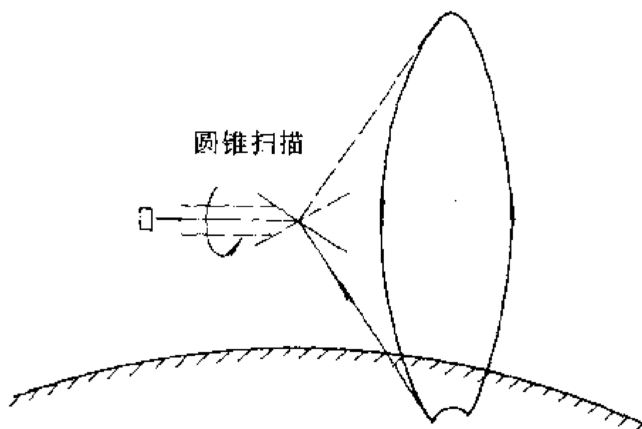


图 6.3-1

在地平仪扫描轴与基座之间，在相对位置上分别各装有磁基准，每转一圈，磁基准相遇一次，触发一基准脉冲。定义红外地平仪的基准测量坐标为 $ox_h y_h z_h$，x_h 轴沿扫描轴，z_h 轴与扫描轴垂直并通过地平仪基座的磁基准，y_h 轴成右手正交。在扫描周期内，地平仪输出三个脉冲——扫入、扫出地平脉冲和磁基准脉冲。如磁基准脉冲位于扫入和扫出地平脉冲之间，并与两

者的时间间隔相等，则基座磁基准位于扫描轴与地心垂线组成的平面上。因此，磁基准脉冲与两个地平脉冲时间间隔之差，正比于地心垂线在 $x_h z_h$ 平面上投影与 z_h 轴的夹角，夹角 α 为

$$\alpha = \omega_c\left[t_m - \frac{1}{2}(t_i + t_o)\right]$$

式中，ω_c 为扫描转速，t_m 为磁基准脉冲时，t_i、t_o 为扫入、扫出地平脉冲时。再利用 t_i，t_o 得出的扫描弦宽角 $\mu=\omega_c(t_o-t_i)$，以及轨道高度数据 h，仿照式(6.1-6)，从下式求得地心垂线与 x_h 轴相夹的余角 β：

$$\cos\gamma\sin\beta - \sin\gamma\cos\beta\cos\frac{\mu}{2} = \cos\left[\arcsin\left(\frac{R_e}{R_e + h}\right)\right]$$

γ 是扫描光轴与扫描轴的夹角。由于地球为圆球形对称，地平仪对绕地心垂线的转动是不可观的，上述测角方式与欧拉 3-2-1 转动顺序相等，地心方向在地平仪坐标的方向为

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \tag{6.3-1}$$

若卫星对地定向的姿态偏差较小，如地平仪扫描轴与俯仰轴平行，则测量 α 为俯仰角，β 为滚动角；如扫描轴与滚动轴平行，则测量 α 为滚动角，β 为俯仰角。扫描角 γ 的选择原则是：在给定卫星轨道高度上，在扫描轴垂直轨道平面的状态，扫描弦宽相对天底角的导数达最大。

摆动扫描红外地平仪　　在此地平仪内有两套光学系统和探测元件组成的探测器，光学系统的视场约为 1.5°×1.5°。它把地球的红外辐射成像在探测元件上，随着光学系统内某块镜片的摆动，探测器的视场在空间往返直线扫描。地平仪的基准坐标为 $ox_h y_h z_h$，各坐标轴分别和星体的滚动、俯仰、偏航轴平行。z_h 轴称为地平仪的瞄准轴，它和视场扫描线上的零位一致。由于卫星远离地球，在测量地球方位的几何关系中，可以认为此瞄准轴与星体的偏航轴一致。

在静止轨道上，当卫星的偏航轴指向地心时，地球在地平仪的基准平面 $x_h y_h$ 上形成一个圆盘，瞄准轴 z_h 通过圆盘的中心 o，圆盘的直径(以角度为单位)$2R=17.46°$，这时两套光学系统视场的扫描线在 a,b,c,d 四点处扫出或扫入地球边缘，如图 6.3-2 所示。地平仪的直接测量值是扫描零点和地平穿越点之间的弦长，即穿越点 a,b,c,d 在 x_h 轴上的坐标。由于卫星处在赤道平面内，γ 角就是扫描线的纬度，此两条扫描线的纬度相同，所以 a,b,c,d 四点是对称的。

当卫星姿态发生俯仰和滚动时，地平仪的瞄准轴偏离地心时，地球圆盘的中心在坐标平面 $x_h y_h$ 内移到 o' 点(图 6.3-2)，坐标是$(-\theta,-\varphi)$，偏离的距离 θ，φ(以角度为单位)就是卫星的俯仰角和滚动角。这时探测器视场的光轴在 a',b',c',d' 点穿越地平，在地平仪坐标中，这些穿越点所在圆的方程是

$$(x_h + \theta)^2 + (y_h + \varphi)^2 = R^2$$

令 $e=R\sin\gamma$，这些穿越点的横坐标分别为

$$\begin{aligned}
x_a &= x_b = -\sqrt{R^2 - e^2} \\
x_c &= x_d = -x_a \\
x'_a &= -\theta - \sqrt{R^2 - (e + \varphi)^2} \\
x'_b &= -\theta - \sqrt{R^2 - (-e + \varphi)^2} \\
x'_c &= -\theta + \sqrt{R^2 - (e + \varphi)^2}
\end{aligned}$$

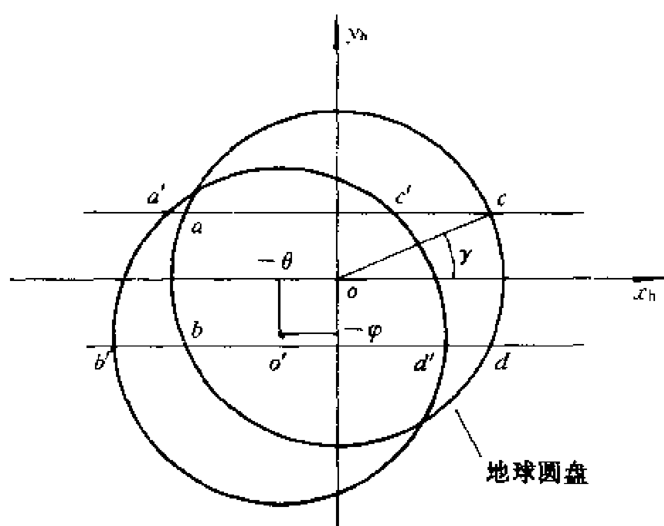


图 6.3-2

$$x_d' = -\theta + \sqrt{R^2 - (-e+\varphi)^2}$$

将地平仪测量的弦宽值(包括往返)组合起来,便得到地平仪的输出与俯仰角和滚动角成正比的关系:

$$f(\theta) = -2(x_a' + x_c') = -2(x_b' + x_d') = 4\theta$$

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= -2(x_b' - x_a') = -2(x_d' - x_c') \\ &= 2\left[\sqrt{R^2-(-e+\varphi)^2} - \sqrt{R^2-(e+\varphi)^2}\right] \\ &\approx \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0} \times \varphi = \frac{4\sin\gamma}{\sqrt{1-\sin^2\gamma}}\varphi \end{aligned}$$

若扫描纬度为45°,则$f(\varphi)=4\varphi$。因此,当卫星偏航轴靠近地心方向时,两轴地平仪可以直接测出卫星在轨道坐标系中的俯仰角和滚动角,两者之间没有耦合关系,俯仰角的测量值是线性的,滚动角的测量值在小角度的情况下也是线性的。当卫星仅绕轨道偏航轴转动时,地平仪接收到的地球红外辐射信息没有任何变化,因此,偏航角不可观。

6.3.2 太阳方向的测量

太阳敏感器测量太阳相对于敏感器的方位,它在星上的安装方式和星体坐标之间的关系是根据姿态测量的要求而定。太阳敏感器的基准坐标为$ox_S y_S z_S$,敏感器的瞄准轴和z_S轴一致,在与z_S轴垂直的平面上,有一条狭缝平行于x_S轴或y_S轴。图6.3-3表示两个太阳敏感器的测角原理,其中一个敏感器的狭缝与x_S轴平行,另一个敏感器的狭缝与y_S轴平行。照射敏感器的太阳光是一束平行于太阳视线oS的平行光,光线通过狭缝后再经过内部光学玻璃折射,在敏感器的底部分别形成两条明线l_x, l_y,它们偏离基准线的距离分别是d_x, d_y,利用底部的码盘可将此值读出。因此,d_x(或d_y)是单个敏感器的直接测量值,与狭缝平行的x_S轴或y_S轴称为该敏感器的测量轴。

太阳线条偏离的距离与太阳视线方向的角度关系可根据图6.3-3导出。令太阳视线在敏感器坐标内的方位角和余仰角为α, δ,太阳视线经过折射后落到o'点,根据光学折射定理,有

$$\sin\delta = n\sin\delta'$$
$$\alpha = \alpha'$$

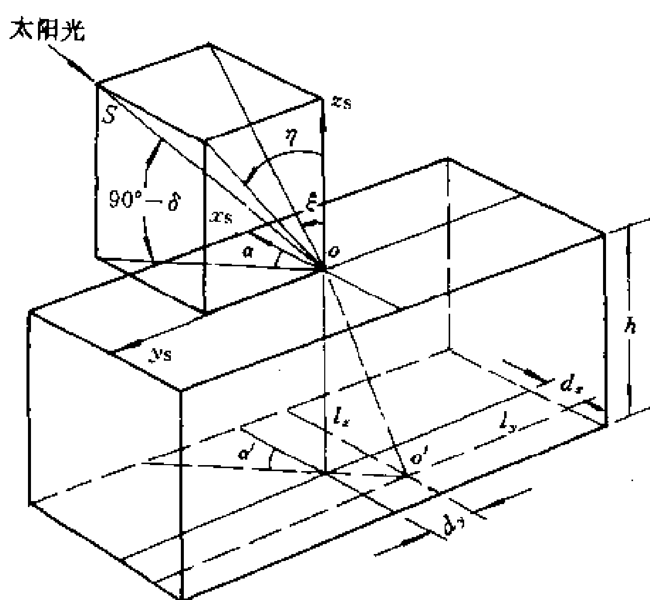


图 6.3-3

n 为折射系数。在图 6.3-3 的几何关系中,折射角 δ' 的正切为

$$\tan\delta' = \frac{1}{h}(d_x^2 + d_y^2)^{\frac{1}{2}}$$

从以上三式可导出太阳矢量的方位角和仰角与测量值的关系:

$$\left.\begin{aligned}\tan\delta &= \frac{n(d_x^2 + d_y^2)^{\frac{1}{2}}}{[h^2 - (n^2 - 1)(d_x^2 + d_y^2)]^{\frac{1}{2}}}\\ \tan\alpha &= \frac{d_y}{d_x}\end{aligned}\right\} \tag{6.3-2}$$

太阳矢量在敏感器基准坐标的方向余弦为

$$\left.\begin{aligned}S_x &= \sin\delta\cos\alpha\\ S_y &= \sin\delta\sin\alpha\\ S_z &= \cos\delta\end{aligned}\right\} \tag{6.3-3}$$

令太阳矢量在基准 $x_S z_S$ 平面上的投影与 z_S 轴的夹角为 ξ,在 $y_S z_S$ 平面上的投影与 z_S 轴的夹角为 η,这些太阳矢量投影的夹角与方位角、余仰角的关系是

$$\left.\begin{aligned}\tan\xi &= \frac{S_x}{S_z} = \tan\delta\cos\alpha\\ \tan\eta &= \frac{S_y}{S_z} = \tan\delta\sin\alpha\end{aligned}\right\} \tag{6.3-4}$$

将式(6.3-2)代入式(6.3-4),当 $\frac{d_x}{h},\frac{d_y}{h} \ll 1$ 时,测角公式可以简化为

$$\tan\xi = \frac{nd_x}{[h^2 - (n^2 - 1)(d_x^2 + d_y^2)]^{\frac{1}{2}}} \approx n\frac{d_x}{h}$$

$$\tan\eta = \frac{nd_y}{[h^2-(n^2-1)(d_x^2+d_y^2)]^{\frac{1}{2}}} \approx n\frac{d_y}{h}$$

因此，太阳敏感器的测量值不是太阳矢量的方位角和仰角，而是太阳矢量在基准面——$x_S z_S$平面或$y_S z_S$平面上的投影与瞄准轴z_S之间的夹角的正切。以m_x，m_y表示测量值（正比于d_x，d_y），参照式(6.3-4)，可列出测量式

$$m_x = \frac{S_x}{S_z}, \qquad m_y = \frac{S_y}{S_z} \tag{6.3-5}$$

m_x为平行于y_S轴狭缝的测量值，m_y为平行于x_S轴狭缝的测量值。太阳敏感器的测量又可描述为：太阳矢量在敏感器测量轴垂直方向的方向余弦与在瞄准轴方向的方向余弦之比值。因$S_x^2+S_y^2+S_z^2=1$，由式(6.3-5)，(6.3-3)，可得由测量值描述的太阳在敏感器坐标的方向为

$$(\boldsymbol{S})_S = \frac{1}{\sqrt{m_x^2+m_y^2+1}}\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.3-6}$$

再由敏感器的安装矩阵$\boldsymbol{M}$得太阳矢量在星体坐标的观测量为$(\boldsymbol{S})_b=\boldsymbol{M}^T(\boldsymbol{S})_S$。由观测几何，太阳在轨道坐标的参考矢量$(\boldsymbol{S})_o$，可由轨道参数和太阳年历导出，有$(\boldsymbol{S})_o=\boldsymbol{R}_{oi}(\boldsymbol{S})_i$。由此，太阳敏感器提供的姿态测量矢量观测方程可列为

$$(\boldsymbol{S})_S = \boldsymbol{MA}(\boldsymbol{S})_o$$

$\boldsymbol{A}$为姿态相对轨道坐标的姿态矩阵。引用姿态对地定向的小偏差矩阵，太阳在本体坐标的矢量可写为

$$(\boldsymbol{S})_b = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{S})_o = \begin{bmatrix} S_x^o & +\psi S_y^o & -\theta S_z^o \\ -\psi S_x^o & +S_y^o & +\varphi S_z^o \\ \theta S_x^o & -\varphi S_y^o & +S_z^o \end{bmatrix} \tag{6.3-7}$$

矩阵中S_x^o，S_y^o，S_z^o为$(S)_o$的方向余弦。

分析敏感器的测量几何，为获得最佳的测量灵敏度，太阳敏感器的测量轴应与被测姿态的转轴平行，即测量俯仰角的敏感器的瞄准轴和测量轴分别平行于星体的偏航轴和俯仰轴，见图6.3-4的①；测量滚动角的敏感器的瞄准轴和测量轴分别平行于星体偏航轴和滚动轴，见图6.3-4的②；测量偏航角的敏感器的瞄准轴和测量轴分别平行于星体滚动轴和偏航轴，见图6.3-4的③。参照式(6.3-5)，(6.3-7)三种安装形式的测量模型的观测方程分别为

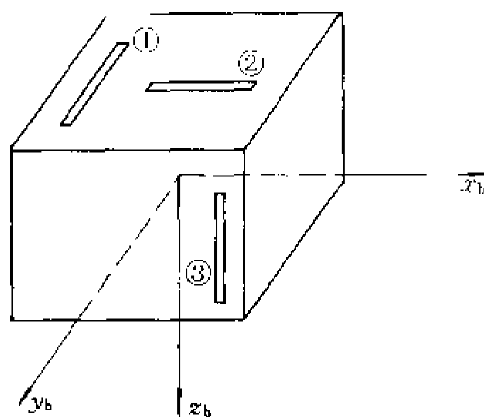


图　6.3-4

$$\left.\begin{aligned} m_\theta &= \frac{S_x^o+\psi S_y^o-\theta S_z^o}{\theta S_x^o-\varphi S_y^o+S_z^o} \\ m_\varphi &= \frac{-\psi S_x^o+S_y^o+\varphi S_z^o}{\theta S_x^o-\varphi S_y^o+S_z^o} \\ m_\psi &= \frac{S_x^o+\psi S_y^o-\theta S_z^o}{-\psi S_x^o+S_y^o+\varphi S_z^o} \end{aligned}\right\} \tag{6.3-8}$$

m_θ，m_φ，m_ψ为太阳敏感器①、②、③的测量值。

6.3.3 星光方向的测量

安装在三轴稳定卫星上的星敏感器由筒镜光学系统和CCD面阵光敏元器件组成。来自星光的平行光经过光学系统，在CCD面阵上聚焦成像圈，散布在(4×4)元素面积上，按能量中心法确定星像的中心位置。定义敏感器坐标为$ox_p y_p z_p$，z_p轴沿中心光轴，x_p，y_p沿CCD面阵的正交基准，见图6.3-5。星像的中心位置P_x，P_y可由下式确定：

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \frac{\sum x_{ij}R_{ij}}{\sum R_{ij}} \\ P_y &= \frac{\sum y_{ij}R_{ij}}{\sum R_{ij}} \end{aligned}\right\} \tag{6.3-9}$$

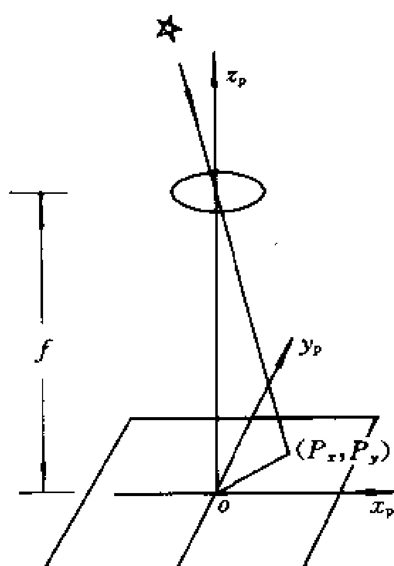


图 6.3-5

式中，R_{ij}为CCD元素(i,j)敏感的辐射强度；x_{ij}，y_{ij}为CCD元素(i,j)沿x_p轴和y_p轴的坐标。中心位置的精度可达角秒。令光学系统的焦距为f，根据聚焦几何关系，由星光像元在敏感器平面坐标的测量值P_x，P_y，可得星光矢量$\boldsymbol{C}$在敏感器坐标的方向为

$$(\boldsymbol{C})_p = \frac{1}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + f^2}}\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ f \end{bmatrix} \tag{6.3-10}$$

再由敏感器的安装矩阵$\boldsymbol{M}$得星光矢量在星体坐标系的观测量为$(\boldsymbol{C})_b=\boldsymbol{M}^T(\boldsymbol{C})_p$。由观测几何，恒星在星体坐标的观测方程为

$$(\boldsymbol{C})_b = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{C})_i$$

式中，$(\boldsymbol{C})_i$为星光在赤道惯性坐标的方向，由星历表的赤经、赤纬给出；$\boldsymbol{A}$为星体相对赤道惯性坐标的姿态矩阵。

如令星光像元坐标为直接观测量，且敏感器坐标与本体坐标平行$(M=I)$，则星光测量提供姿态确定用的观测方程为

$$\left.\begin{aligned}P_x &= f\cdot\frac{A_{xx}C_x + A_{xy}C_y + A_{xz}C_z}{A_{zx}C_x + A_{zy}C_y + A_{zz}C_z}\\ P_y &= f\cdot\frac{A_{yx}C_x + A_{yy}C_y + A_{yz}C_z}{A_{zx}C_x + A_{zy}C_y + A_{zz}C_z}\end{aligned}\right\}\tag{6.3-11}$$

式中，A_{xx}，…分别为卫星相对赤道惯性坐标的姿态矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素；C_x，C_y，C_z 为星光矢量$(\boldsymbol{C})_i$ 的方向余弦。分式为星光沿 x_p 轴和 y_p 轴张角的正切。

星光识别是一项专门技术，本节从略。

6.3.4 地磁场方向的测量

沿星体三轴正交安装的三只磁强计分别测量当地地磁场的磁感应强度在该方向的分量(B_x,B_y,B_z)，得出星体坐标的磁场观测矢量$(\boldsymbol{B})_b$。引用地磁场模型$(\boldsymbol{B})_e$(见式(5.8-6))和轨道参数，可得轨道坐标的磁场参考矢量$(\boldsymbol{B})_o=\boldsymbol{R}_{oe}(\boldsymbol{B})_e$，其中 $\boldsymbol{R}_{oe}$ 为地球坐标与轨道坐标的转换矩阵。姿态确定用的磁场矢量观测方程可列为

$$(\boldsymbol{B})_b = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_{oe}(\boldsymbol{B})_e$$

式中，$\boldsymbol{A}$ 为相对轨道坐标的姿态矩阵。

利用磁强计可直接测得偏航角，如星上红外地平敏感器已测得俯仰角 θ、滚动角 φ，则在轨道坐标系的当地地平坐标面 $x_o y_o$ 上，磁场强度 B_{xm}，B_{ym} 可由测量值换算得出

$$B_{xm} = B_x\cos\theta + B_z\sin\theta$$

$$B_{ym} = B_x\sin\varphi\sin\theta + B_y\cos\varphi - B_z\sin\varphi\cos\theta$$

由轨道参数可得卫星实时位置的经、纬度，再引用地磁场模型得出磁场在当地地平面沿东向和南向的磁场分量 B_E，B_S。因此，在轨道地平坐标面 $x_o y_o$ 上，磁场参考矢量 B_x^o，B_y^o 可列为

$$B_x^o = B_E\cos\gamma - B_S\sin\gamma$$

$$B_y^o = B_E\sin\gamma + B_S\cos\gamma$$

式中 γ 为轨道坐标轴 $\boldsymbol{x}_o$ 与当地东向 $\boldsymbol{x}_E$ 的夹角，有

$$\gamma = \arccos(\boldsymbol{x}_o\cdot\boldsymbol{x}_E)$$

$$\boldsymbol{x}_o = \frac{(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}||\boldsymbol{r}|}$$

$$\boldsymbol{x}_E = \begin{bmatrix}-\sin(G+\lambda)\\ \cos(G+\lambda)\\ 0\end{bmatrix}$$

式中 λ 为卫星的经度，上述矢量 $\boldsymbol{x}_o$，$\boldsymbol{x}_E$ 均被描述在赤道惯性坐标中。比较在轨道地平坐标面上磁场参考矢量$(\boldsymbol{B}_x^o,\boldsymbol{B}_y^o)$与磁场观测矢量$(B_{xm},B_{ym})$，两者的夹角即为姿态偏航角，有

$$\psi = \arctan\frac{B_y^o B_{xm} - B_x^o B_{ym}}{B_x^o B_{xm} + B_y^o B_{ym}}$$

6.3.5 无线电信标方向的测量

除上述的天然参考目标外，还可利用人造目标作为卫星姿态测定的参考基准。卫星天线系统接收地面站或导航卫星发射的电波，并测得该信标波束相对卫星天线坐标的方向。如已知地面站或导航卫星的精确位置，则信标矢量和太阳、地球矢量一样也是卫星姿态确定所需的姿态

信息。此类天线系统可统称为信标敏感器。

以导航卫星作为参考基准为例。在用户卫星上沿某根基线 $\boldsymbol{b}$ 的两端备有两个天线接收机，同时接收来自某导航卫星发射的电波，见图 6.3-6。根据单脉冲比相的原理，测得两个天线接收信号的相位差。当信标波束与基线平行时，相位差最大；当信标波束与基线垂直时，相位差为零。令相位差为 ν，有测量方程

$$\nu = \frac{2\pi}{\lambda} b \cos \alpha$$

式中，λ 为电波的波长，b 为基线的长度，α 为波束与基线的夹角，见图 6.3-6。在测量过程中，上述相位差应包含信标周期的某一整数倍和单个周期内的相位差。关于周期整数倍的测量是 θ 项专门问题。

如令导航卫星参考矢量为 $\boldsymbol{RF}$，则该参考矢量与基线 $\boldsymbol{b}$ 的方向余弦为

$$\left(\boldsymbol{RF} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{b}\right) = \frac{\lambda}{2\pi b}\nu$$

在卫星上配置两根正交的基线 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$，组成天线测量坐标系 $ox_a y_a z_a$。见图 6.3-7，沿基线 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 的是 x_a 轴和 y_a 轴，有三个天线 A_1,A_2,A_3 安置在基线的顶端，同时接收某导航卫星的电波，A_1,A_3 天线测得该波束沿基线 $\boldsymbol{b}_1$ 的相位差 ν_1，A_2,A_3 天线测得同一波束沿基线 $\boldsymbol{b}_2$ 的相位差 ν_2。由此，可得该导航卫星在用户卫星天线坐标系的观测矢量 $(\boldsymbol{RF})_a$：

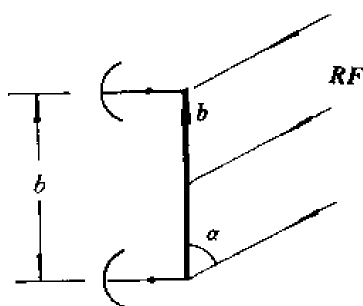


图 6.3-6

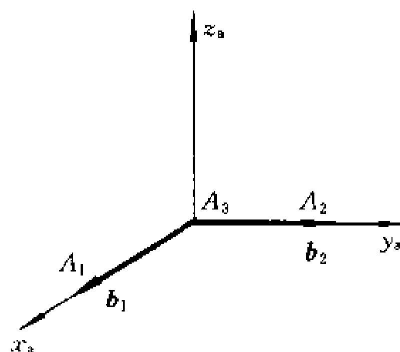


图 6.3-7

$$(\boldsymbol{RF})_a = \frac{\lambda}{2\pi b}\begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \left[\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)^2 - (\nu_1^2 + \nu_2^2)\right]^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

由于各导航卫星的电波基频不同，上述配置的三个天线可同时测量来自不同导航星电波在基线两端的相位差，即可同时获得若干导航卫星的观测矢量，组成姿态确定的多矢量观测，其观测方程为

$$(\boldsymbol{RF})_a = \boldsymbol{MA}(\boldsymbol{RF})_i$$

式中，$\boldsymbol{M}$ 为天线坐标系的安装矩阵，$\boldsymbol{A}$ 为相对赤道惯性坐标的姿态矩阵，$(\boldsymbol{RF})_i$ 为已知的导航卫星在赤道惯性坐标的星历矢量。如令沿基线的相位差作为观测量，天线坐标与星体坐标并行，则姿态确定的观测方程可列为

$$\nu_1 = \frac{2\pi}{\lambda} b[A_{xx}(\boldsymbol{RF})_x + A_{xy}(\boldsymbol{RF})_y + A_{xz}(\boldsymbol{RF})_z]$$

$$\nu_2 = \frac{2\pi}{\lambda} b[A_{yx}(\boldsymbol{RF})_x + A_{yy}(\boldsymbol{RF})_y + A_{yz}(\boldsymbol{RF})_z]$$

$(\boldsymbol{RF})_x$,…分别为导航星星历矢量$(\boldsymbol{RF})_i$的方向余弦。

6.3.6 惯性参考方向的测量

上述各种敏感器都是测量外部参考目标相对于星体的方位,而获得星体在参考坐标系中的姿态信息。也可以在星体内部建立基准,测量星体相对于此参考基准的姿态变化。储存在高速旋转的陀螺转子中的角动量可以作为一种参考矢量,因为在理想情况下,角动量在惯性空间是定向的。如有一个两自由度陀螺,它的内外框架轴安装在星体滚动轴和偏航轴方向上,如在轨道上,将此陀螺转子的角动量设置在轨道法线方向上,则陀螺内外框架上的传感器可直接测得星体的滚动角和偏航角。但陀螺内部的各种干扰力矩使陀螺转子角动量的方向不断地漂移,长时间后它将失去参考基准的作用。根据陀螺转子角动量方向在轨道坐标系中周期性交变的特性,比较滚动红外地球敏感器与陀螺敏感器测得的滚动角,将其差值反馈作用到陀螺受感器上,可以修正陀螺转子的漂移,使陀螺转子角动量的方向保持与轨道法线平行。具有这种功能的陀螺系统称为轨道陀螺罗盘,测量轨道法线参考矢量在星体坐标的方向。同理,可用两个单自由度速率陀螺组成陀螺罗盘系统,测量轨道角速率矢量在星体坐体系的方向,陀螺罗盘的输出即为卫星姿态相对轨道坐标的滚动角和偏航角。见图 6.3-8,单自由度速率陀螺由内含陀螺转子的浮筒和支撑浮筒转动的框架组成。陀螺转子轴垂直于浮筒转轴,两者的正交轴为陀螺敏

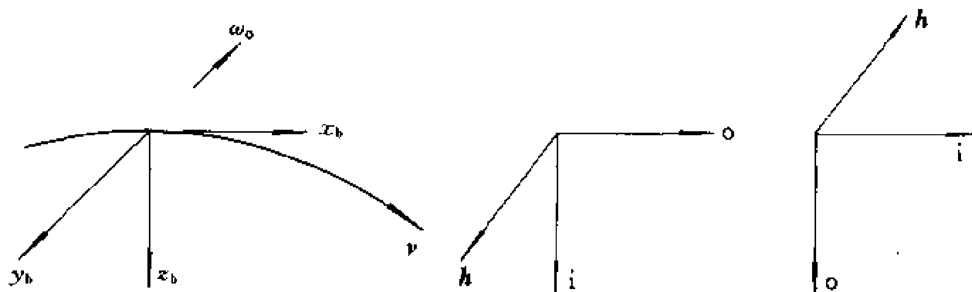


图 6.3-8

感的输入轴(以 i 表示),浮筒转轴为陀螺测量的输出轴(以 o 表示)。陀螺的测量方程为

$$J\ddot{\beta} + C\dot{\beta} + k\beta = h\omega + M$$

左端为陀螺浮筒的转动力矩项:β 为浮筒转角;J 为浮筒惯量;$k\beta$ 为框架上电磁力矩器产生的反馈作用力矩,与浮筒转角成正比。右端 $h\omega$ 为陀螺力矩,h 为陀螺转子的角动量,ω 为卫星本体转速沿陀螺输入轴的分量;M 为陀螺内部的干扰力矩。略去动态过程,陀螺的测速和测角模型为

$$k\beta = h\omega + M$$

$$\theta_g = \frac{1}{h}\int k\beta \mathrm{d}t = \theta + \int d \cdot \mathrm{d}t$$

θ_g 为陀螺测角值,正比于浮筒力矩器力矩的积分,等于卫星姿态转角 θ 与陀螺漂移 $d(d=M/h)$的积分之和。参见图 6.3-9,令卫星对地定向的三轴姿态处于小偏差状态。令两只陀螺的角

动量轴都平行于星体俯仰轴：一只陀螺的输入轴平行于星体偏航轴，称为偏航陀螺；另一只平

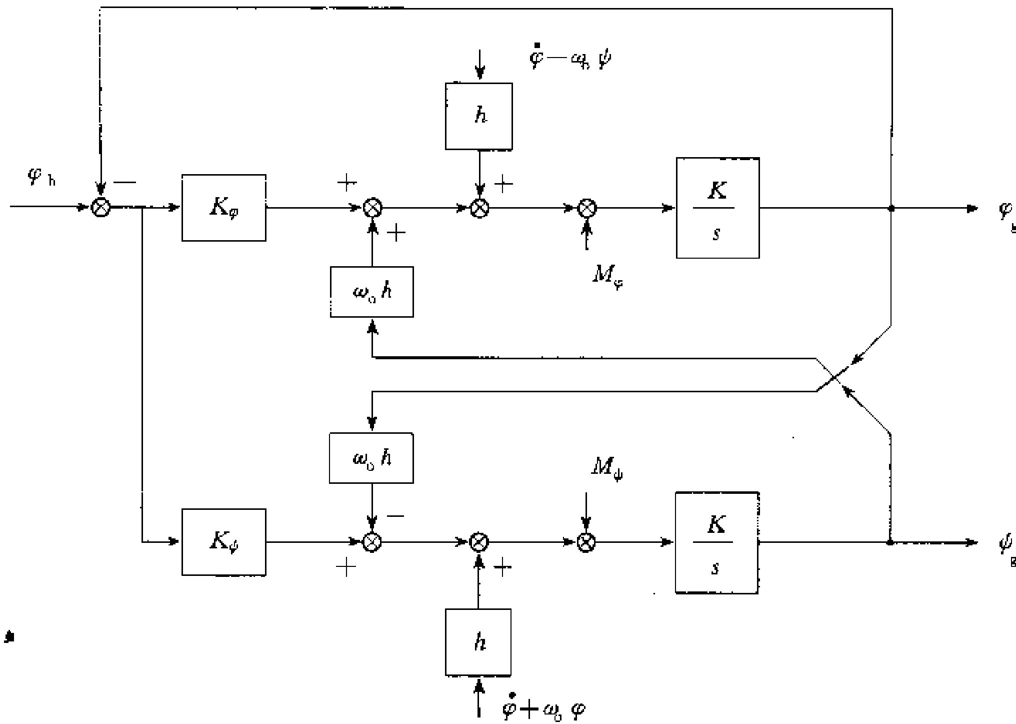


图 6.3-9

行于滚动轴，称为滚动陀螺。陀螺测量是卫星相对惯性空间的转速在星体坐标的各分量，它等于星体相对轨道坐标的转速与轨道坐标转速之和。在小姿态情况下，

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}+A(\varphi,\theta,\psi)\begin{bmatrix}0\\ -\omega_0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\varphi}-\omega_0\psi\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}+\omega_0\varphi\end{bmatrix}$$

式中 ω_x，ω_z 即为陀螺测量的输入。参见图 6.3-9，将滚动陀螺的积分输出 φ_g 反馈，与参考基准滚动测量值 φ_h（红外地球敏感器的测量）相比，通过增益 k_φ，k_ψ 分别输给两只陀螺浮筒的力矩器。同时，两只陀螺的积分输出又交叉反馈叠加到浮筒力矩器，组成陀螺罗盘系统。略去罗盘系统的动态分析，在静态状况，有平衡等式

$$-\varphi_g+\varphi_h=0$$

$$\omega_0 h\psi_g+h(-\omega_0\psi)+M_\varphi=0$$

和测角误差

$$\Delta\varphi=\varphi_g-\varphi=\varphi_h-\varphi=\Delta\varphi_h$$

$$\Delta\psi=\psi_g-\psi=\frac{-M_\varphi}{\omega_0 h}=-\frac{d_\varphi}{\omega_0}$$

式中 d_φ 为滚动陀螺的漂移。由此，陀螺罗盘系统的滚动角测量的静态系统误差即为滚动红外地球敏感器的系统误差；偏航角测量的静态系统误差仅决定于滚动陀螺的漂移，与系统参数无关，这是轨道陀螺罗盘的根本特点。

6.4　三轴姿态的代数法确定

描述卫星姿态的最一般模式是姿态矩阵，它是星体坐标与定义姿态的参考坐标之间的转移矩阵。代数法确定姿态的基本思想是：根据参考目标的矢量测量，比较同一参考矢量在两个坐标中的方向，求解观测方程，得出姿态矩阵。

6.4.1　双矢量确定姿态及精度估计

已知在参考坐标系中有两个互不平行的参考矢量 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2$，它们在星体坐标中被测得的是 $\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2$，称为观测矢量。现求姿态矩阵(正交矩阵)$\boldsymbol{A}$ 的满足条件：

$$\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1,\qquad \boldsymbol{U}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_2 \tag{6.4-1}$$

利用参考基准矢量的不平行性，即 $\boldsymbol{V}_1\times\boldsymbol{V}_2\neq 0$，在参考坐标系中建立新的正交坐标系 $\boldsymbol{R}$，各坐标轴的单位矢量是

$$\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{V}_1,\qquad \boldsymbol{R}_2=\frac{\boldsymbol{V}_1\times\boldsymbol{V}_2}{\|\boldsymbol{V}_1\times\boldsymbol{V}_2\|},\qquad \boldsymbol{R}_3=\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2 \tag{6.4-2}$$

同样，在星体坐标中建立一个正交坐标系 S，各坐标轴的单位矢量是

$$\boldsymbol{S}_1=\boldsymbol{U}_1,\qquad \boldsymbol{S}_2=\frac{\boldsymbol{U}_1\times\boldsymbol{U}_2}{\|\boldsymbol{U}_1\times\boldsymbol{U}_2\|},\qquad \boldsymbol{S}_3=\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2 \tag{6.4-3}$$

因此，下面的两个 3×3 矩阵：

$$\boldsymbol{M}_R=[\boldsymbol{R}_1\ \boldsymbol{R}_2\ \boldsymbol{R}_3]$$

和

$$\boldsymbol{M}_S=[\boldsymbol{S}_1\ \boldsymbol{S}_2\ \boldsymbol{S}_3]$$

是 R 和 S 坐标系分别在参考坐标系和星体坐标中的方向余弦阵。根据式(6.4-1)，(6.4-2)和(6.4-3)，显然有 $\boldsymbol{S}_i=\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_i(i=1,2,3)$，以及

$$\boldsymbol{M}_S=\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}_R$$

R,S 两个坐标系之间的转移矩阵也是 $\boldsymbol{A}$，而 $\boldsymbol{M}_R$ 是已知的，$\boldsymbol{M}_S$ 是被测得的，因此姿态矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}_S\boldsymbol{M}_R^{-1}=\boldsymbol{M}_S\boldsymbol{M}_R^{\mathrm{T}} \tag{6.4-4}$$

这里没有对参考矢量提出任何限制，只要求矩阵 $\boldsymbol{M}_R$ 可逆，参考矢量的不平行性保证这个条件得到满足。顺便指出，规定两个观测矢量需要四个测量角，而姿态矩阵仅用三个独立角表示，这种代数法含蓄地丢失某种信息，被丢掉的信息是两个矢量的平行分量，这个值与坐标无关。

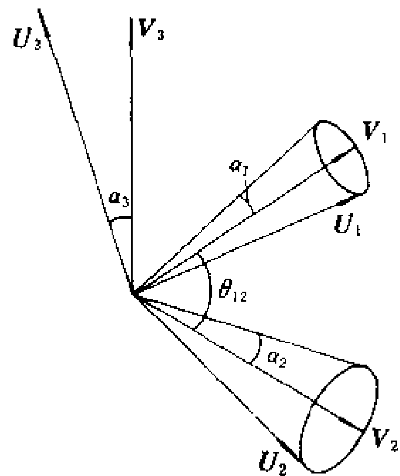


图　6.4-1

下面粗略地分析双矢量定姿的精度估计。已知单位参考矢量 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2$ 的观测矢量为 $\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2$，但由于有测量误差，观测矢量 $\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2$ 分别在以 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2$ 为轴的锥面上，锥角为 α_1,α_2，如图 6.4-1 所示。令单位矢量 $\boldsymbol{V}_3,\boldsymbol{U}_3$ 分别垂直于 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2$ 和 $\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2$，因此 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2,\boldsymbol{V}_3$ 组成一个固连于参考坐标系的非正交坐标系，同样，$\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2,\boldsymbol{U}_3$ 组成固连于星体的非正交坐标系。分析这两个坐标系之间的相对

转移，就可以说明由于测量误差引起的姿态确定误差。为了简便，用绕欧拉轴的转角 Φ 表示这两个坐标之间的相对位移，在 5.2-3 节中计算全转角 Φ 的方法也适用于非正交坐标系，即

$$\sin^2\frac{\Phi}{2}=\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha_1}{2}+\sin^2\frac{\alpha_2}{2}+\sin^2\frac{\alpha_3}{2}\right) \tag{6.4-5}$$

令 θ_{12} 为两个参考矢量之间的夹角，当测量误差 α_1,α_2 较小时，有

$$\|\boldsymbol{V}_1\times\boldsymbol{V}_2\|\approx\|\boldsymbol{U}_1\times\boldsymbol{U}_2\|\approx\sin\theta_{12}$$

$$\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{U}_2\approx\boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{U}_1\approx\cos\theta_{12}$$

利用这些近似式，参见图 6.4-1，可以导出矢量 $\boldsymbol{V}_3$ 和 $\boldsymbol{U}_3$ 之间的角度关系：

$$\begin{aligned}\cos\alpha_3&=\boldsymbol{V}_3\cdot\boldsymbol{U}_3=\frac{\boldsymbol{V}_1\times\boldsymbol{V}_2}{\sin\theta_{12}}\cdot\frac{\boldsymbol{U}_1\times\boldsymbol{U}_2}{\sin\theta_{12}}\\&=\frac{1}{\sin^2\theta_{12}}[(\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{U}_1)(\boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{U}_2)-(\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{U}_2)(\boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{U}_1)]\\&=\frac{1}{\sin^2\theta_{12}}(\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\cos^2\theta_{12})\end{aligned}$$

将上式进行恒等变换，可得

$$\sin^2\frac{\alpha_3}{2}=\frac{1}{\sin^2\theta_{12}}\left(\sin^2\frac{\alpha_1}{2}+\sin^2\frac{\alpha_2}{2}\right)$$

代入式(6.4-5)，欧拉转角的正弦是

$$\sin^2\frac{\Phi}{2}=\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha_1}{2}+\sin^2\frac{\alpha_2}{2}\right)(1+\csc^2\theta_{12})$$

它的近似式是

$$\Phi^2\approx\frac{1}{2}(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(1+\csc^2\theta_{12}) \tag{6.4-6}$$

欧拉转角 Φ 表示了参考矢量的测量误差引起的姿态确定误差，它有两项，其中一项直接反映了测量误差，另一项与参考矢量之间的几何关系有关。当两个参考矢量正交时，确定误差最小，夹角越小或越大(大于 90°)，姿态确定误差越大。在图 6.4-1 上，$\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2$ 可以处在 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2$ 锥面上任何一个位置，当 θ_{12} 角较小时，$\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2$ 的外积矢量 $\boldsymbol{U}_3$ 和 $\boldsymbol{V}_3$ 的夹角可以很大；当 θ_{12} 角较大时，$\boldsymbol{U}_3$ 主要决定于 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2$ 的方向。这就是所谓基线越长精度越高的道理。

6.4.2 多矢量确定姿态

在实际工程中可利用多参考矢量，在对地观测的卫星图像上，有许多显著的陆标像素，在星敏感器的 CCD 面阵上，有若干星光像元，这些参考矢量都参与姿态确定。定义参考矢量阵(3×N)为 $V=(\boldsymbol{V}_1\ \boldsymbol{V}_2\cdots\boldsymbol{V}_N)$，观测矢量阵(3×N)为 $U=(\boldsymbol{U}_1\ \boldsymbol{U}_2\cdots\boldsymbol{U}_N)$，多矢量的观测方程可写为

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{AV}$$

或写为

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{BU} \tag{6.4-7}$$

$\boldsymbol{A}$ 为姿态矩阵，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。此观测方程的代数解可列为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{VU}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{UU}^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{6.4-8}$$

在一般情况，上式解 $\boldsymbol{B}$ 为非正交矩阵，正交化后，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 不满足观测方程(6.4-7)。实际观测矢

量 $\boldsymbol{U}_i$ 为某一期望矢量 $\boldsymbol{U}_i^*$ 和观测误差 ΔU_i 之和：

$$\boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{U}_i^* + \Delta U_i$$

因此，多矢量确定姿态的模式为求正交的最优矩阵 $\boldsymbol{B}^*$，使下列优化极值指标（见文献[47]）：

$$L(\boldsymbol{B}^*) = \sum |\boldsymbol{U}_i - \boldsymbol{B}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_i|^2 = \sum |\Delta U_i|^2 \tag{6.4-9}$$

为最小，并满足约束条件：

$$\boldsymbol{B}^{*\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{*-1} \tag{6.4-10}$$

可认为观测方程(6.4-7)的伪逆解(6.4-8)为上式优化的近似解。令 $\Delta\boldsymbol{B}$ 为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 正交化的校正量，即有

$$\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{B} + \Delta\boldsymbol{B} \tag{6.4-11}$$

正交条件式(6.4-10)可转化为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} + \Delta\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{B} + \Delta\boldsymbol{B})^{-1} \\
&= (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}\Delta\boldsymbol{B})^{-1} = [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}^{-1}\Delta\boldsymbol{B})]^{-1} \\
&= (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}^{-1}\Delta\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{-1} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}^{-1}\Delta\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1} \\
&= \boldsymbol{B}^{-1} - \boldsymbol{B}^{-1}\Delta\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}
\end{aligned}$$

式中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。以 $\boldsymbol{B}$ 乘左右两端，可得正交条件的 $\Delta\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} + \Delta\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \tag{6.4-12}$$

满足上式的 $\Delta\boldsymbol{B}$ 应使优化指标式(6.4-9)为最小。其条件为

$$\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \Delta\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1} \tag{6.4-13}$$

统一正交和优化条件，由式(6.4-12)，(6.4-13)得

$$\Delta\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{B}$$

因此，多矢量确定姿态的最优解为

$$\boldsymbol{B}^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}(3\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})$$

式中矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的表达式为(6.4-8)。

6.5 姿态确定的状态估计

6.5.1 状态估计法的应用

以上各节论述的姿态确定程序是属于确定性处理方法，这种方法和所得的结果有明确的物理或几何上的意义，但这种方法要求参考矢量的参数足够精确，因为这种方法原则上很难克服参考矢量的不确定性对姿态确定精度的影响。参考矢量的不确定性主要包括卫星轨道参数的误差和姿态敏感器的安装偏差及信息处理误差等（统称系统误差），用上述的代数法难以建立包括这些系统误差在内的定姿模型及加权处理不同精度的测量值。这些问题在需要高精度定姿的场合是很重要的。

与确定性处理方法相反，在状态估计法中，姿态参数解的维数与观测维数可以不相同，而且被估计的量不仅限于姿态参数，参考矢量、观测矢量中的一些不确定参数也可列为被估计的

量。状态估计法提供统计最优解，这样，在一定程度上能免除某些不确定因素的影响，提高姿态确定的精度。

在状态估计法中定义三个矢量。

(1) 状态矢量 $\boldsymbol{x}$　　$\boldsymbol{x}$ 为 n 维矢量，由需确定的姿态参数组成，必要时还包含精确定姿所必需的其它变量，如敏感器的系统误差、轨道参数等。状态矢量的元素可以是常值(如敏感器的系统误差)，也可以是时间变量。根据姿态动力学、运动学以及参考矢量空间的动态特性，可建立描述状态量变化的状态方程，其一般模式为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x},t) + g(\boldsymbol{x},t)n(t) \tag{6.5-1}$$

式中 $n(t)$ 为状态过程的噪声，一般可归结为白噪声。

(2) 观测矢量 $\boldsymbol{y}$　　$\boldsymbol{y}$ 是由姿态敏感器测量值组成的 m 维矢量，其元素可以是姿态敏感器的直接测量值，也可以是由测量值以某种模式建立的导出量。

(3) 观测模型矢量 $\boldsymbol{z}$　　$\boldsymbol{z}$ 为 m 维矢量，是由状态矢量的估计值，根据观测模型

$$\boldsymbol{z} = h(\boldsymbol{x},t) \tag{6.5-2}$$

计算得出的观测矢量的预测量。此观测模型是根据姿态敏感器的硬件模型、测量几何以及选定的状态矢量建模得出，与观测矢量的差即为测量残差 $\boldsymbol{V}$，包括系统误差和随机误差。由此定义观测方程为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{V} = h(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{V} \tag{6.5-3}$$

当观测模型矢量的计算值与观测矢量之差较小时，观测方程的线性化模型可列为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{V} \tag{6.5-4}$$

式中 $\boldsymbol{H}$ 是观测模型函数 $h(\boldsymbol{x},t)$ 的导数矩阵，称为观测矩阵，即

$$\boldsymbol{H} = \left[\frac{\partial h(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}\right] \tag{6.5-5}$$

获得状态矢量估计值的解算程序取决于应用何种状态估计法——分组估计或递推估计。一般先确定状态矢量的先验初值 $\boldsymbol{x}_0$，按式(6.5-2)得出观测模型矢量 $\boldsymbol{z}_0$，然后与观测矢量 $\boldsymbol{y}_0$ 比较。根据误差选择新的状态估计 $\boldsymbol{x}_1$，再比较观测模型矢量与观测矢量的误差，不断地重复此过程，最后得到一个最优的状态估计 $\boldsymbol{x}$，使观测模型矢量与观测矢量之间的残差的平方加权为最小。其最优指标函数可写为

$$Q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}) \tag{6.5-6}$$

在分组估计中，式中 $\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ 是由 N 次观测所得 N 个观测矢量组成的 $N\times m$ 维观测矢量和相应的观测模型矢量；$\boldsymbol{W}$ 是对称、非负定权系数矩阵，在各测量为独立的情况下，$\boldsymbol{W}$ 是对角阵，其元素为测量方差的倒数。在分组估计中用同一观测矢量(一组观测的集合)重复上述，即为最小二乘估计。递推估计是不断地引入更新的观测矢量，作出新的估计，并重复上述。

姿态估计的算法与轨道微分改进的算法类同，其基本过程见第四章。有关姿态确定中估计方法——最小二乘和卡尔曼滤波的应用在许多文献中都有详尽的阐述，见文献[47,48]。对于姿态确定，估计模型的建立有下述若干特点。

状态矢量的元素包含三类。

(1) 与敏感器性能有关的参数。例如敏感器的偏置误差，这是对姿态确定精度起重要影响的参数，在大多数情况中这些偏差参数在飞行期间保持不变。

(2) 与卫星轨道有关的参数。敏感器的测量值常与卫星的轨道位置有关，轨道参数是不可缺少的，但最常用的参数是轨道跟踪误差而不是轨道参数。

(3) 姿态参数或姿态传播参数。有时在这些参数的传播模型中含有动力学成分。在动力学模型中，状态矢量的某些元素可能包含与力矩有关的参数。在任一时刻卫星的模型姿态要通过动力学方程的积分求出，在运动学模型中与姿态传播有关的状态矢量元素不包含力矩参数。在任一时刻卫星的模型姿态可以直接根据状态矢量元素计算出来。

如果要全面考虑各种因素对高精度姿态确定的影响，状态矢量元素可能有几十个，实际上这既不现实，又不必要。因为有些状态矢量元素对数据的影响是冗余的，并且对于一组已给定的数据，能求解的只是有限几个状态矢量元素。通常，选择状态元素的原则是：

(1) 对于不同的姿态，状态矢量应明显地影响观测模型矢量。这种影响是相对的，决定于对姿态确定精度的要求。

(2) 状态矢量能代表一些实际的物理量(或是描述物理过程的数学参数)，并且这些元素是可观测的，即通过一段时间内的观测，能取得姿态的信息。

(3) 状态矢量的值在整个观测期间内大致保持常值或按某一动力学模型传播。

(4) 要把状态矢量的某几个不同元素对数据的影响分离开，有时是十分困难的，因为这些参数之间的相关性很紧密，难以确定哪个参数是引起误差的真正原因。这时，可令一个参数作为状态元素，而把其它参数限定为它们的最优估计值。

前面已提及，敏感器的直接输出数据属于测量值，而观测矢量是在构造估计器时人为地定义的，根据同一个测量(一次测量或多次测量)可以规定几个不同的观测模型，也可以将几个不同敏感器的测量进行组合，构成一个观测。观测模型的建立是状态估计的重要环节，选择观测模型时最基本的考虑因素是要能精确地估计出状态矢量。有下列建立观测模型的一般性原则：

(1) 观测模型必须与状态矢量相适应，以免观测模型过于简化或繁琐。

(2) 选择尽可能接近敏感器测量值的观测，因为从敏感器的实测值转换到计算的观测，可能从不相关的测量中产生统计相关的观测，或引入不确定的参数而导致模型误差。

(3) 应有足够的观测模型，以便利用对状态估计有益的所有敏感器的测量值，同时应考虑到丢失一个或几个测量不致使所有观测模型失效。

下述姿态估计的若干实例。

6.5.2 自旋姿态的估计

以太阳-地球模式为例。待确定的自旋姿态为赤经 α、赤纬 δ，假定在姿态确定过程自旋轴方向不变，可略去状态方程(6.5-1)。令观测量为太阳角 θ_S，地球弦宽 μ 和太阳-地心转角 λ。状态矢量和观测矢量可列为

$$\left.\begin{aligned} x &= (\alpha\ \delta)^T \\ y &= (\theta_S\ \mu\ \lambda)^T \end{aligned}\right\} \tag{6.5-7}$$

根据太阳-地球方式的测量几何(6.2.2 节)，观测模型矢量 z 可列为

$$z = h(x) = \begin{bmatrix} \theta_S(\alpha,\delta) \\ \mu(\alpha,\delta) \\ \lambda(\alpha,\delta) \end{bmatrix} \tag{6.5-8}$$

式中各函数为

$$\left.\begin{aligned} \theta_S(\alpha,\delta) &= \arccos[S_x\cos\alpha\cos\delta + S_y\sin\alpha\cos\delta + S_z\sin\delta] \\ \mu(\alpha,\delta) &= 2\arccos\left[\frac{\cos\rho - \cos\gamma\cos\theta_e}{\sin\gamma\sin\theta_e}\right] \\ \lambda(\alpha,\delta) &= \arccos\left[\frac{\cos\theta_{Se} - \cos\theta_S\cos\theta_e}{\sin\theta_S\sin\theta_e}\right] \end{aligned}\right\} \tag{6.5-9}$$

上式中有辅助关系式

$$S_x = \cos\delta_S\cos\alpha_S, \qquad S_y = \cos\delta_S\sin\alpha_S, \qquad S_z = \sin\delta_S$$

$$\cos\theta_e = -(r_x\cos\alpha\cos\delta + r_y\sin\alpha\cos\delta + r_z\sin\delta)/r$$

$$\cos\theta_{Se} = -(r_x S_x + r_y S_y + r_z S_z)/r$$

$$\sin\rho = R_e/r$$

α_S,δ_S 为太阳的赤经、赤纬;r_x,r_y,r_z 为卫星位置的三个分量。将已有 N 次测量结果组成 $3N$ 维观测矢量 $\boldsymbol{y}$ 和观测矢量 $\boldsymbol{z}$,将观测模型线性化,得($3N\times2$)维观测矩阵 $\boldsymbol{H}$(式(6.5-4)),应用迭代方程,求解最优估计。

由于弦宽 μ 和转角 λ 的测量包含系统误差 $\Delta\mu$ 和 $\Delta\lambda$,在迭代过程,观测模型矢量 $\boldsymbol{z}$ 与观测矢量 $\boldsymbol{y}$ 总有差量,使迭代收敛较差,影响估计的精度。因此,待估计的状态量应包含测量的系统误差。令状态矢量和观测矢量设定为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (\alpha\ \delta\ \Delta\mu\ \Delta\lambda)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{y} &= (\theta_S\ \mu\ \lambda)^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right\} \tag{6.5-10}$$

观测模型矢量 $\boldsymbol{z}$ 的组成相应地包含系统误差 $\Delta\mu$,$\Delta\lambda$。由此,自旋姿态估计的状态方程和观测方程可列为

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= 0 \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{z} + \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \theta_S(\alpha,\delta) \\ \mu(\alpha,\delta) + \Delta\mu \\ \lambda(\alpha,\delta) + \Delta\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_S \\ V_\mu \\ V_\lambda \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{6.5-11}$$

迭代过程的观测矩阵 $\boldsymbol{H}$ 扩充为 $3N\times4$ 阶,包含有对 $\Delta\mu$,$\Delta\lambda$ 的偏导数,这样的微分校正量有利于改善收敛过程,提高估计精度。

6.5.3 含陀螺的三轴姿态估计

受各种空间干扰力矩的作用,三轴卫星姿态动态漂移的角速率远大于自旋卫星姿态,采用参考矢量观测和代数法直接确定三轴姿态的动态过程的精度受姿态敏感器带宽的限制。同时参考矢量观测的系统误差(仪器误差和轨道参数误差)和随机误差直接影响姿态确定精度。引入高精度的速率积分陀螺,获得姿态动态变化的信息,可减少矢量观测的不利因素的影响。同时,矢量观测有助于估计陀螺漂移,提高陀螺的测量精度。因此,由陀螺和矢量观测组成的姿态测量系统是三轴稳定卫星姿态确定的典型构成。

采用速率陀螺的另一重要优点是:在姿态确定的状态估计模式中,状态方程可选用卫星姿态的运动学方程,而不是姿态动力学方程。因为卫星质量特性和内外干扰力矩的不确定性严重地降低动力学方程建模的精确性,直接影响姿态估计的收敛性和精度。姿态运动学方程仅包含两类参数,一是待估计的姿态,二是姿态角速率,后者可被陀螺精确测得。因此,在含陀螺的姿态测量系统中,陀螺测量值不被视为状态估计模式的观测量,而是作为状态方程所含的参数,

但陀螺的漂移列为待估计的状态量。

令三只速率积分陀螺的输入轴分别沿星体三轴安装(参考图 6.3-8 的安装方式),陀螺系统的测速模型可列为

$$\boldsymbol{g}(t)=\boldsymbol{\omega}(t)+\boldsymbol{b}(t)+\boldsymbol{d}(t)+\boldsymbol{n}(t) \tag{6.5-12}$$

式中,$\boldsymbol{g}(t)$为三只陀螺的测量输出,$\boldsymbol{\omega}(t)$为沿三只陀螺输入轴的姿态速率,$\boldsymbol{b}(t)$和 $\boldsymbol{d}(t)$为三个陀螺的漂移(常值漂移和相关漂移),$\boldsymbol{n}(t)$为三个陀螺的白噪声。

(1) 地球-太阳-陀螺模式

由红外地平仪、太阳敏感器和速率积分陀螺组成的姿态测量系统,是对地定向三轴稳定卫星姿态确定的典型模式。在三轴稳定状态,卫星相对轨道坐标的姿态角 φ,θ,ψ 为小量,速率陀螺的输入是卫星在空间的转速沿星体的分量,有

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & \psi & -\theta\\ -\psi & 1 & \varphi\\ \theta & -\varphi & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -\omega_o\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\varphi}-\omega_o\psi\\ \dot{\theta}-\omega_o\\ \dot{\psi}+\omega_o\varphi\end{bmatrix}$$

将上式代入式(6.5-12),以陀螺测量 $\boldsymbol{g}(t)$作为输入函数的姿态角状态方程可写为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varphi}&=\omega_o\psi-b_x-d_x+g_x+n_x\\ \dot{\theta}&=-b_y-d_y+\omega_o+g_y+n_y\\ \dot{\psi}&=-\omega_o\varphi-b_z-d_z+g_z+n_z\end{aligned}\right\} \tag{6.5-13}$$

陀螺漂移是影响姿态测量高精度的主要因素,漂移量也应作为待估计的状态量,陀螺常值漂移和相关漂移的状态方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{b}_i&=n_{bi}\\ \dot{d}_i&=-\frac{1}{\tau_i}d_i+n_{di}\end{aligned}\qquad i=x,y,z\right\} \tag{6.5-14}$$

τ_i 为相关时间常数。姿态确定的观测量包含红外地平仪的测量滚动角 φ_h和俯仰角 θ_h,以及三只狭缝太阳敏感器的测量 $m_\theta,m_\varphi,m_\psi$,见图 6.3-3 和式(6.3-8)。红外地平仪测量的系统误差 $\Delta\varphi_h$,$\Delta\theta_h$ 也应作出估计,以消除对姿态确定精度的影响,其状态方程可列为

$$\Delta\dot{\varphi}_h=0,\qquad \Delta\dot{\theta}_h=0 \tag{6.5-15}$$

在对地定向的姿态运动学中,俯仰和滚动-偏航是不耦合的,见式(6.5-13)。因此,姿态估计可分为俯仰回路和滚动-偏航回路两部分。

俯仰测量回路的状态矢量和观测矢量为

$$\boldsymbol{x}=(\theta\ b_y\ d_y\ \Delta\theta_h)^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{y}=(\theta_h\ m_\theta)^{\mathrm{T}}$$

滚动-偏航测量回路的状态矢量和观测矢量为

$$\boldsymbol{x}=(\varphi\ \psi\ b_x\ d_x\ b_z\ d_z\ \Delta\varphi_h)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{y}=(\varphi_h\ m_\varphi\ m_\psi)^{\mathrm{T}}$$

综合式(6.5-13)～(6.5-15)和太阳敏感器的观测模型式(6.3-8),俯仰姿态的状态方程和观测方程可列为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{b}_y\\ \dot{d}_y\\ \Delta\dot{\theta}_h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1/\tau_y & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ b_y\\ d_y\\ \Delta\theta_h\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\omega_o+g_y\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n_y\\ n_{by}\\ n_{dy}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$y=z+V=\begin{bmatrix}\theta+\Delta\theta_h\\ \dfrac{s_x^o+\psi s_y^o-\theta s_z^o}{\theta s_x^o-\varphi s_y^o+s_z^o}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}V_h\\ V_s\end{bmatrix}$$

滚动-偏航姿态的状态方程和观测方程可列为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\psi}\\ \dot{b}_x\\ \dot{b}_z\\ \dot{d}_x\\ \dot{d}_z\\ \Delta\dot{\varphi}_h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \omega_o & -1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ -\omega_o & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\tau_x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\tau_z & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi\\ \psi\\ b_x\\ b_z\\ d_x\\ d_z\\ \Delta\varphi_h\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}g_x\\ g_z\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n_x\\ n_z\\ n_{bx}\\ n_{bz}\\ n_{dx}\\ n_{dz}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$y=z+V=\begin{bmatrix}\varphi+\Delta\varphi_h\\ \dfrac{-\psi s_x^o+s_y^o+\varphi s_z^o}{\theta s_x^o-\varphi s_y^o+s_z^o}\\ \dfrac{s_x^o+\psi s_y^o-\theta s_z^o}{-\psi s_x^o+s_y^o+\varphi s_z^o}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}V_h\\ V_s\\ V_s\end{bmatrix}$$

采用较好的陀螺，此系统的姿测精度与太阳敏感器的精度相当，能有效地消除地球敏感器系统误差的影响。

(2) 星光-陀螺模式

星敏感器的测量精度可达角秒级，应用星敏感器是提高姿态确定精度的重要措施，可有多种方式组成含星敏感器的姿态测量系统和姿态确定模式。

(a) 陀螺漂移的标定

在上述太阳-地球-陀螺的姿态测量系统中，陀螺漂移和红外地平敏感器的系统误差是影响姿态测量精度的主要因素。利用星敏感器可直接标定陀螺的常值漂移。以单轴姿态测量为例，如速率积分陀螺与星敏感器同时测量姿态角 θ，陀螺和星敏感器的输出分别为 θ_g 和 θ_s，有观测模型

$$\left.\begin{aligned}\theta_g&=\theta+\int b\mathrm{d}t+n_g=\theta+\Delta\theta+n_g\\ \theta_s&=\theta+n_s\end{aligned}\right\}\tag{6.5-16}$$

令姿态测量的状态量为陀螺的姿态确定误差 $\Delta\theta$ 和陀螺常值漂移 b，由上式陀螺测角模型(略去相关漂移)，状态方程可列为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\Delta\dot{\theta}\\ \dot{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\theta\\ b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}n_g$$

令观测量为星敏感器直接测量与陀螺测量之差$(\theta_s-\theta_g)$，则由式(6.5-16)观测方程可列为

$$y = z + V = [-1 \quad 0]\begin{bmatrix}\Delta\theta \\ b\end{bmatrix} + n_s$$

当陀螺漂移的估值收敛到接近真值时，观测量与观测模型量之差仅为残差。

将上述单轴模式推广到三轴姿态测量，三只陀螺分别测量姿态绕星体三轴的转速。由运动学方程计算确定三轴姿态，姿态确定误差$\Delta\varphi,\Delta\theta,\Delta\psi$除由陀螺常值漂移$b_x,b_y,b_z$引起的测量误差外，还包含由姿态转动引起的耦合计算误差，其计算模型可视为附加一个小转角姿态矩阵，有

$$\begin{bmatrix}\dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \Delta\psi & -\Delta\theta \\ -\Delta\psi & 1 & \Delta\varphi \\ \Delta\theta & -\Delta\varphi & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z\end{bmatrix} \tag{6.5-17}$$

结合陀螺测量方程(6.5-12)，令姿态确定误差和陀螺常值漂移组成状态矢量

$$\boldsymbol{x} = (\Delta\varphi\ \Delta\theta\ \Delta\psi\ b_x\ b_y\ b_z)$$

则由式(6.5-12)和(6.5-17)可列出状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x},t) + n(t) = \begin{bmatrix}-\Delta\theta(g_z - b_z) + \Delta\psi(g_y - b_y) + b_x \\ \Delta\varphi(g_z - b_z) - \Delta\psi(g_x - b_x) + b_y \\ -\Delta\varphi(g_y - b_y) + \Delta\theta(g_x - b_x) + b_z \\ n_{bx} \\ n_{by} \\ n_{bz}\end{bmatrix}$$

星敏感器测量星光在CCD面上的坐标位置P_x,P_y，由姿态测量系统已获得的姿态参数可计算得该星光的坐标P'_x,P'_y，其为确定性参量，因此，可被应用组成特定的观测矢量，

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix}y_1 \\ y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}P_x - P'_x \\ P_y - P'_y\end{bmatrix}$$

令星敏感器CCD坐标轴$\boldsymbol{x}_p,\boldsymbol{y}_p$与星体坐标轴$\boldsymbol{x}_b,\boldsymbol{y}_b$一致，如由轨道参数得出恒星参考矢量在轨道坐标的矢量$\boldsymbol{C}_o$，则观测模型矢量可列为

$$z = \begin{bmatrix}z_1 \\ z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}_b\cdot\boldsymbol{x}_p - \boldsymbol{C}_b\cdot\boldsymbol{x}_p \\ (\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}_b\cdot\boldsymbol{y}_p - \boldsymbol{C}_b\cdot\boldsymbol{y}_p\end{bmatrix} \tag{6.5-18}$$

式中，$\boldsymbol{C}_b$为参考恒星在星体坐标系的矢量，$\boldsymbol{C}_b=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_o$，其中姿态矩阵$\boldsymbol{A}$已由姿测系统得出，因陀螺常值漂移，该姿态矩阵的误差相当于一个附加的小转角姿态矩阵$(\Delta\boldsymbol{A})$，即为式(6.5-17)右端的姿态矩阵。观测模型矢量式(6.5-18)可被展开，以z_1为例，有

$$z_1 = -(\boldsymbol{I} - \Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}_b\cdot\boldsymbol{x}_p = -\tilde{\Delta}\,\boldsymbol{C}_b\cdot\boldsymbol{x}_p = -(\tilde{\Delta}\times\boldsymbol{C}_b)\cdot\boldsymbol{x}_p = (\boldsymbol{x}_p\times\boldsymbol{C}_b)\cdot\boldsymbol{\Delta}$$

式中，矢量Δ代表姿态测量系统的姿态误差，即

$$\boldsymbol{\Delta} = |\Delta\varphi\ \Delta\theta\ \Delta\psi|^{\mathrm{T}}$$

$\tilde{\Delta}$为其斜对称矩阵。由此，观测方程可列为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \tag{6.5-19}$$

其中，观测矩阵$\boldsymbol{H}$为

$$H=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}\times \boldsymbol{C}_{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0\\ (\boldsymbol{y}_{\mathrm{p}}\times \boldsymbol{C}_{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

(b) 轨道姿态的确定

利用星敏感器直接确定在轨道坐标的姿态(简称轨道姿态)。为了与高精度的星光观测相适应,采用精确的运动学模型,令状态量由姿态欧拉角和陀螺漂移组成,即

$$\boldsymbol{x}=(\varphi\ \theta\ \psi\ b_x\ b_y\ b_z)^{\mathrm{T}}$$

按 zyx 欧拉顺序,状态方程可列为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{n}(t)=\begin{bmatrix}[(g_x-b_x)\cos\psi-(g_y-\omega_{\mathrm{o}}-b_y)\sin\psi]\dfrac{1}{\cos\theta}\\ (g_x-b_x)\sin\psi+(g_y-\omega_{\mathrm{o}}-b_y)\cos\psi\\ (g_z-b_z)+[-(g_x-b_x)\cos\psi+(g_y-\omega_{\mathrm{o}}-b_x)\sin\psi]\tan\theta\\ n_{\mathrm{b}x}\\ n_{\mathrm{b}y}\\ n_{\mathrm{b}z}\end{bmatrix}$$

如引用星光测量坐标 P_x,P_y 直接建立恒星观测矢量,见式(6.3-10),则对于单个恒星,观测方程可列为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}+\boldsymbol{V}=\boldsymbol{M}\ \boldsymbol{A}(\varphi,\theta,\psi)\boldsymbol{C}_{\mathrm{o}}+\boldsymbol{V}_{\mathrm{p}} \tag{6.5-20}$$

式中,$\boldsymbol{M}$ 为星敏感器的安装矩阵;$\boldsymbol{A}$ 为由欧拉角 φ,θ,ψ 描述的姿态矩阵;$\boldsymbol{C}_{\mathrm{o}}$ 为恒星在轨道坐标系的参考矢量。

(c) 惯性姿态的确定

恒星在轨道坐标系中的参考矢量是由该星的星历表(定义在赤道惯性坐标系)经轨道坐标的转换而得,因此,在参考矢量中引入轨道参数误差,影响高精度定姿。高精度的姿态确定模式应是:恒星星历直接用作参考矢量,相应地,姿态定义在赤道惯性坐标系(简称惯性姿态)。对于对地定向卫星,其惯性姿态参数在大范围内变化,因而,采用四元素描述是最合适的。令姿态确定的状态量由惯性姿态四元素和陀螺常值漂移组成,即

$$\boldsymbol{x}=(q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ b_x\ b_y\ b_z)^{\mathrm{T}}$$

引用姿态四元素运动学关系式(5.3-3),状态方程可列为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{n}(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}(g_x-b_x)q_4-(g_y-b_y)q_3+(g_z-b_z)q_2\\ (g_x-b_x)q_3+(g_y-b_y)q_4-(g_z-b_z)q_1\\ -(g_x-b_x)q_2+(g_y-b_y)q_1+(g_z-b_z)q_4\\ -(g_x-b_x)q_1-(g_y-b_y)q_2-(g_z-b_z)q_3\\ n_{\mathrm{b}x}\\ n_{\mathrm{b}y}\\ n_{\mathrm{b}z}\end{bmatrix}$$

如采用正交成对的星敏感器,单个星敏感器可得参考星的观测矢量,则应用双矢量定姿的算法,可直接实时运算方向余弦式的姿态矩阵,从中得出姿态四元素 $\boldsymbol{q}$,以此作为观测量,其观测方程具有最简形式

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}+\boldsymbol{V}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{V} \tag{6.5-21}$$

式中 $\boldsymbol{H}$ 观测矩阵为

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

6.5.4 无陀螺的三轴姿态估计

在最简易的姿测系统中，无速率积分陀螺配置，并且作为姿测的唯一仪器——姿态矢量敏感器仅能提供有关姿态的信息(例如，仅用磁强计作为姿测敏感器)，依靠状态估计法仍能对姿态作出适当精度的估计[50]。作为参考矢量的地磁场的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_e$ 定义在与地球固连的地球坐标且随地球转动，星载磁强计的测量是地磁场在星体坐标的分量，观测方程可写成

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{B}_e+\boldsymbol{V}_b \tag{6.5-22}$$

$\boldsymbol{M}$ 为磁强计的安装矩阵，姿态矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$ 的 $\boldsymbol{q}$ 是姿态相对地球固连坐标系的四元素，因此其状态方程(5.3-3)为

$$\dot{\boldsymbol{q}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}')\boldsymbol{q} \tag{6.5-23}$$

式中，$\boldsymbol{\omega}'$ 是星体相对地球固连坐标的姿态速率。由于无陀螺测量，仅引用姿态运动学关系，无助于对姿态进行状态估计的更新，需同时引用姿态动力学特性，除姿态速率 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ 为状态量外，还须包含作用在卫星上的待估的空间干扰力矩。状态方程(6.5-22)的扩充应是姿态动力学方程

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{\omega}}=-\boldsymbol{I}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{H})+\boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{T}_g(\boldsymbol{q})+\boldsymbol{T}_m(\boldsymbol{q})+\boldsymbol{T}_d)\\&\dot{\boldsymbol{T}}_d=0\end{aligned}\right\} \tag{6.5-24}$$

式中，$\boldsymbol{T}_g$，$\boldsymbol{T}_m$ 为重力梯度力矩和剩磁力矩，可引入较确定的力矩模型，描述该力矩与姿态参数 $\boldsymbol{q}$ 的关系；$\boldsymbol{T}_d$ 为其他空间干扰力矩的常值分量，也是待估计的状态量。上式动力学状态方程(6.5-24)的 $\boldsymbol{\omega}$ 是星体相对惯性空间的姿态角速率，与四元素状态方程(6.5-23)的姿态速率 $\boldsymbol{\omega}'$ 的定义不同，引用地球自转速率 ω_e，两者的关系是

$$\boldsymbol{\omega}'=\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\begin{bmatrix}0\\0\\\omega_e\end{bmatrix}$$

综上所述，姿态确定应用的状态量为 10 维，但观测量仅为 3 维，虽姿态估计精度有限，但采用的姿态测量部件最少。

第七章　动量卫星的姿态控制

因卫星应用任务的需求，或因实现姿控模式的需求，在卫星入轨后，赋予卫星预置的角动量，使卫星具有陀螺定轴，例如自旋卫星、双旋卫星和带偏置动量飞轮的卫星。此类卫星的姿态动力学具有许多共性。如将双旋卫星的平台扩大，使之包含转子，同时又将双旋卫星的转子缩成动量飞轮，则双旋卫星演变成具有偏置动量轮的三轴稳定卫星。两者的主要区别在于：双旋卫星的控制系统位于转子，而三轴稳定卫星的控制系统位于平台上。因此，从动力学角度可统称此类卫星为动量卫星。

7.1　自旋卫星的被动章动阻尼

自旋卫星具有内在固有的稳定性，这种抗干扰力矩的能力来源于星体具有一定的角动量。在外力矩作用下，角动量矢量的方向在漂移，同时产生章动，外力矩消失后，漂移停止，但章动将继续下去。章动时自旋轴在空间作圆锥运动，使卫星上的探测仪器不能平稳地扫描，使消旋平台上的天线不能稳定地对地定向。消除章动使星体纯自旋，这是自旋卫星姿态控制的最基本课题。阻尼章动的方法分为被动式和主动式两种。前者不消耗星上的能源，结构简单可靠。

7.1.1　阻尼作用

被动式章动阻尼器的内部装有可活动的阻尼物质（固体或液体），当星体自旋轴作圆锥运动时，阻尼物质将在阻尼器内部相对运动，耗散章动的动能，或者说阻尼物质对星体的惯性反作用力矩，起到消除章动角的作用。这种耗散章动能量的装置对于细长体的双旋卫星特别重要，安置在平台上的阻尼器能克服转子部分的能量耗散引起的不稳定性，对双旋卫星的自旋运动起镇定作用。

全面分析阻尼质量的运动是很复杂的，阻尼质量的运动和卫星的章动相互耦合，相互影响，这种耦合运动的动力学方程一般没有解析解。在工程上初步设计时都采用近似的简化方法。由于阻尼质量往往是整星质量的千分之一，它对星体运动的影响是很缓慢的。在分析阻尼质量在阻尼器内的运动状态时，可以认为星体在稳定章动，使阻尼质量受到周期性的强迫振动，从而计算出阻尼质量在运动过程中损耗的能量以及耗散速率，再根据星体章动角的变化与能量损耗的关系估计章动阻尼的时间常数。这种估计被动章动阻尼器效率的方法称为能量耗散法。

对于固体的阻尼质量（通称阻尼块），假定它的质量 m 集中在一点上，此点在星体坐标中的位置矢量是 $\boldsymbol{r}$，阻尼块 B 的运动是受到约束的，如把可能位移方向的单位矢量记作 $\boldsymbol{e}_t$，位移量记作 s（图 7.1-1），阻尼块的位置是

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{r}_0 + s\boldsymbol{e}_t \tag{7.1-1}$$

它的运动方程式是

$$-\left(m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)\cdot\boldsymbol{e}_t = c\dot{s}+ks \qquad (7.1\text{-}2)$$

$\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ 是坐标轴的单位矢量，此坐标系可以是转子坐标系或平台坐标系。$-m\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}^2t}\right)$ 是惯性力，它在可能位移方向的分力等于阻尼质量块运动时受到的阻力 $c\dot{s}+ks$。c,k 分别为阻尼、弹簧系数。矢量 $\boldsymbol{r}$ 的二阶导数是

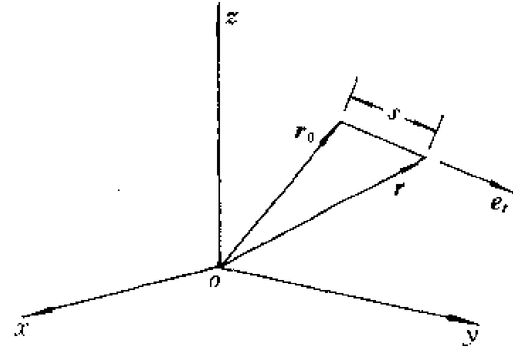


图　7.1-1

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{\boldsymbol{r}}+2(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}})+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \qquad (7.1\text{-}3)$$

式中，ω 是星体坐标的转速；$\ddot{\boldsymbol{r}}$ 是阻尼块在星体坐标中的位移加速度，由于质量块的位移只能沿 $\boldsymbol{e}_t$ 方向，有 $\ddot{\boldsymbol{r}}=\ddot{s}\boldsymbol{e}_t$。将式(7.1-3)代入运动方程式(7.1-2)，阻尼块的运动方程是

$$\ddot{s}+\frac{c}{m}\dot{s}+\frac{k}{m}s=-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_t \qquad (7.1\text{-}4)$$

式中

$$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 就是星体章动时阻尼块所在位置处星体上质点的惯性加速度，其中一部分是章动引起的，一部分是自旋产生的。由于星体的转速矢量在作圆锥运动，作用在阻尼块的惯性力也将是周期性的。为了使阻尼块的运动幅度最大，达到最大的能量耗散速率，应把阻尼块安置和约束在惯性加速度较大的地方，而且阻尼块在阻尼器内运动的自振频率应和惯性加速度的变化频率谐振。在星体上任一点 $\boldsymbol{r}=(x\ y\ z)^{\mathrm{T}}$ 的惯性加速度 $\boldsymbol{a}$ 可以展开形成矩阵形式：

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} z(\dot{\omega}_y+\omega_z\omega_x)+y(-\dot{\omega}_z+\omega_x\omega_y)-x(\omega_y^2+\omega_z^2) \\ x(\dot{\omega}_z+\omega_x\omega_y)+z(-\dot{\omega}_x+\omega_y\omega_z)-y(\omega_z^2+\omega_x^2) \\ y(\dot{\omega}_x+\omega_y\omega_z)+x(-\dot{\omega}_y+\omega_z\omega_x)-z(\omega_x^2+\omega_y^2) \end{bmatrix} \qquad (7.1\text{-}5)$$

在这个一般式中代入平台或转子的章动参数，略去高阶小量，可以分别求出在平台和转子上惯性加速度的分布特性。平台和转子坐标系中各自的章动参数是

$$\omega_{px}=\omega_t\cos\Omega_p t,\qquad \omega_{py}=\omega_t\sin\Omega_p t$$
$$\omega_{rx}=\omega_t\cos\Omega_r t,\qquad \omega_{ry}=\omega_t\sin\Omega_r t$$

令 $\omega_{pz}=0,\omega_{rz}=\omega_s$，可求得平台、转子上各点的惯性加速度：

$$\boldsymbol{a}_p=\begin{bmatrix} z\dot{\omega}_{py} \\ -z\dot{\omega}_{px} \\ y\dot{\omega}_{px}-x\dot{\omega}_{py} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z\omega_t\Omega_p\cos\Omega_p t \\ z\omega_t\Omega_p\sin\Omega_p t \\ -\omega_t\Omega_p(y\sin\Omega_p t+x\cos\Omega_p t) \end{bmatrix} \qquad (7.1\text{-}6)$$

$$\boldsymbol{a}_r=\begin{bmatrix} z(\dot{\omega}_{ry}+\omega_s\omega_{rx})-x\omega_s^2 \\ -z(\dot{\omega}_{rx}-\omega_s\omega_{ry})-y\,\omega_s^2 \\ y(\dot{\omega}_{rx}+\omega_s\omega_{ry})-x(\dot{\omega}_{ry}-\omega_s\omega_{rx}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} z\omega_t\Omega_0\cos\Omega_r t \\ z\omega_t\Omega_0\sin\Omega_r t \\ -\omega_t(\Omega_r-\omega_s)(y\sin\Omega_r t + x\cos\Omega_r t) \end{bmatrix} + \omega_s^2\begin{bmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.1-7}$$

上两式表明，在星体上任一点，惯性加速度 $\boldsymbol{a}_p$，$\boldsymbol{a}_r$ 都是周期性的旋转矢量，其速率为 Ω_p、Ω_r。在转子上惯性加速度中还有一项常值，它是自旋时的向心加速度。当矢量 $\boldsymbol{r}$ 给定时，$\boldsymbol{a}_p$，$\boldsymbol{a}_r$ 的模和 $\boldsymbol{r}$ 的模成正比。由于 $\boldsymbol{a}_p\cdot\boldsymbol{r}=0$，矢量 $\boldsymbol{a}_p$ 在一个平面内转动，此平面垂直于矢径 $\boldsymbol{r}$，也就是 $\boldsymbol{a}'_p$ 始终和半径为 $\|\boldsymbol{r}\|$ 的球面相切。在此圆球的极点处($x=y=0,z=\pm\|\boldsymbol{r}\|$)，矢量 $\boldsymbol{a}_p$ 的旋转轨迹是圆，离开极点处，此轨迹为椭圆。它的长轴沿星体子午线的方向，长轴的长度处处相等。在星体赤道面上，此椭圆退化成直线，与子午线相切，$\boldsymbol{a}_p$ 沿子午线正负方向周期性地变化。因此，在球面上矢量 $\boldsymbol{a}_p$ 的最大幅值处处相等，并始终指向极点。矢量 $\boldsymbol{a}_r$ 中的第一项是由章动产生的，它也在一个平面内旋转，除极点和赤道处外，此平面一般不与上述的球面相切，此加速度的幅值在极点处最大，在赤道上显著减小。

阻尼器耗散能量的速率就是阻尼力在章动一周内作功的平均值，此功为负功，

$$\dot{E}_d = -\frac{\Omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} c\,\dot{s}^2\mathrm{d}t \tag{7.1-8}$$

上式的 $\Omega=\Omega_r$(或 Ω_p)。在一般情况下，此能量耗散速率 $\dot{E}_d$ 与章动时的横向速率 ω_t 的平方成正比(参看下面的例子)。当星体内无其他可动质量引起能量损耗时，星体动能的变化速率就等于 $\dot{E}_d$，因此平台和转子的能量耗散速率是 $\dot{E}_p=-K_p\omega_t^2$ 和 $\dot{E}_r=-K_r\omega_t^2$，其中 K_p，K_r 为比例系数。当消旋平台的转速为零时，$\Omega_p=\Omega_0$，参照式(5.6-19)，有

$$I_t\dot{\omega}_t = -\left(K_p+\frac{\Omega_0}{\Omega_r}K_r\right)\omega_t \tag{7.1-9}$$

由此可估算横向角速率衰减的时间常数 τ，也就是章动角衰减的时间常数。根据 $\omega_{pz}=0$ 和式(5.6-9)，(5.6-10)，有 $\Omega_0=\lambda\omega_{rz}$，$\Omega_r=(\lambda-1)\omega_{rz}$，$\lambda=\frac{I_{rz}}{I_t}$，代入式(7.1-9)，得时间常数

$$\tau = \frac{I_t}{K_p+\frac{I_{rz}}{I_{rz}-I_t}K_r} \tag{7.1-10}$$

对于短粗形的星体，$I_{rz}(I_{rz}-I_t)^{-1}>1$。如阻尼器在转子上和在平台上耗散能量的速率相同，即 $K_r=K_p$，则阻尼器在转子上的阻尼效率比在平台上要高。从上式也可以看出，对于细长形的星体，($I_{rz}-I_t<0$)，转子上的阻尼器对自旋运动起不稳定的作用。

被动式章动阻尼器并不能改变星体的角动量，章动消失后的星体角动量应等于初始角动量，后者又包括横向和轴向两部分。章动消失后，横向部分等于零，因此轴向转速必然要增大。对于短粗形轴对称卫星，假定消旋电机的力矩抵消轴承的摩擦力，根据章动前后的角动量相等，章动消失后卫星的自旋转速 ω'_{rz} 应为

$$\omega'^2_{rz} = \omega_{rz}^2 + \left(\frac{I_t}{I_{rz}}\right)\omega_t^2$$

而星体的动能处于最小动能状态，此最小动能值 E' 为

$$E' = \frac{1}{2}I_{rz}\omega'^2_{rz} = \frac{1}{2}I_{rz}\omega_{rz}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{I_t^2}{I_{rz}}\right)\omega_t^2$$

它和初始动能之差是

$$\Delta E=\left(1-\frac{I_t}{I_{tt}}\right)\left(\frac{1}{2}I_t\omega_t^2\right)$$

因此被耗散掉的动能是初始章动动能$\frac{1}{2}I_t\omega_t^2$的一部分，另一部分章动动能转给自旋，而能量耗散法认为全部初始章动动能都被阻尼器吸收，星体自旋速率不变，因此用能量耗散法估算的章动阻尼时间常数是偏大的。

卫星上采用的被动式章动阻尼器的种类很多，见文献[52]。从形式上看主要区别于阻尼质量的类型——固体或液体；阻尼质量的支撑方式——轴承，悬挂或封闭容器；阻尼方式——粘滞流体或磁涡流；恢复力的方式——向心力或机械弹簧。在性能方面可分为可调谐和不可调谐两种．衡量章动阻尼器性能的主要指标有：单位质量的阻尼效率高，剩余章动角小，星体质量参数和转速变化对阻尼效率的影响小，重量、体积小，对安装精度没有严格的要求，对星体静动平衡的影响小。一种阻尼器不能都具备上述功能。把阻尼器的自振频率调谐到星体章动频率，这时阻尼效率最高，因为阻尼质量振荡的幅度最大，但星体参数变化使阻尼器偏离谐振点。没有谐振特性的阻尼器的效率低，但对星体参数变化不灵敏，没有严格的安装要求。剩余章动角的大小主要取决于阻尼质量的支撑方式。星体自旋转速的数值是选择阻尼器方案的重要因素。

7.1.2　摆式阻尼器

单摆阻尼器有各种形式。就安装方式而言，单摆运动的平面可以平行于或垂直于自旋轴，摆臂也可以平行于或垂直于自旋轴。单摆阻尼器由摆锤、摆杆、支撑挠性轴及阻尼装置等组成。摆杆摆动时受的外力矩有轴上的扭转力矩及阻尼力矩，后者可由磁涡流产生。在摆杆顶部装有马蹄形磁铁作为摆锤，其开口方向在摆动平面内，在此磁铁开口内，嵌入一片由良导体做成的金属板，它和阻尼器的壳体固连。当磁铁跟随摆杆运动时，在金属板上产生涡流，此涡流和磁场的相互作用产生一个阻尼力作用在磁铁上。很明显，摆受到的阻尼力矩和摆锤的运动速度成正比[53]。这类阻尼器可以装在转子上或平台上。根据上述章动时对惯性力场的分析，摆锤应远离卫星的质心。

假定阻尼器的摆杆平行于自旋轴，摆杆支撑点的位置在转子坐标系（或平台坐标系）中是$\boldsymbol{r}_0=(x_0\ y_0\ z_0)^{\mathrm{T}}$，摆锤的质量为$m$，摆杆长为$l$，偏离平衡位置的角度为$\alpha$（见图 7.1-2）。当摆动平

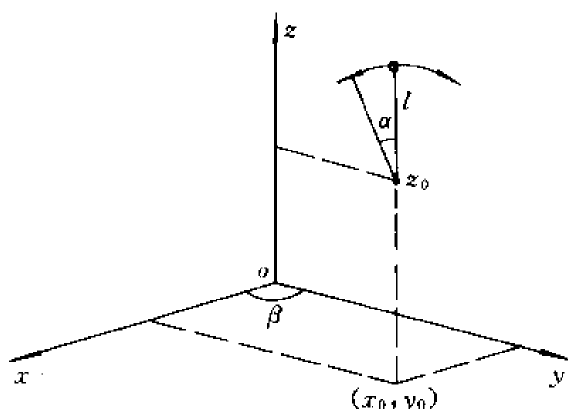


图　7.1-2

面的法线和自旋轴垂直并相交时，摆锤的运动位置和运动方向是

$$\boldsymbol{r} = (x_0 + l\sin\beta\sin\alpha)\boldsymbol{e}_x + (y_0 - l\cos\beta\sin\alpha)\boldsymbol{e}_y + (z_0 + l\cos\alpha)\boldsymbol{e}_z \tag{7.1-11}$$

$$\boldsymbol{e}_t = \cos\alpha\sin\beta\,\boldsymbol{e}_x - \cos\alpha\cos\beta\,\boldsymbol{e}_y - \sin\alpha\,\boldsymbol{e}_z$$

用摆角 α 描述摆杆的运动，其运动方程为

$$-\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)\cdot\boldsymbol{e}_t = cl\dot{\alpha} + \frac{k}{l}\alpha \tag{7.1-12}$$

c 为阻尼系数，k 为弹簧系数。如阻尼器装在转子上，根据式(7.1-2)～(7.1-5)和(7.1-7)，(7.1-11)，摆角的运动方程(7.1-12)化为

$$\ddot{\alpha} + \frac{c}{m}\dot{\alpha} + \frac{k}{ml^2}\alpha = -\left(\frac{a_t}{l}\right)\sin(\Omega_r t - \varphi_0) \tag{7.1-13}$$

式中 $a_t = z_0\omega_t\Omega_0$ 是惯性加速度周期性交变分量的幅值，摆的自然频率 $\omega_n^2 = \frac{k}{ml^2}$ 和自转速率无关。式(7.1-13)给出摆杆的振荡式是

$$\alpha = \frac{-\frac{a_t}{l}}{\left[(\omega_n - \Omega_r^2)^2 - \left(\frac{c}{m}\Omega_r\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\sin(\Omega_r t - \varphi_0)$$

摆锤受到的阻尼力是 $cl\dot{\alpha}$，它在章动周期内作功的平均值就是阻尼器耗散能量的速率：

$$\begin{aligned}\dot{E}_r &= -\frac{\Omega_r}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_r}} c(l\dot{\alpha})^2\mathrm{d}t \\ &= \frac{-c\,a_t^2\Omega_r^2}{2\left[(\omega_n^2 - \Omega_r^2)^2 + \left(\frac{c}{m}\Omega_r\right)^2\right]}\end{aligned}$$

如阻尼器的自然频率 ω_n 调到与章动频率 Ω_r 相等，则能量耗散最快，

$$\dot{E}_{rm} = \frac{-m^2z_0^2\Omega_0^2}{2c}\omega_t^2 = -K_r\omega_t^2 \tag{7.1-14}$$

上式表明阻尼器的能量耗散速率与横向角速率 ω_t 的平方成正比。参阅式(7.1-10)，章动阻尼的时间常数为

$$\tau_r = \frac{2cI_t\Omega_r}{m^2z_0^2\Omega_0^3} \tag{7.1-15}$$

当阻尼器安放在平台上，摆杆的运动方程和式(7.1-13)相同，但激励频率是平台的章动频率 $\Omega_p(=\Omega_0)$。在阻尼器的谐振状态 $\omega_n = \Omega_p$，能量耗散速率和式(7.1-14)类同。参看式(7.1-10)，平台上的阻尼器的阻尼时间常数为

$$\tau_p = \frac{2cI_t}{m^2z_0^2\Omega_p^2} \tag{7.1-16}$$

有了式(7.1-15)，(7.1-16)，可以比较平台上与转子上的阻尼器的效率。如两者的阻尼器参数都相同，那么两者时间常数之比等于星体章动速率之比，即

$$\frac{\tau_r}{\tau_p} = \frac{\Omega_r}{\Omega_p} \tag{7.1-17}$$

因为 $\Omega_r < \Omega_p$，阻尼器在转子上的阻尼效率比在平台上要高。但实际在平台上的阻尼质量离质心的距离比放在转子上要大，平台上的阻尼效率还是较高的。

7.1.3 液体阻尼器

这类阻尼器中的阻尼质量是流体，阻尼器的形式有管形或闭合环形。液体可以在平行或垂直于自旋轴的平面内流动。

阻尼器的主要部分是一个细长的圆管，两端分别有两个圆筒与圆管相连，粘滞流体充满圆管和圆筒的半部。星体章动时，液体在管内来回自由流动，为了使液体流动时对圆筒不产生压力，在两个筒之间又由另一根充气的管子相接，见图 7.1-3，文献[54]。液体在管内流动受到粘滞力作用，此力做的功就是阻尼器吸收的动能。

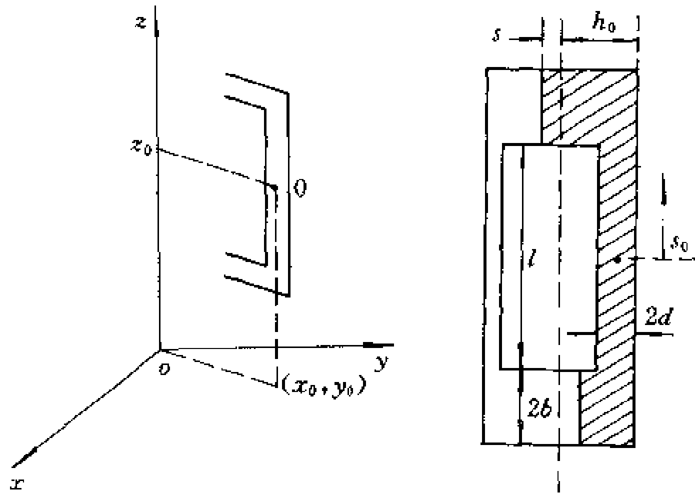


图 7.1-3

假定此阻尼器装在转子上，圆管在卫星子午面内，阻尼器几何中心 0 在转子坐标系中的位置是 $r_0=[x_0\ y_0\ z_0]^{\mathrm{T}}$。在稳态时，液体在筒内的液面高为 h_0，圆管长为 l，管径和筒径分别为 $2d$，$2b$，液体在管内和筒内的位移量分别为 s_0，s，这两者的关系是 $s=\left(\frac{d^2}{b^2}\right)s_0$。由于阻尼质量不能认为集中在一点上，在这种情况下，利用拉格朗日方法分析液体的流动是比较方便的。液体流动的能量由两部分组成，一是在圆管内流动时的动能，另一是在筒内的势能，这是因为阻尼质量处在向心力场中。由于章动是一种规则的圆锥运动，可以认为管内的液体在每时刻的流动都是层流，在圆管内速度位的分布是抛物线式，如图 7.1-4 所示。

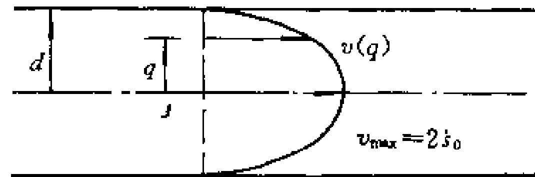


图 7.1-4

$$v(q)=2\dot{s}_0(t)\left(1-\frac{q^2}{d^2}\right)$$

q 是质点到管中心线的距离，$\dot{s}_0$ 是某一时刻液体在管内流动的平均速率。液体流动的动能是

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}\rho l\int_0^d 2\pi q v^2(q)\mathrm{d}q=\frac{2}{3}\pi\rho l d^2\dot{s}_0^2$$

ρ 是液体的密度，液体在管内的质量是 $m=\pi d^2 l\rho$。液体在筒内的流动速度较小，它的动能是 $\frac{4d^2h_0}{3b^2l}E_{\mathrm{k}}$，此值是个小量，因此液体在筒内流动的动能可以忽略不计。当液体在管内的平均位移

是 s_0 时，液面在筒内的位移是 $s=\frac{d^2}{b^2}s_0$，液体流动量是 $\pi\rho b^2 s$，这些液体是在向心力 $l_0\omega_s^2$ 作用下位移的，因此它具有的势能是

$$E_p = \pi b^2 s^2 \rho l_0 \omega_s^2 = \pi \frac{d^4}{b^2} s_0^2 l_0 \omega_s^2$$

ω_s 为自旋转速，$l_0=(x_0^2+y_0^2)^{\frac{1}{2}}$。液体在管内流动时要受到粘滞力作用，如动粘滞系数为 μ，此粘滞力 F 为

$$F = 2\pi\, \mathrm{d} l \mu \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}q}\right)_{q=d} = -8\pi l \mu \dot{s}_0$$

星体章动时在平行于 z 轴方向的惯性力为

$$F_z = -ma_z = -ma_z\cos(\Omega_r t + \varphi_0)$$

m 为液体在管内的质量，a_z 为惯性加速度在 z 轴方向的分量。根据式(7.1-7)，$a_z=-\omega_t(\Omega_r-\omega_s)l_0$，液体运动的拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_0}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial s_0}\right) = F + F_z \tag{7.1-18}$$

式中 $L=E-E_p$。将以上各有关公式代入上面方程式(7.1-18)，可得到用平均位移 s_0 表示的液体运动方程：

$$\ddot{s}_0 + \frac{6\mu}{d^2\rho}\dot{s}_0 + \frac{3d^2 l_0 \omega_s^2}{2b^2 l}s_0 = -\frac{3}{4}a_z\cos(\Omega_r t + \varphi_0) \tag{7.1-19}$$

同样，液体的流动是一个二阶振荡运动。液体在管内流动的自振频率 $\omega_n^2=\frac{3d^2 l_0\omega_s^2}{2b^2 l}$，且与自旋转速成正比。管内液体在周期性惯性力的作用下，它的运动情况是

$$s_0 = \frac{-\frac{3}{4}a_z}{\left[(\omega_n^2-\Omega_r^2)^2 + \left(\frac{6\mu}{d^2\rho}\Omega_r\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\cos(\Omega_r t + \varphi_0 - \psi_0)$$

ψ_0 为液体流动的滞后角。液体流动时做的功在单位章动周期内的平均值就是能量耗散速率：

$$\dot{E}_r = -\frac{\Omega_r}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_r}} F(t)\dot{s}_0(t)\mathrm{d}t = \frac{-\frac{9}{4}a_z^2\pi\mu l \Omega_r^2}{\left[(\omega_n^2-\Omega_r^2)^2 + \left(\frac{6\mu}{d^2\rho}\Omega_r\right)^2\right]}$$

当阻尼器的自然频率和章动频率谐振时，$\omega_n=\Omega_r$，能量耗散最快。利用质量 m 和加速率 a_z 的公式，谐振时能量耗散式是

$$\dot{E}_{rm} = -\frac{md^2\rho l_0^2}{16\mu}(\Omega_r-\omega_s)^2\omega_t^2 \tag{7.1-20}$$

谐振时能量耗散速率与章动横向角速率成正比。将比例系数代入式(7.1-10)，求得章动阻尼时间常数为

$$\tau_r = \frac{16\mu I_t \Omega_r}{m\rho d^2 l_0^2(\Omega_r-\omega_s)^2\Omega_0} \tag{7.1-21}$$

如将阻尼器放置在平行于卫星赤道平面上，圆管呈圆弧状，曲率半径小于转子的半径，使管内的液体处在平衡状态，用类似上述的方法可求得章动阻尼时间常数为

$$\tau_{\mathrm{t}}' = \frac{16\mu I_{\mathrm{t}}\Omega_{\mathrm{r}}}{m\rho d^2 z_0^2 \Omega_0^2} \tag{7.1-22}$$

z_0 为阻尼器所在平面距卫星赤道面的距离。比较这两种情况的阻尼效率式(7.1-21)和(7.1-22),得

$$\frac{\tau_{\mathrm{t}}}{\tau_{\mathrm{t}}'} = \frac{z_0^2\lambda^2}{l_0^2(2-\lambda)^2} \tag{7.1-23}$$

式中惯量比 $\lambda=\frac{I_{\mathrm{rz}}}{I_{\mathrm{t}}}>1$。在相同的安装条件下($z_0=l_0$),平行于赤道面的阻尼器比子午面的阻尼器有较高的阻尼效率,这与上面惯性力场分析的结论是一致的。

7.2 双旋卫星的主动章动阻尼

一种有效的主动章动阻尼的方式,是利用消旋平台定向回路和卫星动力学之间的相互耦合作用使章动衰减。装在平台或转子上的姿态敏感器测出平台的转速和指向误差,平台消旋回路中的电机控制平台绕轴承轴转动使天线在空间中定向。当平台的质量特性包含横向和轴向之间的惯量积时,平台的自旋运动和横向运动是耦合的。卫星章动引起平台轴向转速的变化,消旋电机消除此轴向转速而产生的力矩,经过动力学的耦合作用,在横向同时产生力矩,只要正确地设计消旋系统,可使此横向力距和平台的横向速率反向,使章动衰减。换言之,在平台的定向回路中,引入星体章动动力学环节,组成一个统一的定向回路。这个环节具有二阶无阻尼振荡特性,为了进一步改善这个环节的特性,可以应用章动敏感器,将章动参数引入定向回路中更有效地改善章动阻尼的效率,见文献[55]。

7.2.1 平台质量特性的阻尼作用

平台的质量特性中存在惯量积意味着平台相对于轴承轴是动不平衡的,但它们应该是静平衡的。设转子是静动平衡,并且是轴对称的。在这种情况下选用卫星平台坐标系 $ox_{\mathrm{p}}y_{\mathrm{p}}z_{\mathrm{p}}$ 为参考坐标系是合适的,z_{p} 轴与轴承轴一致,但横轴 x_{p}、y_{p} 经过特定的选择使 y_{p} 轴和 z_{p} 轴之间没有惯量积。因此,平台的惯量矩阵是

$$\boldsymbol{I}_{\mathrm{p}} = \begin{bmatrix} I_{\mathrm{pt}} & 0 & -I_{\mathrm{pxz}} \\ 0 & I_{\mathrm{pt}} & 0 \\ -I_{\mathrm{pxz}} & 0 & I_{\mathrm{pz}} \end{bmatrix}$$

I_{pxz}是平台 x_{p} 轴和 z_{p} 轴之间的惯量积。仿照卫星转子坐标系中卫星惯量矩阵式(5.6-5),将其中的下标 r,p 互换,利用 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{p}}=\boldsymbol{R}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}$ 的性质,求得卫星在卫星平台坐标系的惯量矩阵:

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} I_{\mathrm{t}} & 0 & -I_{\mathrm{pxz}} \\ 0 & I_{\mathrm{t}} & 0 \\ -I_{\mathrm{pxz}} & 0 & I_{\mathrm{pz}}+I_{\mathrm{rz}} \end{bmatrix} \tag{7.2-1}$$

式中 I_{t} 是平台和转子的合成横向惯量,见式(5.6-7)。同样,仿照卫星系统转子坐标系中卫星角动量公式(5.6-4),将其中的下标 r,p 互换,代入式(5.6-6),利用 $\omega_{\mathrm{rz}}=\omega_{\mathrm{pz}}+\omega_{\mathrm{rp}}$的性质,可求得在卫星平台坐标系中卫星角动量:

$$(\boldsymbol{H})_{p}=\begin{bmatrix}I_{t}\omega_{px}-I_{pxz}\omega_{pz}\\I_{t}\omega_{py}\\I_{pz}\omega_{pz}+I_{rz}\omega_{rz}-I_{pxz}\omega_{px}\end{bmatrix} \tag{7.2-2}$$

将此角动量式代入角动量方程(5.4-13),得姿态运动方程式。再利用章动角很小的性质,将此方程式在稳态解 $\omega_{px}=\omega_{py}=\omega_{pz}=0,\dot{\omega}_{rz}=0$ 附近线性化,并引用双旋卫星章动参数式(5.6-10),(5.6-13),得

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\omega}_{px}+\Omega_{p}\omega_{py}=\frac{I_{pxz}}{I_{t}}\dot{\omega}_{pz}\\&\dot{\omega}_{py}-\Omega_{p}\omega_{px}=0\\&\dot{\omega}_{pz}-\frac{I_{pxz}}{I_{pz}}\dot{\omega}_{px}=\frac{T_{z}}{I_{pz}}\\&\dot{\omega}_{rz}=-\frac{T_{z}}{I_{rz}}\end{aligned}\right\} \tag{7.2-3}$$

T_z 为消旋电机力矩,是内力矩。转子的惯量较大,电机力矩对转子转速的影响很小,ω_{rz}接近为常值。Ω_p 是平台坐标系中的章动速度。从运动方程(7.2-3)看出,卫星的横向运动与平台的轴向转动是耦合的。

为了保持平台消旋并对地定向,驱动消旋电机的输入信号是平台的指向误差和平台轴向速率。这里不分析平台的指向精度问题,平台消旋电机控制回路的输入为 $\dot{\omega}_{pz}$,输出为 T_z,传递函数为 $G(s)$。此开路传递函数和运动方程式(7.2-3)组成闭合的平台消旋回路,其方块图示于

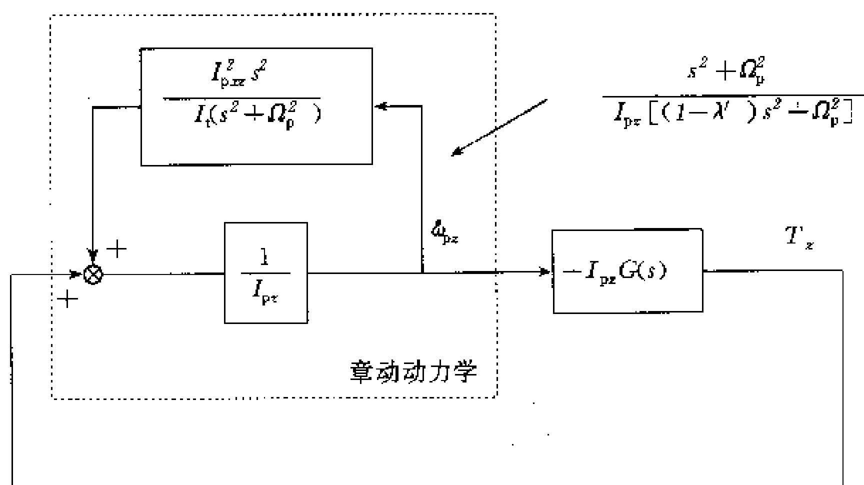


图 7.2-1

图 7.2-1。引入章动动力学环节后,在消旋回路中增加了一个振荡环节,其中的$\lambda'=\frac{I_{pxz}^2}{I_{pz}I_t}$表示惯量耦合系数。在此闭合回路的根轨迹图中,有关章动的根轨迹是从共轭极点$\pm j\frac{\Omega_p}{(1-\lambda')^{\frac{1}{2}}}$出发走向共轭零点$\pm j\Omega_p$,此轨迹在左半平面,章动是衰减的。一般平台的惯量积比主惯量要小得多,所以 $\lambda'\ll 1$,极点和零点很靠近,动力学特性的章动阻尼的效率较差,但此横向惯量积是引入章动外反馈的基础。

7.2.2 章动反馈的阻尼作用

提高章动阻尼效率的一种有效方法，是利用章动敏感器测出章动运动参数，将它引入消旋回路中去，补充横向转速的反馈，加强阻尼作用。

在转子内安有加速度计，其敏感轴和自旋轴平行，位于距卫星质心的位置矢量 $\boldsymbol{r}_a=(x_a\ y_a\ z_a)^{\mathrm{T}}$，在转子坐标系 $ox_r\,y_r\,z_r$ 中，在 $\boldsymbol{r}_a$ 处的惯性加速度在 z_r 轴向的分量是（见式（7.1-5），（7.1-7））

$$\begin{aligned}a_z &= (y_a\dot{\omega}_{rx} - x_a\dot{\omega}_{ry}) + (x_a\omega_{rx} + y_a\omega_{ry})\omega_{rz} - z_a(\omega_{rx}^2 + \omega_{ry}^2)\\ &= r_a\Omega_a\omega_0\cos(\Omega_r t + \varphi_0 - \varphi_1)\end{aligned} \tag{7.2-4}$$

式中，$r_a=(x_a^2+y_a^2)^{\frac{1}{2}}$；

$\Omega_a=\omega_{rz}-\Omega_r$；

$\varphi_1=\arctan\left(\dfrac{y_a}{x_a}\right)$，$\varphi_1$ 为加速度计的安装相位；

ω_0——初始横向角速率；

φ_0——章动初始相位。

上式是转子坐标的卫星横向速率，必须将它转换到平台坐标中，才能作为章动反馈信号引入消旋回路。利用平台和转子相对转动的周期脉冲与此加速度计信号进行差拍，经过滤波器，取出平台章动频率 Ω_p 的谐波部分。令此周期脉冲为 $N(t)$，频率为 Ω'，此脉冲信号可以分解为各次谐波之和

$$N(t) = \frac{4}{\pi}\sum\frac{\cos[n(\Omega' t - \varphi_2)]}{n}$$

φ_2 为相位，与周期脉冲发生器在转子安装的圆周角位置有关。将此式和（7.2-4）相乘，取出平台章动频率的谐波部分，可得

$$\begin{aligned}a'_z &= \frac{2r_a\Omega_a\omega_0}{\pi}\cos(\Omega_p t + \varphi_0 - \varphi_1 - \varphi_2)\\ &= \frac{2r_a\Omega_a}{\pi}[\omega_{px}\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \omega_{py}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]\end{aligned} \tag{7.2-5}$$

这就是在平台坐标系中的章动反馈信号，由此反馈信号所产生的电机力矩 T_a 为

$$T_a = -K_1\omega_{px} - K_2\omega_{py} \tag{7.2-6}$$

$$K_1 = -Kr_a\Omega_a\cos\varphi,\qquad K_2 = -K_{r_a}\Omega_a\sin\varphi \tag{7.2-7}$$

式中，K 为反馈系数；$\varphi=\varphi_1+\varphi_2$ 是反馈回路的相移，代表章动横向转速矢量和耦合横向力矩之间的相位差。很明显，相移 $\varphi=\pi$ 时，阻尼章动的效率最高。式（7.2-6）的反馈力矩和消旋回路中电机力矩（$-I_{pz}sG(s)\omega_{pz}(s)$）叠加后，代入方程（7.2-3），可得带有章动反馈消旋回路的系统方块图 7.2-2，图中

$$N(s) = (1-\lambda')s^2 + \Omega_p^2$$

$$K_1' = K_1\frac{I_{pxz}}{I_{pz}I_t},\qquad K_2' = K_2\frac{I_{pxz}}{I_{pz}I_t} \tag{7.2-8}$$

可见，引入章动反馈后，在平台消旋回路中，章动环节的零点仍是 $\pm j\Omega_p$，而极点是方程

$$[(1-\lambda')s^2 + \Omega_p^2] + K_1's + K_2'\Omega_p = 0$$

的根。此极点不再在虚轴上，而落入左半平面内，更有利于章动衰减。此消旋闭合回路的特征方程式是

$$s^2(1-\frac{\lambda'}{1+G(s)})+\frac{K_1's+K_2'\Omega_p}{1-G(s)}+\Omega_p^2=0 \tag{7.2-9}$$

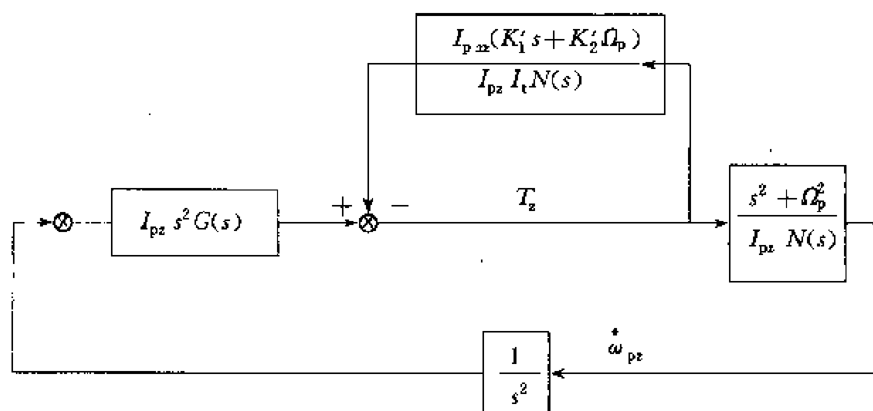


图 7.2-2

分析此特征方程式根的性质，可以估计消旋回路阻尼章动的作用。在没有闭路控制时 $G(s)=0, K'_1=K'_2=0$。无阻尼的章动特征根是 $s_1=\pm j\frac{\Omega_p}{(1-\lambda')^{\frac{1}{2}}}$。前面已提及，惯量积比较小，$\lambda'\ll1$。为了不影响消旋回路本身的品质，章动反馈量也是较小的，$K\ll1$。系统闭路后，使章动特征根发生小量变化，从 s_0 移动 Δs，此根轨迹的移动量的实部就确定了章动阻尼的快慢，章动阻尼的时间常数 $\tau_c=\frac{-1}{\mathrm{Re}[\Delta s]}$。

用扰动法可以直接估算章动特征根的变化量 Δs。一般平台消旋回路的时间常数大于 120 s，闭路极点的实部大约为 0.008 3 s^{-1}，而卫星的章动频率大于 1.01 s^{-1}。由于章动频率远远高出消旋回路的响应频率，并且章动反馈量又小，引入章动动力学环节对消旋回路阻尼比的影响很小，因此开路传递函数 $G(s)$ 在 $s_1+\Delta s$ 上的幅相特性可以近似地表示为

$$G(s_1+\Delta s)\approx G(s_1)=G_1e^{j\alpha} \tag{7.2-10}$$

G_1 和 α 是开路传递函数 $G(s)$ 在章动频率上的传递系数和相移。将 $s_1+\Delta s$ 代入特征方程式 (7.2-9)，略去高阶小量，求得

$$\Delta s=\frac{\lambda's_1^2-(1+G(s_1))(s_1^2+\Omega_p^2)-K_1's_1-K_2'\Omega_p}{2s_1(1-\lambda'+G(s_1))+K_1'} \tag{7.2-11}$$

根据反馈系数式(7.2-7)，(7.2-8)，上式中的系数 K'_1, K'_2 是

$$K_1'=-K_n\Omega_p\cos\varphi$$

$$K_2'=-K_n\Omega_p\sin\varphi$$

$$K_n=\frac{Kr_a\Omega_aI_{pxz}}{I_{pz}I_t\Omega_p}$$

再将 $G(s_1)$ 的幅相特性式(7.2-10)代入式(7.2-11)，求得章动特征根变量 Δs 的实部 $\mathrm{Re}[\Delta s]$。因此，章动阻尼时间常数为

$$\tau_d=\frac{-1}{\mathrm{Re}[\Delta s]}$$

$$= \frac{-\tau_n[1+G_1^2+2G_1\cos\alpha]}{G_1\sin\alpha+\frac{K_n}{\lambda'}[1+G_1^2+2G_1\cos\alpha]^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi+\beta)} \tag{7.2-12}$$

式中

$$\beta=\arctan\left(\frac{G_1\sin\alpha}{1+G_1\cos\alpha}\right)$$

$$\tau_n=\frac{2}{\lambda'\Omega_p}$$

章动阻尼效率决定于消旋回路和章动反馈回路的反馈系数和相移——G_1,α,K_n,φ。根据平台消旋回路的等效方块图7.2-2和时间常数的公式(7.2-12)，可以得出下列几点主要结论：

(1) 当消旋系统开路时$G_1=0$，只有章动反馈回路，这时章动阻尼的时间常数为

$$\tau_d'=\frac{-\tau_n}{\left(\frac{K_n}{\lambda'}\right)\cos\varphi}$$

与反馈系数K_n成反比。如相移$\varphi=\pi$，时间常数最小，这时章动反馈作用到横轴方向的力矩矢量恰好和章动横向转速矢量的方向相反。

(2) 当没有章动反馈时，$K_n=0$，消旋回路使章动衰减的时间常数为

$$\tau_d''=\frac{-\tau_n[1+G_1^2+2G_1\cos\alpha]}{G_1\sin\alpha}$$

从上式看出，平台消旋回路中引入章动动力学后，消旋开路传递函数$G(s)$在章动频率上的相移是$\pi<\alpha<2\pi$时，系统才是稳定的。

(3) 当消旋回路同时具有两种反馈(消旋反馈和章动反馈)时，根据式(7.2-12)的极值条件，如章动反馈的相移$\varphi=-\beta-\pi$，则章动阻尼的时间常数为最小。

章动反馈系数K_n对阻尼起很大作用，没有章动反馈，单纯靠动力学之间的耦合可以使章动衰减，但考虑到整星的动不平衡，惯量积不能太大，因此章动阻尼效率不高。引入章动反馈后，可以在小耦合量的情况下使星体章动迅速衰减。平台消旋回路自身的传递函数$G(s)$主要根据定向品质设计的，在很大程度上不受章动反馈回路的影响。

章动反馈回路中的系数和相移设计不要求与章动频率具有谐振特性，卫星转速变化对章动阻尼的效率影响不大，而被动章动阻尼器的阻尼特性与卫星的转速关系密切，因此章动反馈的阻尼特性比被动章动阻尼器优越得多。

7.3　自旋卫星的喷气控制

7.3.1　喷气章动控制

对于细长形自旋卫星，在需要快速章动阻尼的场合下，采用喷气控制是最有效的，可直接消除横向角速率。

假定卫星是轴对称的($I_x=I_y=I_t$)，固定在星体坐标中的横向控制力矩不引起轴向转速ω_z的变化。根据姿态动力学方程(5.5-1)，喷气控制引起卫星姿态的运动是

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\omega}_x+\frac{I_z-I_t}{I_t}\omega_s\omega_y=\frac{T_x}{I_t}\\&\dot{\omega}_y-\frac{I_z-I_t}{I_t}\omega_s\omega_x=\frac{T_y}{I_t}\\&\dot{\omega}_z=0\end{aligned}\right\}\qquad(7.3\text{-}1)$$

T_x,T_y 是横向控制力矩 T 的分量。由对称性,可将被控变量 ω_x,ω_y 合并成一复数变量 $\overline{\omega}_t=\omega_x+i\omega_y$,动力学方程可写成复数方程

$$\dot{\overline{\omega}}_t-i\Omega_n\overline{\omega}_t=\overline{\alpha}\qquad(7.3\text{-}2)$$

式中

$$\Omega_n=\frac{I_z-I_t}{I_t}\omega_s$$

$$\overline{\alpha}=\frac{1}{I_t}(T_x+iT_y)=\alpha e^{i\gamma}$$

式中,α 是控制力矩产生的角加速度;γ 是控制力矩 T 在 xy 平面的相位,决定于喷气推力器的安装部位。假定在 $t=t_0$ 时,横向角速率沿实轴方向($\omega_y=0$),在喷气起始时刻 $t=t_1$ 横向角速率为

$$\overline{\omega}_t(t_1)=\omega_t e^{i\Omega_n t_1}$$

$\Omega_n t_1$ 为喷气时刻横向角速率的相位。喷气作用的解是

$$\begin{aligned}\overline{\omega}_t(t)&=\overline{\omega}_t(t_1)e^{i\Omega_n(t-t_1)}+\frac{\overline{\alpha}}{-i\Omega_n}\left[1-e^{i\Omega_n(t-t_1)}\right]\\&=\overline{\omega}_t(t_1)e^{i\Omega_n(t-t_1)}+\frac{2\alpha}{\Omega_n}\sin\Omega_n\frac{t-t_1}{2}e^{i\left(\gamma+\Omega_n\frac{t-t_1}{2}\right)}\\&(t>t_1)\end{aligned}\qquad(7.3\text{-}3)$$

横向角速率是两部分的合成。第一部分是自由章动,横向角速率的端点沿 C_o 圆转动,见图 7.3-1,对于扁粗形卫星($\Omega_n>0$)转动方向是逆时针方向,对于细长形卫星($\Omega_n<0$)是顺时针方

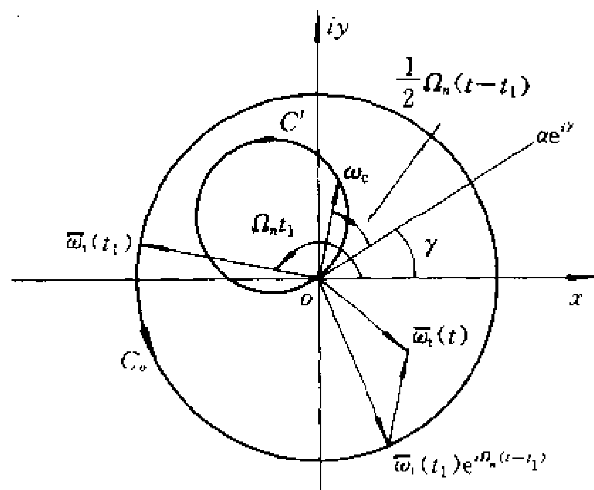


图　7.3-1

向。第二部分是喷气力矩产生的横向角速率,沿 C' 圆转动,该圆经过原点 o 并与直线 $\alpha e^{i\gamma}$ 相切。

假定喷气持续时间 Δt 是给定的，并且 $\Omega_n\Delta t<2\pi$，为了有效地消除初始章动角，应选择合适的喷气时刻 t_1(对应的横向角速率相位角是 $\Omega_n t_1$)，使喷气产生的横向角速率式((7.3-3)的第二项在喷气终止时刻 $t_2(t_2=t_1+\Delta t)$，与自由章动 $\overline{\omega}_t(t_1)\times e^{i\Omega_n(t-t_1)}$ 的方向相反。因此，在横向角速率初始($t=t_0$)相位为零的情况下，控制章动的喷气时刻 t_1 应按下列条件：

$$\Omega_n(t_1+\Delta t)=\gamma-\frac{1}{2}\Omega_n\cdot\Delta t+\pi$$

对于短脉冲喷气控制，$\Delta t\approx 0$，喷气时刻即为横向角速率矢量转到与喷气力矩相反的方向。参见式(7.2-4)，轴向加速度计信号过零时(正→负或负→正)，横向角速率的相位即为加速度计的安装相位 φ_1，相对此初始时刻 t_0，喷气的时延角 $\beta(\beta=\Omega_n(t_1-t_0))$ 应按下列条件：

$$\beta+\varphi_1=\gamma-\frac{1}{2}\Omega_n\Delta t+\pi \tag{7.3-4}$$

7.3.2 喷气进动控制

因变轨操作任务或空间观测的要求，需调整卫星自旋轴在空间的方向，利用星载的喷气推力器产生横向控制力矩，使卫星角动量进动，同时产生横向运动，卫星脱离自旋状态，再通过章动控制，使自旋轴与调整后的角动量方向重合。通常采用多脉冲、小冲量喷气控制，多脉冲进动控制的相位并不与章动相位同步，因此进动过程仅伴随小角度章动。

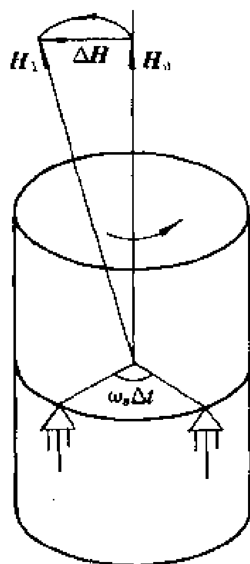


图 7.3-2

令喷气推力器的喷嘴在卫星上的安装方式如图 7.3-2 所示，反作用推力与自旋轴平行，喷气产生的横向控制力矩与自旋轴垂直，喷气作用使角动量进动的方向滞后于喷气相位 90°。令喷气力矩为 T，自旋转速为 ω_s，在初始时刻，卫星处于纯自旋状态，如喷气力矩很小，则可以忽略章动。在卫星自旋到某相位角的前后(1/2)Δt 时间内，喷气控制产生的角动量增量的数值等于

$$\Delta H=\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2}T\cos\,\omega_s t\,\mathrm{d}t=T\Delta t\,\frac{\sin\left(\dfrac{\omega_s\Delta t}{2}\right)}{\dfrac{\omega_s\Delta t}{2}} \tag{7.3-5}$$

ΔH 垂直于初始角动量 H_0。由于喷气时卫星在自旋，带动控制力矩 T 在空间中旋转，角动量从初始状态 H_0 沿圆弧进动到 H_1，如喷气作用是脉冲式($\Delta t\to 0$)，则角动量增量是

$$\Delta H=T\Delta t$$

角动量沿直线从 H_0 跃变地进动到 H_1。因此，通过选择合适的喷气时刻(决定控制力矩在空间中的方向)和喷气持续时间(决定控制冲量的大小)，经过多次控制之后，可将角动量控制到任意方向。

以双脉冲控制为例，说明脉冲式喷气产生的姿态运动。在图 7.3-3 上，圆周表示星体的自旋圆，$\boldsymbol{R}$ 是空间参考基准，表示角动量进动方向。在初始控制时刻 t_1，卫星处在纯自旋状态(图 7.3-3(a))，自旋轴、瞬时转轴与角动量轴共线。通过两次脉冲喷气控制，可将自旋轴调整到给定方向，同时卫星仍保持纯自旋运动(图 7.3-3(e))。当卫星自旋到某一位置，第一次脉冲喷气力矩的作用方向与 R 一致，脉冲喷气后，角动量 $\boldsymbol{H}_0$ 进动 $\Delta\boldsymbol{H}$，转速 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向也发生跃变(图

7.3-3(b)),自旋轴 z 开始以空间章动速率 Ω 绕角动量 $\boldsymbol{H}_1(=\boldsymbol{H}_0+\Delta\boldsymbol{H})$ 章动,同时转速 $\boldsymbol{\omega}$ 在星体坐标中绕 z 轴转动,转速为星体章动速率 Ω_n(图 7.3-3(c))。当章动角很小时有 $\Omega=\Omega_n+\omega_s$,在 t_2 时刻,当转速 $\boldsymbol{\omega}$ 绕 $\boldsymbol{H}_1$ 转过 180°,进行第二次喷气(图 7.3-3(d)),使角动量进动到 $\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{H}_1+\Delta\boldsymbol{H}$,同时使转速 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{H}_2$ 重合,星体将绕 $\boldsymbol{H}_2$ 纯自旋(图 7.3-3(e))。在空间中第二次喷气的时刻 $t_2=t_1+\dfrac{\pi}{\Omega}$,第二次喷气的相位与第一次相同,但在星体坐标中,两次喷气的角度间隔 σ 为

$$\sigma=(t_2-t_1)\omega_s=\frac{\omega_s}{\Omega}\pi$$

因此,对于单旋卫星,需在卫星上安装两个喷嘴才能实现双脉冲控制,第二个喷嘴位于滞后第一个喷嘴 σ 角处。两次脉冲控制分别由两个喷嘴产生。对于双旋卫星只需用一个安装在平台上的喷嘴产生两次脉冲控制,两次喷气之间的时间间隔为半个章动周期。

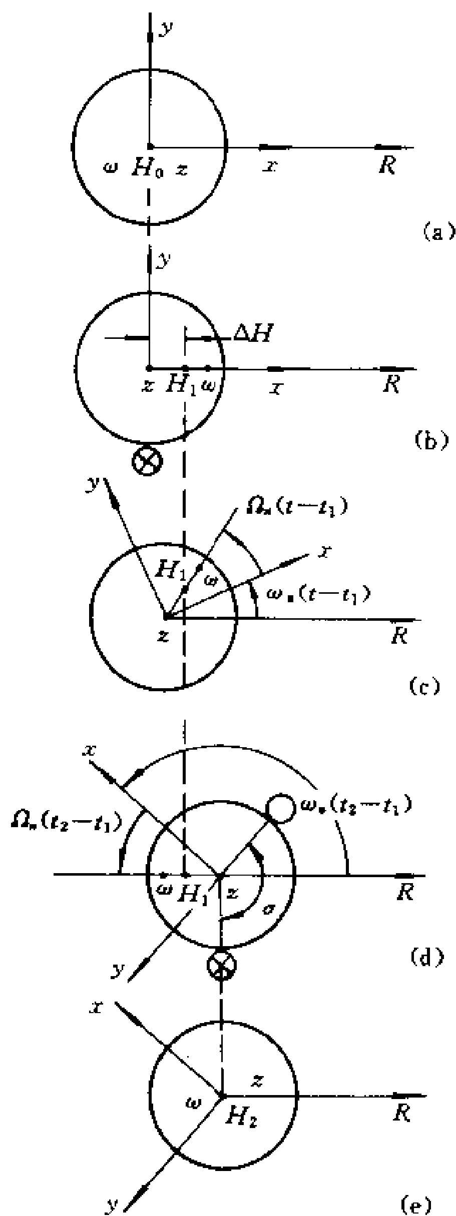


图 7.3-3

常用的多脉冲周期控制方式,卫星自旋一周,喷气一次,卫星角动量进动一次,将角动量从初始方向控制到目标方向。按照姿态机动过程中自旋轴在天球上描绘的轨迹,分两种控制规律:大圆法和等倾角法。控制方式都是自旋同步。假定喷气冲量很小,姿态机动过程中自旋轴与角动量基本一致,因此控制规律中的主要问题是确定喷气的相位。

1. 大圆法

大圆法控制时,自旋轴在天球上描绘的轨迹是大圆,自旋轴在同一平面内从初始方向 Z_0 机动到目标方向 Z_F(图 7.3-4),此平面在空间中是固定的,每次喷气产生的横向控制力矩必在此平面内,因此大圆法控制时,喷气相位在空间中是固定的。实际计算喷气相位的参考基准只能由星上的姿态敏感器给出。例如在自旋一周中太阳(或地球)敏感器扫过太阳(或地球)时输出的太阳(或地球)脉冲。因此,喷气相位在星体坐标中是变化的。在以太阳为北极的天球图7.3-4上,Z 表示机动过程中自旋轴的方向,下标 0 和 F 表示初始和目标姿态。太阳敏感器的视场穿过经度平面 SZ 的时刻为计算喷气相位的基准。控制力矩应在 Z_0Z_F 平面内,因此这两个平面之间的夹角 β 为喷气相位角。球面三角形 SZZ_F 给出相位角的计算公式

$$\cos\beta=\frac{\cos\theta_F-\cos\theta\cos\widehat{ZZ_F}}{\sin\theta\sin\widehat{ZZ_F}} \tag{7.3-6}$$

式中,θ 是自旋轴与太阳方向之间的夹角;下标 F 表示目标姿态的太阳角。从此公式看出,为了确定大圆法的喷气相位,不仅需要自旋轴初始方向、目标方向和太阳方向的信息,还需自旋轴

方向的实时信息，并且喷气相位不是固定的、与姿态方向有关，每次喷气前都须重新计算相位角。大圆法的优点是自旋轴机动的路径最短，耗费的燃料最少。

2. 等倾角法

为了便于工程实现，希望每次喷气的相位在星体坐标中是固定的，即每次喷气与自旋同步，滞后于太阳（或地球）脉冲-固定相位角。在以太阳为北极的天球图7.3-5上，同步脉冲控制力矩 T 始终与自旋轴 Z 所在的经度面夹同等角度，控制过程中自旋轴在天球上描绘的轨迹与各经度线夹同等角度，自旋轴沿等倾角线从初始方向 Z_0 机动到目标方向 Z_F。因此，这种控制方法称为等倾角法。

在图 7.3-5 的天球坐标中，Z_0，Z_F 的方向是$(\psi_0,\frac{\pi}{2}-\theta_0)$和$(\psi_F,\frac{\pi}{2}-\theta_F)$。角度 ψ 是自旋轴在天球坐标中的经度。等倾角 β 是自旋轴沿等倾角线的移动方向与太阳方向之间的夹角。一次脉冲控制后自旋轴从 Z 沿等倾角线移动 $\mathrm{d}s$ 到 Z'，自旋轴方向变化$(\mathrm{d}\psi,\mathrm{d}\theta)$。由于控制力矩

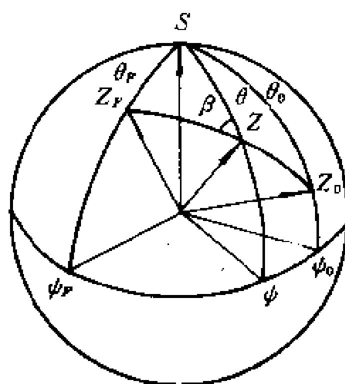


图 7.3-4

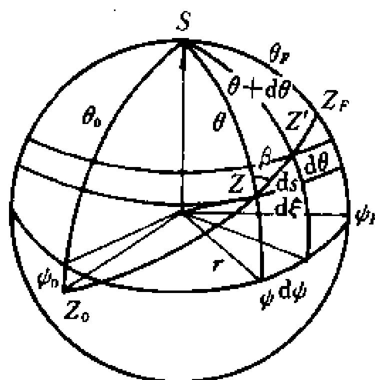


图 7.3-5

很小，$\mathrm{d}s$ 是大圆弧的微弧，在此微分球面三角形 SZZ' 中，有正、余弦公式

$$\frac{\sin \mathrm{d}s}{\sin \mathrm{d}\psi}=\frac{\sin(\theta+\mathrm{d}\theta)}{\sin\beta}$$

$$\cos(\theta+\mathrm{d}\theta)=\cos\theta\cos\mathrm{d}s+\sin\theta\sin\mathrm{d}s\cos\beta$$

将上两式线性化，得

$$\mathrm{d}\psi=-\tan\beta\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}$$

再将上式积分，上、下限为自旋轴初始方向和目标方向的参数，得等倾角 β：

$$\beta=\operatorname{arccot}\left[\frac{\pm 1}{\psi_F-\psi_0}\ln\frac{\tan\frac{\theta_F}{2}}{\tan\frac{\theta_0}{2}}\right] \tag{7.3-7}$$

如 $\Delta\psi=\psi_F-\psi_0>0$，则上式括号内取负值，反之取正值。如采用太阳脉冲为计算相位的基准时刻，则实际控制相位角 β^* 是从太阳方向顺自旋方向到等倾角线的转角。

$$\beta^*=\begin{cases}2\pi-\beta, & \text{当 } \psi_F-\psi_0\geqslant 0\\ \beta, & \text{当 } \psi_F-\psi_0<0\end{cases}$$

如采用轴向喷气推力器，喷嘴喷气方向沿自旋轴的负方向，喷嘴安装的部位滞后于太阳敏感器

γ 角，则喷气相位角

$$\beta_T = \beta^* + (\frac{\pi}{2} + \gamma)$$

不难看出，等倾角 β 确定后，自旋轴在天球上移动的轨迹满足下列方程式：

$$(\psi - \psi_0)\cot\beta = \ln \frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\theta_0}{2}} \tag{7.3-8}$$

此等倾角线在麦卡托平面图上是条直线。令麦卡托图上坐标点 x, y 是球坐标上姿态位置$(\psi, \frac{\pi}{2} - \theta)$在麦卡托图上的映像。如 $x=0$ 与 $\psi=0$ 对应，则映射关系式是

$$x = \psi$$

$$y = \ln|\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})|$$

根据上式，式(7.3-8)的等倾角线在麦卡托图上的方程是

$$(x - x_0)\cot\beta = (y - y_0)$$

因此在等倾角机动过程中，自旋轴与太阳之间的夹角始终在(θ_0, θ_F)范围内。

除特殊情况$(\beta=0, \frac{\pi}{2}, \pi)$外，等倾角线在天球上的路程比大圆长，燃料消耗多。参见图 7.3-5，有微分关系式

$$ds = \sqrt{(d\theta)^2 + (d\xi)^2}$$

$$d\theta = d\xi \cot\beta$$

将微分弧长进行积分，得等倾角轨迹的弧长为

$$s = \left|\frac{\theta_F - \theta_0}{\cos\beta}\right|$$

7.4 动量轮卫星的喷气控制

将双旋卫星的转子缩成高速旋转的飞轮，同时将双旋卫星的平台扩展成卫星星体，成为带固定动量飞轮的三轴稳定卫星。按照卫星的任务，飞轮的角动量方向与星体某主轴平行。对于对地定向的三轴稳定卫星，此动量轮的转轴与俯仰轴平行。基于轨道罗盘原理，卫星的滚动角和偏航角相互交变耦合(参阅第 5.7.2 节)。滚动角测量包含偏航角信息，无需独立的偏航敏感器，同时，通过滚动控制，间接实现偏航控制，即仅需单自由度侧向控制。这是此类系统构形的两大主要特点和优点。从整星动力学角度，卫星角动量内含偏置值，因此，又称之为偏置动量系统。在动量偏置值附近调节动量轮的转速即可控制俯仰姿态。滚动-偏航控制由一对偏置安装的外力矩控制执行机构(喷气推力器或磁矩棒)实现，或由偏置安装的反作用飞轮(内力矩)完成两轴耦合控制(见 7.5 节)。

7.4.1 偏置外力矩控制

假定沿俯仰轴的动量轮的角动量保持常值。由外力矩执行机构产生的力矩 T_c 在滚动-偏航平面内沿某一固定轴线，它与滚动轴相夹偏置角 α。见图 7.4-1，偏置的正方向定义：滚动力

矩 T_{cx} 为正（负）时，偏航力矩 T_{cz} 为负（正），因此控制力矩可列为

$$\left.\begin{aligned} T_{cz} &= T_c\cos\alpha \\ T_{cx} &= -T_c\sin\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (7.4\text{-}1)$$

$\cos\alpha$，$\sin\alpha$ 又表示力矩分离系数。

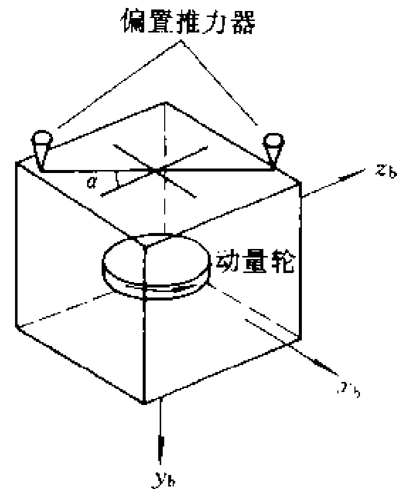


图　7.4-1

1．长周期控制

长周期控制即为控制偏置角动量与轨道法线一致，参见图 5.7-2。最简单的反馈控制规律是当滚动角为正（负）时，沿偏航轴的方向施加正（负）力矩，使偏置角动量倒向轨道法线，同时在沿滚动轴的方向作用负（正）力矩，抑制偏航运动。由于只有滚动角的测量信息，控制力矩 T_c 是单自由度的控制量。反馈控制规律是 $T_c=K(\varphi_R-\varphi)$，根据式（5.7-15），当 $\varphi_R=0$，长周期运动方程是

$$\left.\begin{aligned} \omega_o h_B\varphi + h_B\dot{\psi} &= -K\varphi\cos\alpha + T_{dx} \\ -h_B\dot{\varphi} + \omega_o h_B\psi &= K\varphi\sin\alpha + T_{dz} \end{aligned}\right\} \qquad (7.4\text{-}2)$$

它的控制方块图见图 7.4-2。在滚动控制回路中误差修正的增益系数是偏航轴上的力矩系数 $K\sin\alpha$，而修正偏航的增益系数是沿滚动轴上的力矩系数 $K\cos\alpha$。此系统的特征方程是

$$s^2 + \frac{K}{h_B}(\sin\alpha)s + \frac{\omega_o}{h_B}(\omega_o h_B + K\cos\alpha) = 0 \qquad (7.4\text{-}3)$$

从图 7.4-2(a)和等效方块图 7.4-2(b)以及特征方程式(7.4-3)看出，滚动通道的误差修正回路使整个系统获得阻尼，又由于引入了对偏航通道的耦合控制，因而增强了滚动、偏航之间的耦合，提高了系统的自然频率，加快了偏航的响应。当使用喷气控制时，修正系数 K 较大，并且 $K\cos\alpha\gg\omega_o h_B$，特征方程式(7.4-3)的根为两个负实根，将扰动力矩式(5.8-1)代入长周期控制方程(7.4-2)，求得滚动、偏航角的稳态值是

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{ss} &= \frac{T_{0x}}{K\cos\alpha} + \frac{2T_s}{K}\cos(\omega_o t - \alpha) \\ \psi_{ss} &= \frac{T_{0x}}{\omega_o h_B}\tan\alpha + \frac{T_{0z}}{\omega_o h_B} - \frac{T_s}{\omega_o h_B}\sin(\omega_o t - 2\alpha) \end{aligned}\right\} \qquad (7.4\text{-}4)$$

从上式看出增大滚动角的反馈增益 K，可以抑制滚动角的稳态误差，但偏航角的误差只决定于偏置角动量和扰动力矩。在没有偏航角测量反馈的所有偏置动量系统中，偏航角的误差是得不到改进的，只能靠选取较大的偏置动量值 h_B，才能减少偏航的稳态误差。为了减少滚动角误差且同时又阻尼姿态耦合运动，应选取较小的控制力矩方向偏置角 α。当使用磁控力矩时，修正系统 K 较小，此系统的阻尼比和自然频率为

$$\xi_1 = \frac{K\sin\alpha}{2h_B\omega_1}, \qquad \omega_1^2 = \omega_o^2 + \frac{K\omega_o}{h_B}\cos\alpha$$

为了加快偏航的响应并克服交变力矩引起的误差，要使系统的自然频率几倍于轨道频率，要使系统有良好的阻尼，应选取较大的力矩偏置角 α。

2．短周期控制

短周期控制实为章动控制，在分析短周期章动时，可以忽略轨道运动的耦合作用和扰动力

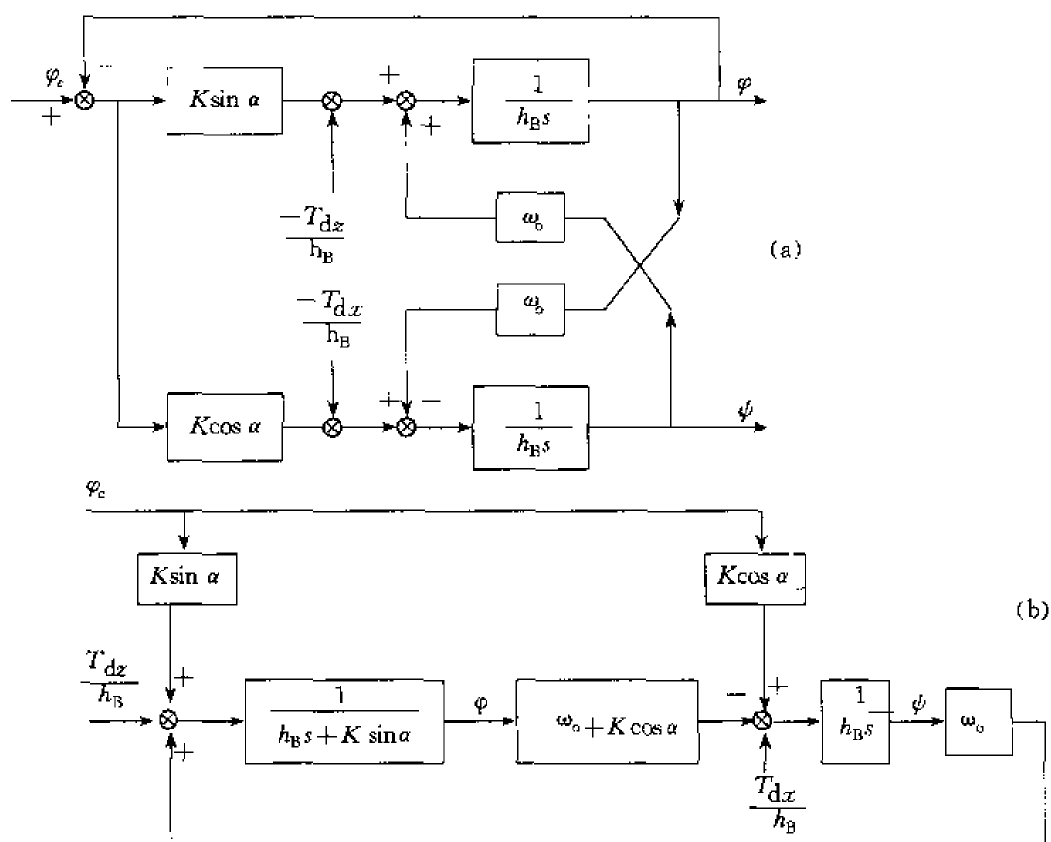


图 7.4-2

矩，直接用星体角速度表示姿态运动 $\omega_x=\dot{\varphi},\omega_z=\dot{\psi}$。根据式(5.7-16)，(7.4-1)，动力学方程为

$$\left.\begin{aligned} I_x\dot{\omega}_x+h_B\omega_z&=T_c\cos\alpha \\ -h_B\omega_x+I_z\dot{\omega}_z&=-T_c\sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{7.4-5}$$

阻尼章动就是消除星体的横向角速率 ω_x,ω_z。这时不必考虑角动量的方向，控制对象的传递函数为

$$\begin{bmatrix}\omega_x(s)\\ \omega_z(s)\end{bmatrix}=\frac{1}{I_xI_z(s^2+\omega_n^2)}\begin{bmatrix}(I_z\cos\alpha)s+h_B\sin\alpha\\ h_B\cos\alpha-(I_x\sin\alpha)s\end{bmatrix}T_c(s) \tag{7.4-6}$$

$\omega_n=\dfrac{h_B}{\sqrt{I_xI_z}}$为章动频率。为了阻尼章动必须引入角速率反馈，但系统的测量值为滚动角，要用超前校正。令控制力矩为

$$T_c(s)=-K(\tau s+1)\varphi(s)=-\frac{K}{s}(\tau s+1)\omega_x(s) \tag{7.4-7}$$

将此控制器的传递函数代入方程(7.4-6)，就得系统的开环传递函数。以 ω_x 为例，它包含有三个极点：$s=0,\pm i\omega_n$ 和两个零点 $s=-\dfrac{1}{\tau},-\dfrac{h_B}{I_z}\tan\alpha$。闭环传递函数的特征方程为

$$s(I_xI_zs^2+h_B^2)+K[(I_z\cos\alpha)s+h_B\sin\alpha](\tau s+1)=0$$

它的根与控制器增益 K 的关系可见根迹图 7.4-3。系统的两个零点起重要作用：一个是控制器引入的零点，它对阻尼章动起决定性作用，当 $\tau>\dfrac{1}{\omega_n}$，此系统是无条件稳定的；另一个是由滚动

动力学和力矩偏置决定的零点。上面已提及力矩方向的偏置能阻尼姿态的轨道耦合运动，对章动阻尼而言，这种偏置方式起到镇定系统的作用，这个零点应靠近位于原点上的极点，即控制力矩主要加在滚动轴上并适当地向偏航轴的负方向偏斜。但为了减少阻尼时间，这个偏置角应选大些，并且系统的增益 K 应取得较大，这对喷气控制是不难做到的。

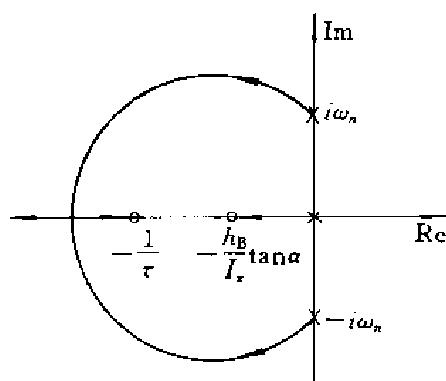


图 7.4-3

将上述两种长、短周期阻尼作用综合起来，根据式(5.7-4)（忽略其中 ω_0 与惯量的乘积），(7.4-1)和(7.4-7)，滚动-偏航控制系统的组成如图7.4-4(a)所示，它的等效框图如图 7.4-4(b)所示。

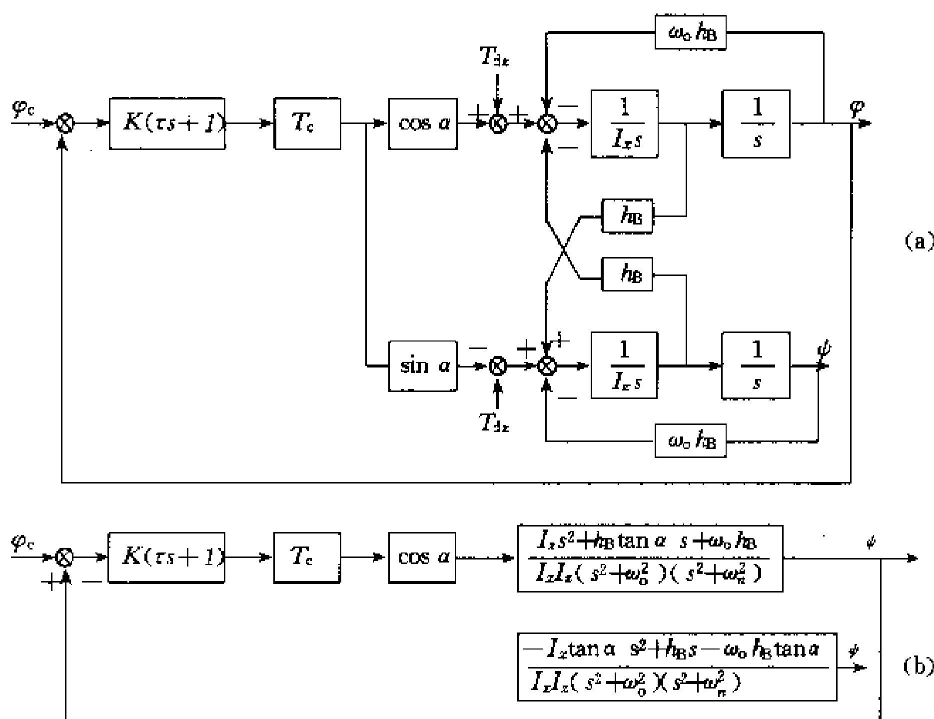


图 7.4-4

在滚动通道的开环传递函数中有三个零点——控制器的零点 $-\frac{1}{\tau}$ 和动力学的两个零点：

$$s_1,s_2=\frac{1}{2I_z\cos\alpha}\left[-h_B\sin\alpha\pm\sqrt{h_B^2\sin^2\alpha-4\omega_0 I_z h_B\cos^2\alpha}\right]$$

除上面已论及的选择主要参数 τ,α 的一些原则之外，还应使此系统具有过阻尼的性质，从而减少喷气次数，因此偏置角 α 的最小值受到零点 s_1,s_2 必须在负实轴上的限制。从方框图 7.4 4(b)可看出，偏航角输出的传递函数中带有正实部为 $\frac{h_B}{I_z\tan\alpha}$ 的零点，属于非最小相位系统。为了加快其响应，应选取最小的偏置角 α，即使如此，校正初始偏航角时，其误差值在一开始朝着稳态值的相反方向变化，这是非最小相位系统的特点。因此，力矩偏置角的最佳值是

$$\alpha\geqslant\arctan\left(2\sqrt{\frac{\omega_0 I_z}{h_B}}\right)$$

系统的根轨迹图如图 7.4-5 所示。

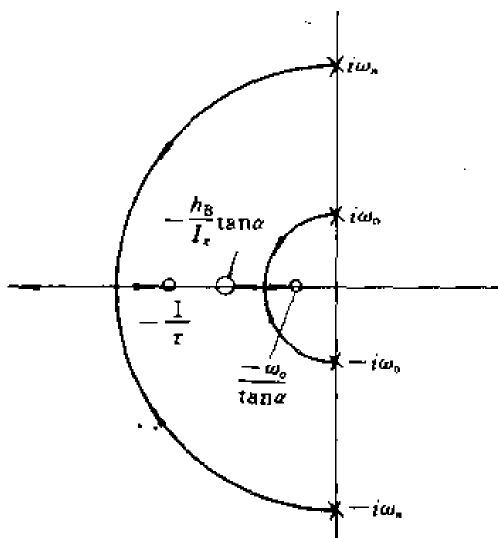


图 7.4-5

7.4.2 伪速率喷气控制

如采用喷气推力器，其推力方向与俯仰轴平行，产生的控制力矩在滚动-偏航平面内，如图 7.4-1 所示。本节按线性系统原理简要分析了固定动量的姿态控制系统的主要特性，在系统中采用微分校正是必需的，但喷气推力器只能工作在脉冲状态，通常构造一种伪速率控制器实现上述要求。伪速率控制器由一个具有滞环特性的触发器和一个反馈延时线路组成，如图 7.4-6 所示。控制器的输入是姿态敏感器测得的滚动角 φ。根据姿态控制精度要求，设置触发器的死区范围为 $\pm\varphi_d$，滞环宽度为 $h\varphi_d(h\ll 1)$。由于反馈作用控制器的输出是一串脉冲，脉冲的宽度为 Δt，间隔为 T_F，脉冲周期为 T_p。

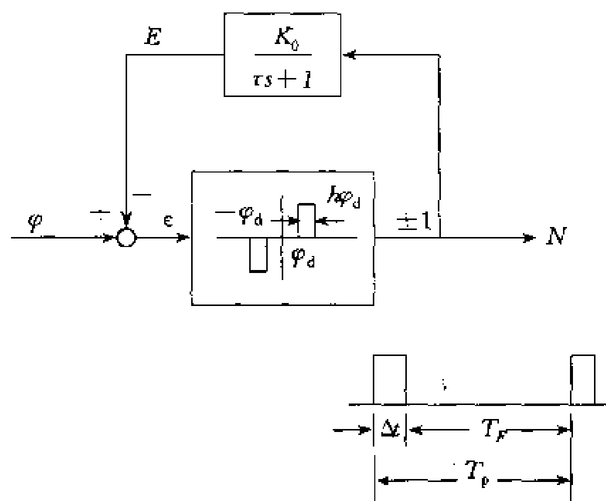


图 7.4-6

假定 $t=t_0$ 时，触发器开始触发的初始状态为 $\varphi(t_0)=\varphi_0$，$\varepsilon(t_0)=\varepsilon_0=\varphi_d$，$E(t_0)=E_0=\varphi_0-\varphi_d$，在 $t_0\leqslant t<t_0+\Delta t$ 时间内，电动势 E 增加，在 $t=t_1=t_0+\Delta t$ 时，触发器归零。令触发器的输出幅度为 ± 1，根据控制器的结构，有

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon(t_1) &= \varepsilon_1 = \varphi_d(1-h) \\ \varphi(t_1) &= \varphi_1 = E_0 + \varphi_d + \dot{\varphi}\Delta t \\ E(t_1) &= E_1 = E_0 e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} + K_0(1-e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}) \end{aligned}\right\} \tag{7.4-8}$$

从式(7.4-8)的前两个式得出

$$E_1 - E_0 = (\varphi_1 - \varepsilon_1) - E_0 = h\varphi_d + \dot{\varphi}\Delta t \tag{7.4-9}$$

从式(7.4-8)的后一个式得出

$$E_1 - E_0 = (K_0 - E_1)(e^{\frac{\Delta t}{\tau}} - 1) \tag{7.4-10}$$

再从式(7.4-9)和(7.4-10)得出

$$\frac{\Delta t}{\tau} = \ln\left[1 + \frac{h\varphi_d + \dot{\varphi}\Delta t}{K_0 - E_1}\right] \tag{7.4-11}$$

根据近似式

$$a = \ln\left(1 + \frac{b}{c}\right) = \frac{b}{c + \frac{b}{2}}$$

将式(7.4-11)化成

$$\Delta t \approx \frac{(h\varphi_d + \dot{\varphi}\Delta t)\tau}{K_0 - \varphi_1 + \varphi_d - \frac{1}{2}h\varphi_d + \frac{1}{2}\dot{\varphi}\Delta t}$$

由于 $\Delta t^2 \ll 1$，于是从上式求得 Δt 的近似式为

$$\Delta t \approx \frac{h\varphi_d\tau}{K_0 - \varphi_1 + \varphi_d - \frac{1}{2}h\varphi_d - \dot{\varphi}\tau} \tag{7.4-12}$$

在 $t_0+\Delta t<t\leqslant t_0+T_p$ 时间内，电动势 E 从 E_1 衰减到 E_2，触发器再次触发，有

$$\varepsilon_2 = \varepsilon(t_0 + T_p) = \varphi_1 + \dot{\varphi}t_F - E_2 = \varphi_d$$

$$E_2 = E(t_0 + T_p) = E_1 e^{-\frac{t_F}{\tau}} = [\varphi_1 - \varphi_d(1 - h)]e^{-\frac{t_F}{\tau}}$$

同理，从上两式可得脉冲间隔时间 t_F 的方程为

$$t_F = -\tau\ln\left[1 + \frac{-h\varphi_d + \dot{\varphi}t_F}{\varphi_1 - \varphi_d(1 - h)}\right]$$

从上式解得 t_F 的近似式为

$$t_F \approx \frac{h\varphi_d\tau}{\varphi_1 - \varphi_d + \frac{1}{2}h\varphi_d + \dot{\varphi}\tau} \tag{7.4-13}$$

因此，伪速率控制器输出的平均值 N_{av}(利用式(7.4-12)和(7.4-13))

$$N_{av} = \frac{\Delta t}{\Delta t + t_F} = \frac{\varphi_1 - \varphi_d + \frac{1}{2}h\varphi_d + \dot{\varphi}\tau}{K_0}$$

与姿态角偏差和姿态角速率成正比。

7.4.3　双脉冲喷气控制

虽然引用控制脉冲的冲量平均值概念可以近似地实现线性反馈控制，但储存着角动量的星体在脉冲力矩作用下，必然产生新的章动运动。另外，喷气推力器的最小开启时间受限制，在小偏差的情况下系统是不可控的，须设置一个滚动角的死区。下面说明在进动控制过程中如何消除章动的方法。这时不必考虑扰动力矩的作用，在姿态运动方程(5.7-4)中，可令 $T_{dx}=T_{dz}=0$，$h_x=h_z=0$，再令 $I_x=I_z=I$，$\omega_n=\frac{h_B}{I}$，略去 $I_x\omega_0$ 等项，并将控制力矩式(7.4-1)式代入，姿态运动方程可简化为

$$\ddot{\varphi} + (\omega_n - \omega_0)\dot{\psi} + \omega_0\omega_n\varphi = \frac{T_c}{I}\cos\alpha$$

$$\ddot{\psi} - (\omega_n - \omega_0)\dot{\varphi} + \omega_0\omega_n\psi = -\frac{T_c}{I}\sin\alpha$$

将滚动、偏航角组成一个复数量 $\bar{Z}=\varphi+i\psi$，在复平面上，滚动、偏航姿态对应某一点，上式可合并成复数方程

$$\ddot{\bar{Z}}-(\omega_n-\omega_o)i\dot{\bar{Z}}+\omega_o\omega_n\bar{Z}=\frac{T_c}{I}e^{-i\alpha} \tag{7.4-14}$$

$T_c e^{-i\alpha}$是控制力矩复数表达式，表示正力矩的方向在复平面上的第四象限内。令姿态的初始条件是 $\bar{Z}(t_0)=\bar{Z}_0=\varphi_0+i\psi_0$，$\dot{\bar{Z}}(t_0)=\dot{\bar{Z}}_0=\dot{\varphi}_0+i\dot{\psi}_0$，方程(7.4-14)的解是

$$\bar{Z}(t)=[\bar{P}_0e^{i\omega_o t_0}+\bar{P}(t)]e^{-i\omega_o t}+[\bar{Q}_0e^{-i\omega_n t_0}+\bar{Q}(t)]e^{i\omega_n t},t\geqslant t_0 \tag{7.4-15}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\bar{P}_0=\frac{\omega_n\bar{Z}_0+i\dot{\bar{Z}}_0}{\omega_o+\omega_n},\qquad \bar{Q}_0=\frac{\omega_o\bar{Z}_0-i\dot{\bar{Z}}_0}{\omega_o+\omega_n}\\&\bar{P}(t)=\frac{ie^{-i\alpha}}{I(\omega_o+\omega_n)}\int_{t_0}^{t}T_c(\tau)e^{i\omega_o t}d\tau\\&\bar{Q}(t)=\frac{-ie^{-i\alpha}}{I(\omega_o+\omega_n)}\int_{t_0}^{t}T_c(\tau)e^{-i\omega_n t}d\tau\end{aligned}\right\} \tag{7.4-16}$$

$\bar{P}_0,\bar{Q}_0,\bar{P},\bar{Q}$ 都是复数，在复平面上均可用矢量表示。没有外力矩作用时，姿态自由运动的规律是

$$\bar{Z}(t)=\bar{P}_0e^{-i\omega_o(t-t_0)}+\bar{Q}_0e^{i\omega_n(t-t_0)},\qquad t\geqslant t_0 \tag{7.4-17}$$

它在复平面上的轨迹如图7.4-7所示。在初始时刻 t_0，姿态的位置在 $\bar{Z}_0=\bar{P}_0+\bar{Q}_0$，姿态自由运动由两部分组成——轨道耦合运动和章动。复数 $\bar{P}_0$，$\bar{Q}_0$ 的模分别是轨道圆和章动圆的半径，只与初始条件有关。$\bar{Z}(t)$的端点在章动圆上的位置代表章动的相位，也就是复数 $\bar{Q}_0e^{i\omega_n(t-t_0)}$ 的幅角。控制脉冲的作用时间很短，可以近似地看成单位脉冲函数 $\delta(t)$，将控制脉冲 $T_c=T_c\delta(t-t_i)$（t_i 为脉冲作用时刻）代入式(7.4-16)，可得

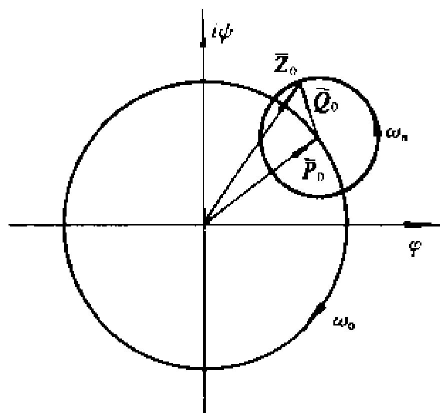


图 7.4-7

$$\left.\begin{aligned}&\bar{P}(t)=\bar{P}'e^{i\omega_o t_j},\\&\bar{Q}(t)=-\bar{P}'e^{-i\omega_n t_j}\\&\bar{P}'=\frac{iT_ce^{-i\alpha}}{I(\omega_o+\omega_n)}\end{aligned}\right\} \tag{7.4-18}$$

如在 $t=t_i^-$ 时刻，姿态处在

$$\bar{Z}_j=\bar{P}_j+\bar{Q}_j=\bar{P}_0e^{-i\omega_o(t_j-t_0)}+\bar{Q}_0e^{j\omega_n(t_j-t_0)} \tag{7.4-19}$$

在 $t=t_j$ 时刻，作用一个控制脉冲，根据式(7.4-15)，(7.4-16)，(7.4-18)等，则控制脉冲作用后姿态的轨迹变成

$$\bar{Z}(t)=(\bar{P}_j+\bar{P}')e^{-i\omega_o(t-t_j)}+(\bar{Q}_j-\bar{P}')e^{j\omega_n(t-t_j)} \tag{7.4-20}$$

式中

$$\bar{P}_j=\bar{P}_0e^{-i\omega_o(t-t_j)},\qquad \bar{Q}_j=\bar{Q}_0e^{i\omega_n(t-t_j)}$$

如图 7.4-8 所示，在一个脉冲作用后，章动圆心从 $\bar{P}_j$ 移到 $\bar{P}_j+\bar{P}'$的端点处，章动圆的半径从 $\|\bar{Q}_j\|=\|\bar{Q}_0\|$ 变成 $\|\bar{Q}_j-\bar{P}'\|$。因此，复数 $\bar{P}'$就表示在一个脉冲作用后，章动圆心的移动

量，移动的方向是固定的且垂直于控制力矩的方向，而新章动圆的大小决定于控制脉冲作用时章动的相位——$\overline{Q}_j$ 的幅角。在一个脉冲作用后，姿态的轨迹将沿新的轨道圆和章动圆移动。如

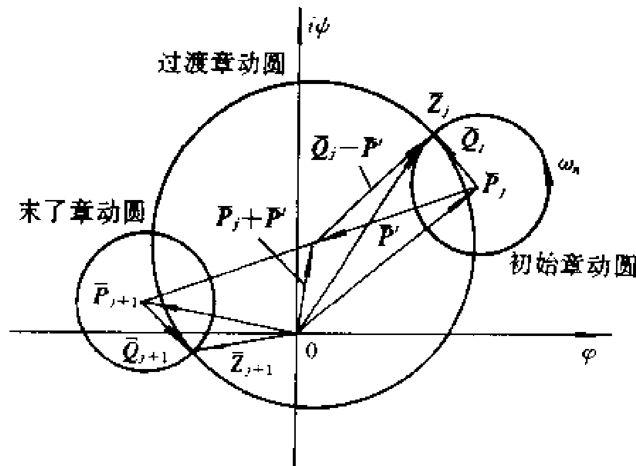


图 7.4-8

在 $t=t_{j+1}$ 时刻，又作用了第二个脉冲，根据式(7.4-15)，(7.4-18)，(7.4-20)等，新的姿态轨迹为

$$\begin{aligned}\overline{Z}(t) &=[(\overline{P}_j+\overline{P}')e^{-i\omega_o(t_{j+1}-t_j)}+\overline{P}']e^{-i\omega_o(t-t_{j+1})}\\ &\quad+[(\overline{Q}_j-\overline{P}')e^{i\omega_n(t_{j+1}-t_j)}-\overline{P}']e^{i\omega_n(t-t_{j+1})}\\ &=\overline{P}_{j+1}e^{-i\omega_o(t-t_{j+1})}+\overline{Q}_{j+1}e^{i\omega_n(t-t_{j+1})},\qquad t\geqslant t_{j+1}\end{aligned}\tag{7.4-21}$$

$\overline{P}_{j+1}$ 和 $\|\overline{Q}_{j+1}\|$ 是两次脉冲作用后章动圆心的位置和章动圆的半径，如果 $\omega_n(t_{j+1}-t_j)=\pi$，则 $\overline{Q}_{j+1}=-\overline{Q}_j$。因此，如两个脉冲之间的时间间隔 $(t_{j+1}-t_j)$ 为半个章动周期，则两次脉冲控制后章动圆的半径不变，见图 7.4-8。由于 $\omega_n\gg\omega_o$，可以认为从 t_j 到 t_{j+1} 时间内，章动圆心停留在 $\overline{P}_j+\overline{P}'$ 处，在两次脉冲作用后，章动圆心共移动 $2\overline{P}'$，姿态将从

$$\overline{Z}_{j+1}=\overline{P}_j+2\overline{P}'+\overline{Q}_{j+1}\tag{7.4-22}$$

处开始作两种周期的复合运动。根据这种典型的消除控制过程章动的双脉冲控制法，控制器的结构应该如图 7.4-9 所示。将此控制器接入滚动-偏航控制系统(图 7.4-3(a))，当初始章动角

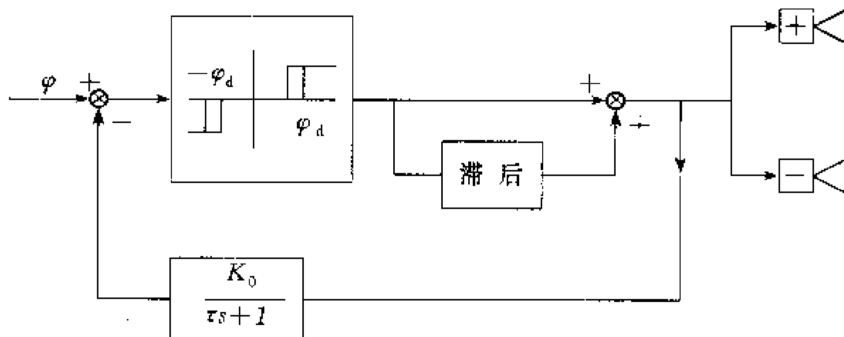


图 7.4-9

为零时，消除姿态初始偏差的姿态轨迹如图 7.4-10 所示。从图中看出姿态沿着力矩的垂直方向衰减，而章动角始终保持一个脉冲当量的大小。当姿态进入死区 $(\varphi_d,-\varphi_d)$ 后，控制停止，姿态沿轨道圆移动；当轨道圆与死区边界相交时，重新开始脉冲控制，直到轨道圆全部包含在死

区内,完成姿态初始偏差的校正为止。

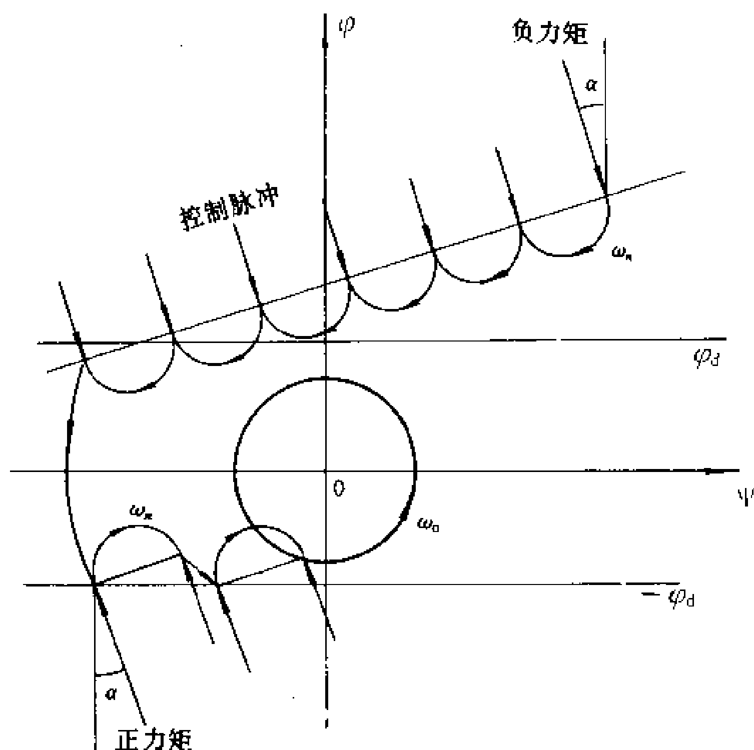


图 7.4-10

7.4.4 极限环

有扰动力矩作用时,姿态轨迹不再停留在死区内,而向外发散,当滚动角越过边界时,控制器不断地驱动偏置推力器,使滚动角停留在边界内侧,直到不控时,姿态自动地离开边界并朝死区中心移动为止。因此,在偏置动量加偏置喷气推力器的姿态控制系统中,姿态保持方式是围绕死区的一个极限环。如在初始时刻 $t=t_1$ 时,卫星的滚动、偏航角为 φ_1,ψ_1,卫星的太阳时角为 Ω_s,根据关系式 $\varphi=\frac{-H_z}{h_B},\psi=\frac{H_x}{h_B}$ 和式(5.7-20)可求出(忽略章动时)滚动和偏航在死区内的运动轨迹

$$\varphi=\frac{T_{ox}}{\omega_o h_B}-\left(\frac{T_{ox}}{\omega_o h_B}-\varphi_1\right)\cos\omega_o(t-t_1)-\left(\frac{T_{oz}}{\omega_o h_B}-\psi_1\right)\sin\omega_o(t-t_1)$$
$$+\frac{T_s}{\omega_o h_B}\omega_o(t-t_1)\sin[\omega_o(t-t_1)+\Omega_s]$$
$$\psi=\frac{T_{oz}}{\omega_o h_B}+\left(\frac{T_{ox}}{\omega_o h_B}-\varphi_1\right)\sin\omega_o(t-t_1)-\left(\frac{T_{oz}}{\omega_o h_B}-\psi_1\right)\cos\omega_o(t-t_1)$$
$$+\frac{T_s}{\omega_o h_B}\omega_o(t-t_1)\cos[\omega_o(t-t_1)+\Omega_s]$$

再根据姿态轨迹离开死区边界 $\varphi_1=\pm\varphi_d$ 向死区内移动的条件:

$$\varphi_1=\pm\varphi_d$$

$$\dot{\varphi}\Big|_{\substack{t=t_1\\ \varphi_1=+\varphi_d}}=0,\quad \ddot{\varphi}\Big|_{\substack{t=t_1\\ \varphi_1=\varphi_d}}<0,\quad 或\ \ddot{\varphi}\Big|_{\substack{t=t_1\\ \varphi_1=-\varphi_d}}>0 \tag{7.4-23}$$

求出姿态在死区内的运动轨迹。已知此轨迹是螺旋线，极点在$\left(\frac{T_{ox}}{\omega_o h_B},\frac{T_{oz}}{\omega_o h_B}\right)$处。因此，只要求得姿态轨迹离开正、负边界 $\varphi_1=\pm\varphi_d$时的偏航角 ψ_1 和卫星的位置 Ω_{s1}，以及此轨迹到达另一边界 $\varphi_2=\mp\varphi_d$时的偏航角 ψ_2 和位置 Ω_{s2}，便可以确定姿态变化的轨迹。显然，此极限环的周期就是轨道周期 $T=\frac{2\pi}{\omega_o}$。如日交变力矩 T_s 小于正常值偏置力矩 T_o，姿态轨迹的极限环将是单边的，即姿态离开死区边界向内移动后不再碰到另一边界又回到原来的边界上。图 7.4-11 显示了一个极限环的实例，原始参数是 $\varphi_d=0.07°$，$T_{ox}=0.7\times10^{-6}$，$T_{oz}=1.5\times10^{-6}$，$T_s=6\times10^{-6}$ N·m，$h_B=35$ N·m·s。

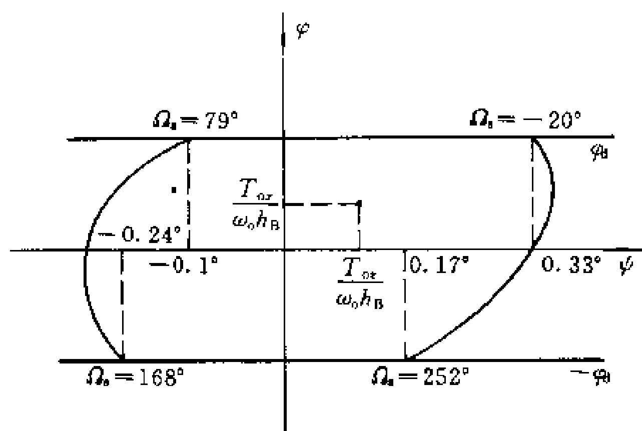


图 7.4-11

当姿态轨迹从死区到达边界时，控制器产生一个喷气脉冲使姿态回到死区内。如在这一个区域，条件式(7.4-23)不成立，姿态轨迹又将向边界移动，控制器将不断发生脉冲迫使姿态留在死区内直到条件式(7.4-23)满足时才停止控制，如图 7.4-11 所示。显然，不能允许每个脉冲力矩作用后，章动圆的轨迹跨过死区与另一边界相遇，因此必须限制喷气推力的冲量。令单个力矩脉冲产生的角动量为 Δh，如初始章动为零，姿态位于边界上的 a 点，一个力矩脉冲作用后章动圆心沿力矩方向移到 b 点(图 7.4-12)，章动圆半径为$\frac{\Delta h}{h_B}$。如章动圆不与另一边界相交，则

$$\Delta h\leqslant\frac{2h_B\varphi_d}{1+\sin\alpha}$$

$$r=\frac{2\Delta h}{h_B}\sin(45°+\frac{\alpha}{2})$$

如已有初始章动，章动圆心在 c 点，姿态处在边界上的 d 点，一个脉冲作用后章动圆心移到 e 点，由几何图形 7.4-12 可看出，力矩脉冲产生的角动量增量应为

$$\Delta h\leqslant\frac{2h_B\varphi_d}{1+\sin\alpha+2\sin(45°+\frac{\alpha}{2})}$$

如 $\alpha=10°$，$\varphi_d=0.07°$，$h_B=35$ N·m·s，则 $\Delta h=0.032$。如力臂为 1.0 m，推力脉冲不小于 10 ms，则推力应小于 3.2 N。

$$r=\frac{2\Delta h}{h_B}\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)$$

图 7.4-12

7.5 单自由度动量控制

7.5.1 单自由度动量构形

在偏置动量系统中，除了沿俯仰轴方向有一偏置动量外，还在平行于滚动-偏航平面上提供一个控制动量 h，但此控制动量只能沿此平面内的某一固定方向改变其数值，所谓自由度是指控制自由度。单自由度动量装置有多种形式。图 7.5-1(a)是单框架动量轮的示意图，由一个飞轮和一个单轴框架组成，框架轴在星体的滚动-偏航平面内，与滚动轴的夹角为 α，飞轮的动量轴与框架轴垂直，框架轴上的电机能使飞轮的转轴绕框架轴转动，转角为 δ。当 $\delta=0$ 时飞轮的角动量 h_B 沿俯仰轴的负方向，控制 δ 角就控制了角动量在滚动-偏航平面上的分量，即有 $h_x=h_B\delta\sin\alpha, h_z=-h_B\delta\cos\alpha$。图 7.5-1(b)中的动量装置由两个固定安装的动量轮组成：一个沿俯仰轴的负方向给出固定的动量偏置 h_B；另一个是"游动"飞轮，它的旋转轴在滚动-偏航平面内与偏航轴的夹角为 α，它的角动量 h 的数值连续可调(包括正、负值)，在滚动-偏航平面内动量装置给出的角动量是 $h_x=h\sin\alpha, h_z=-h\cos\alpha$。图 7.5-1(c)是 V 型动量轮结构，两个成 V 形交叉的动量飞轮的转轴组成的平面垂直于滚动-偏航平面，两平面的交线与偏航轴的夹角为 α，合成角动量在俯仰轴上的分量是 $-h_B$，在滚动-偏航平面上的分量是 h，并有 $h_x=h\sin\alpha, h_z=-h\cos\alpha$。如两个动量轮的角动量 h_1, h_2 与 $-y_b$ 轴的夹角为 β，为了获得给定的动量偏置 $-h_B$ 和控制动量 h，每个动量轮的角动量分配应是

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2\cos\beta} & \dfrac{1}{2\sin\beta} \\ \dfrac{1}{2\cos\beta} & \dfrac{-1}{2\sin\beta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_B \\ h \end{bmatrix}$$

总之，单自由度动量装置提供的控制动量的一般形式是

$$h_x = K_x h, \qquad h_z = - K_z h \tag{7.5-1}$$

$$(K_x^2 + K_z^2 - 1, \qquad K_x, K_z > 0)$$

式中，h 为控制量；K_x, K_z 为分配系数。

动量控制基于反作用飞轮的控制原理——角动量交换，飞轮的控制模型见第 8.3 节。

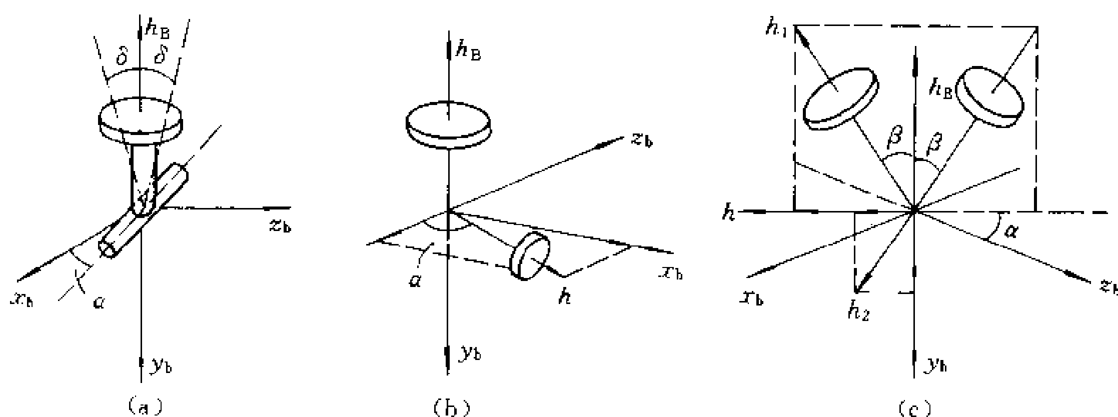


图 7.5-1

7.5.2 俯仰控制

对于各类去耦的俯仰动量控制，姿态转动方程简化为

$$I_y\ddot{\theta}+3\omega_0^2(I_x-I_z)\theta=-\dot{h}_y \tag{7.5-2}$$

左端第二项为重力梯度力矩。通常采用典型的 PID 控制，消除重力梯度力矩引起的稳态指向误差，并有良好的动态品质。动量装置的动量分配回路使俯仰分量 h_y 的变化率符合 PID 控制的要求，即有

$$(-\dot{h}_y)=K(\theta+a\dot{\theta}+b\int\theta \mathrm{d}t)$$

控制回路的开环传递函数

$$\frac{K(as^2+s+b)}{I_ys(s^2+\omega_c^2)} \tag{7.5-3}$$

有一零极点，一对复极点 $\pm j\omega_c(\omega_c^2=3\omega_0^2(I_x-I_z)/I_y)$，并应有两个负实数校正零点 $-c_1$，$-c_2$，闭环根轨迹如图 7.5-2。可见，俯仰姿态控制是最简单的单轴动量控制。

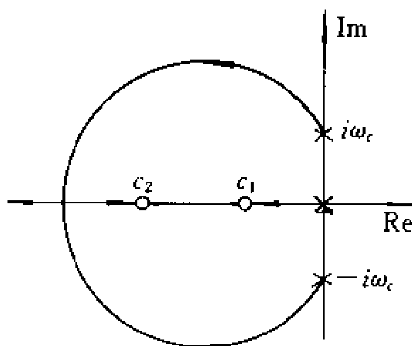


图 7.5-2

7.5.3 滚动-偏航控制

7.4 节叙述了偏置动量卫星对地定向姿态控制的基本特点：滚动-偏航的长周期轨道耦合

控制和短周期章动控制。对于高轨道通信卫星，两者周期相隔甚远，但对低轨道卫星，章动周期约仅为轨道周期的$\frac{1}{4}$，宜于综合分析。令动量装置的俯仰分量为定值$-h_B$，滚动-偏航的动量控制耦合方程为

$$\left.\begin{aligned} I_x\ddot{\varphi} + \omega_o h_B\varphi + h_B\dot{\psi} &= -(\dot{h}_x - \omega_o h_z) \\ I_z\ddot{\psi} + \omega_o h_B\psi - h_B\dot{\varphi} &= -(\dot{h}_z + \omega_o h_x) \end{aligned}\right\} \tag{7.5-4}$$

应用单自由度控制动量模式(7.5-1)，滚动-偏航动量控制式(7.5-4)可分解为两部分。长周期传递函数为

$$\begin{bmatrix}\varphi(s)\\ \psi(s)\end{bmatrix} = \frac{1}{h_B^2(s^2+\omega_o^2)}\begin{bmatrix}K_z h_B(s^2+\omega_o^2)\\ K_x h_B(s^2+\omega_o^2)\end{bmatrix}(-h(s)) \tag{7.5-5}$$

短周期传递函数为

$$\begin{bmatrix}\varphi(s)\\ \psi(s)\end{bmatrix} = \frac{1}{I_x I_z(s^2+\omega_n^2)}\begin{bmatrix}I_z K_x s + K_z h_B\\ K_x h_B - I_x K_z s\end{bmatrix}(-h(s)) \tag{7.5-6}$$

由于控制动量在轨道上陀螺力矩的耦合作用，在开环传递函数中引入一对复零点$\pm i\omega_o$，与姿态动力学特性的复极点$\pm i\omega_o$重合，形成零、极点相消，反映在根轨迹图上，该轨道极点被轨道零点吸引，形成不衰减的姿态振荡。因此，此系统不完全可控，须附加外力矩控制，将姿态的轨道周期振荡幅值限制在外力矩作用的死区内。在滚动回路的短周期传递函数有一零点，$-K_z h_B/K_x I_z$，对章动起阻尼作用，同时对系统中的时延起镇定作用。因此，在此系统中，控制动量的角偏置(即$K_z\neq 0$)是主要模式。章动消除后，在外力矩作用死区内，根据式(5.7-19)，卫星的角动量是

$$\left.\begin{aligned} H_x &= h_B\psi + h_x \\ H_z &= -h_B\varphi + h_z \end{aligned}\right\} \tag{7.5-7}$$

上式的另一种含义是：角动量H_x，H_z储存在姿态偏差和动量装置中。当扰动力矩使姿态发生滚动偏差($\varphi>0$)时，动量装置在偏航轴的负方向产生角动量($h_z<0$)，吸收扰动角动量H_z，使滚动角的变化很小。动量装置的时间常数比轨道周期小得多，在稳态情况下，动量装置的控制动量与滚动角成正比，$h_x=KK_x\phi$，$h_z=-KK_z\varphi$，代入上式，得稳态误差

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{ss} &= \frac{-1}{h_B+KK_z}H_z \\ \psi_{ss} &= \frac{1}{h_B}\left(H_x + \frac{KK_x}{h_B+KK_z}H_z\right) \end{aligned}\right\} \tag{7.5-8}$$

式中H_x，H_z实为扰动角动量，见式(5.7-20)。一般$K_z\gg K_x$。控制系统不能直接限制偏航角的误差，它决定于偏置动量值h_B和在滚动轴上的扰动角动量的积累值H_x。前面已论述，扰动角动量在滚动轴和偏航轴上相互交替，并以长周期螺旋方式增长着。由于没有偏航敏感器，滚动轴上的角动量H_x不可测，而用滚动地球敏感器和动量飞轮的测速器，偏航轴角动量H_z近似地可被测出。通过控制系统施加喷气外力矩，限制角动量H_z的积累，从而间接地限制H_x，间接地限制偏航误差。在H_xH_z平面上设置非饱和区$H_z\leqslant\pm H_d$，在非饱和区内部角动量螺旋式发散，原点在$(\frac{T_{oz}}{\omega_o},\frac{-T_{ox}}{\omega_o})$处。当控制系统测出的偏航角动量$H_z(=-h_B\varphi+h_z)$发散到非饱和区边界时，控制系统不断地驱动喷气外力矩器，迫使角动量沿着$\pm H_d$边界内侧移动，直到轨道运

动的耦合作用使角动量的轨迹自动地从边界朝非饱和区内部移动为止，接着角动量将螺旋式地发散到另一饱和区边界，形成极限环的工作方式，如图 7.5-3 所示。与固定动量系统相比，如 $K_x=0$，$H_d=h_B\varphi_d$，则此极限环的形状与图 7.4-11 所示的相同，极限环的周期也相等。

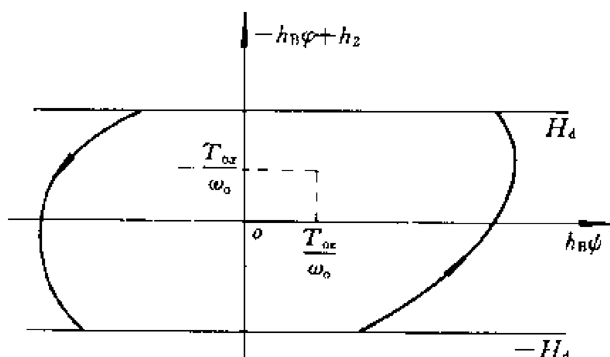


图 7.5-3

在固定动量系统中，当姿态处在死区内部时，系统是不控的，滚动、偏航角误差都决定于死区大小。但对于单自由度动量系统，当角动量处在非饱和区内时，控制系统继续吸收偏航轴上的角动量，修正滚动误差，而且动量控制是线性的、连续的，可以实现比固定动量系统更高精度的滚动控制。提高偏航精度的措施是缩小非饱和区 $\pm H_d$，与固定动量系统相似，H_d 的最小值受脉冲喷气的最小当量的限制。

阻尼滚动-偏航轨道周期振荡的另一方法是将直接动量控制 $\dot{h}_x=K_x\dot{h}=K_xT_c$，$\dot{h}_z=-K_z\dot{h}=-K_zT_c$，改为耦合动量控制，即动量装置的输出为 $\dot{h}_x=K_xT_c+\omega_0 h_z$，$\dot{h}_z=-K_zT_c-\omega_0 h_x$，代入式(7.5-6)右端，补偿轨道动力学耦合作用，形成动力学去耦控制。实现方式是将飞轮工作于速率模式，并在指令力矩 T_c 的积分中混入耦合量，如图 7.5-4 所示。在去耦控制力矩形成中增加一阶惯性环节。

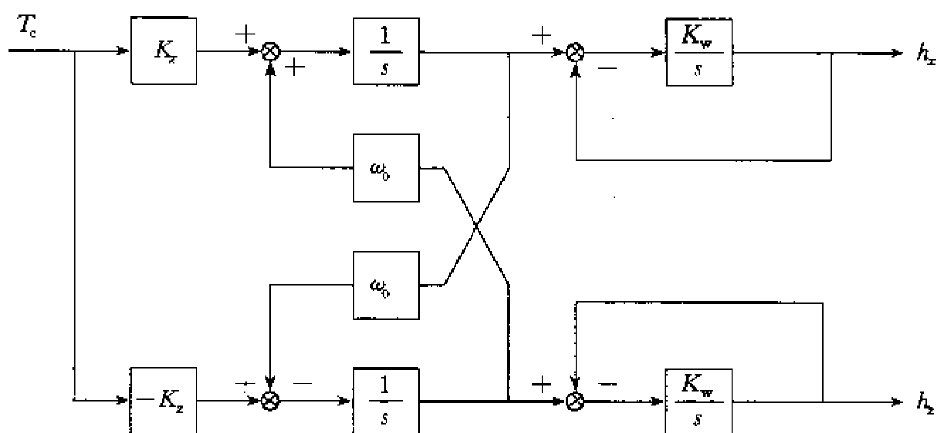


图 7.5-4

滚动传递函数成为

$$\varphi(s)=\frac{K_xI_z(s^2+K_zh_Bs/K_xI_z+\omega_0h_B/I_z)}{I_xI_z(s^2+\omega_0^2)(s^2+\omega_n^2)}\cdot\frac{K_w}{\tau_w s+1}(-T_c(s)) \tag{7.5-9}$$

按式(7.5-1)的定义，控制动量向负偏航轴偏置时，$K_z>0$。当偏置角较大，且俯仰偏置动量亦较大时，此传递函数有两个负零点，见图 7.5-5(a)。如 K_z，h_B 都较小，则零点为带负实部的共轭零点，其频率高于轨道频率，见图 7.5-5(b)。此两种零点都对轨道极点起阻尼作用。

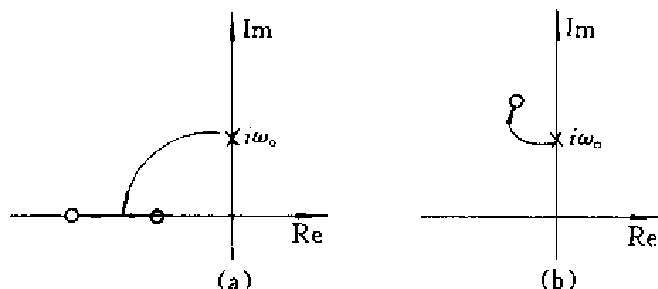


图 7.5-5

在分析短周期章动时，忽略轨道运动的耦合和扰动力矩。根据短周期传递函数式(7.5-6)，在滚动回路中，有一零点 $-K_z h_B/K_x I_z$，对章动起阻尼作用，同时对系统中的时延起镇定作用。因此，在此类系统中控制动量的角偏置(即 $K_z\neq 0$)是主要模式。为加强章动阻尼，在指令力矩控制器，引入超前校正，即传递函数式(7.5-6)中的控制输入$[-h(s)]$为

$$-h(s)=\frac{\tau s+1}{\tau_w s+1}K(\varphi_c(s)-\varphi(s))$$

并入式(7.5-6)，就得章动控制的开环传递函数。它包含三个极点 $s=-\frac{1}{\tau_W}$，$\pm i\omega_n$ 和两个零点 $s=-\frac{1}{\tau}$，$-\frac{h_B K_z}{I_z K_x}$。参看闭路根轨迹图 7.5-6，如 $K_x=0$，则控制动量沿偏航轴的负方向，开环系统只有一个零点 $-\frac{1}{\tau}$，动量装置的时间常数起不稳定作用；如 $K_z=0$，则控制动量沿滚动轴方向，系统中有一个零点落在原点上，对章动阻尼不利。因此，单自由度控制动量的方向偏置起镇定作用。在根轨迹图上，动力学零点中和动量装置时延引起的不稳定性，并且超前控制保证系统无条件稳定。

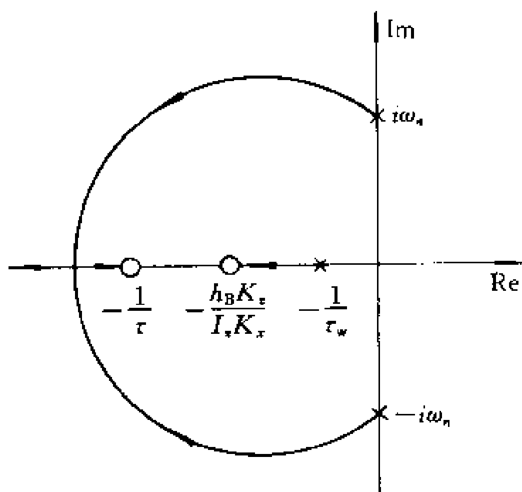


图 7.5-6

7.5.4 非最小相位控制

是否必须将控制动量方向偏置一个角度?控制动量设置在偏航轴上有一个重要优点：可以调节卫星滚动姿态的偏置角，而偏航角不受影响。无扰动力矩作用时，卫星的角动量应是 $H_x=H_z=0$，$H_y=-h_B$。参阅式(7.5-7)，偏航轴上动量偏置 $h_z\neq 0$，$h_x=0$ 使卫星的稳定姿态从 $\varphi_{ss}=\psi_{ss}=0$ 改为 $\varphi_{ss}=\frac{h_{zB}}{h_B}$，$\psi_{ss}=0$，也就是改变了星上仪器对地指向的纬度。

文献[59]提出一种非最小相位控制器可以镇定无偏置($K_x=0$)的系统，并有良好的阻尼品质。这种非最小相位控制器是比例项与积分项之差，并组成正反馈式的闭环系统。根据式

(7.5-5),(7.5-6),并令偏置动量与俯仰轴的正方向一致,即 $h_y=h_B$。这种单自由度动量系统滚动-偏航控制对象的传递函数为

$$\begin{bmatrix}\varphi(s)\\ \psi(s)\end{bmatrix}=\frac{-1}{I_xI_z(s^2+\omega_o^2)(s^2+\omega_n^2)}\times\begin{bmatrix}(-I_zK_xs+K_zh_B)(s^2+\omega_o^2)\\ (h_BK_x+I_xK_zs)(s^2+\omega_o^2)\end{bmatrix}(-h(s))$$

(7.5-10)

由于偏置动量方向的改变,控制对象的传递函数包含(-1)。非最小相位控制器和动量轮的传递函数是

$$-h(s)=K(\tau-\frac{1}{s})\frac{K_w}{\tau_ws+1}(\varphi_c(s)-\varphi(s)) \qquad (7.5\text{-}11)$$

当 $K_x=0,K_z=+1$ 时,式(7.5-10)和(7.5-11)组成一个正反馈的闭环系统,如图 7.5-7 所示。在开环传递函数中包括一个新的等于零的极点和一个在右半面的零点 $s=\frac{1}{\tau}$,闭环的根轨迹

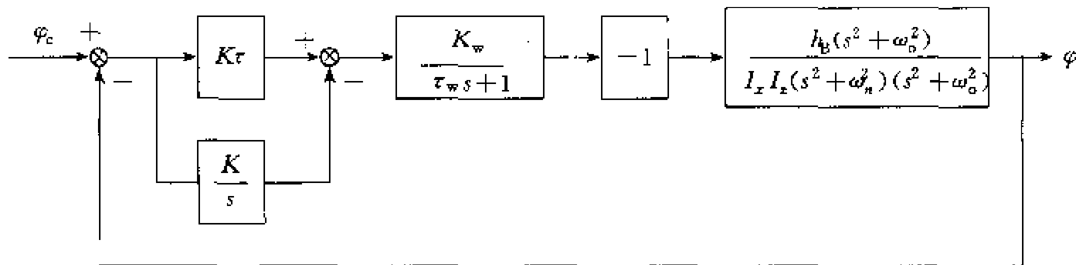


图 7.5-7

如图 7.5-8 所示。在正反馈闭环系统的根轨迹上,开环传递函数的幅角是 360°,而不是负反馈情况的 180°。另外,在实轴上的根轨迹的右边零、极点数应是偶数,而在负反馈情况则是奇数。为了使闭环系统在左半平面有一对频率最低的复根和一对负实根,动量轮的零点幅值 $\frac{1}{\tau_w}$ 应大

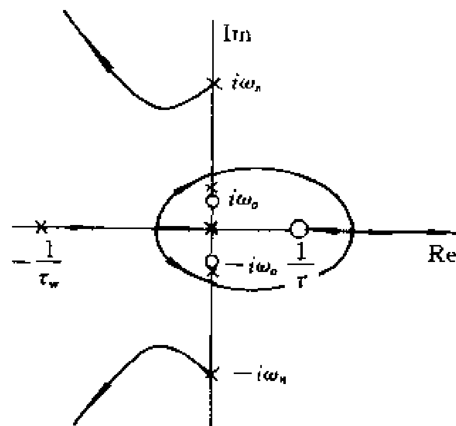


图 7.5-8

于 ω_n,而非最小相位的零点幅值 $\frac{1}{\tau}$ 应小于 ω_n。此系统能有效地阻尼长周期姿态运动,由于引入负积分环节,对消除滚动稳态误差是有利的。对于章动阻尼,如令非最小相位控制器的 $\tau=\frac{1}{\omega_n}$,忽略动量轮的时间常数,则从式(7.5-11)得出的控制动量的变化速率 $\dot{h}$ 将正比于横向速率 ω_x,ω_z 之和,更有利于阻尼章动运动。

7.6 两自由度动量控制

在此类系统中控制角动量 h_x, h_z 是两个相互独立的控制量。这种动量装置的结构见图 7.6-1。图(a)的结构由三个独立的动量轮组成，它们分别给出偏置动量 h_B 和控制动量 h_x, h_y，后者称为双轮动量控制。图(b)是一个双框架的动量装置，内框架轴沿偏航轴 z_b 的方向，外框轴与滚动轴 x_b 方向一致，飞轮的转动轴指向俯仰轴 y_b 的负方向。此动量装置同时提供偏置动量和沿滚动、偏航轴的控制动量，在框架角很小的情况，有 $h_x=\gamma h_B, h_z=-\delta h_B$。$\gamma, \delta$ 是内外框的转角，因此实际控制量是框架转角。

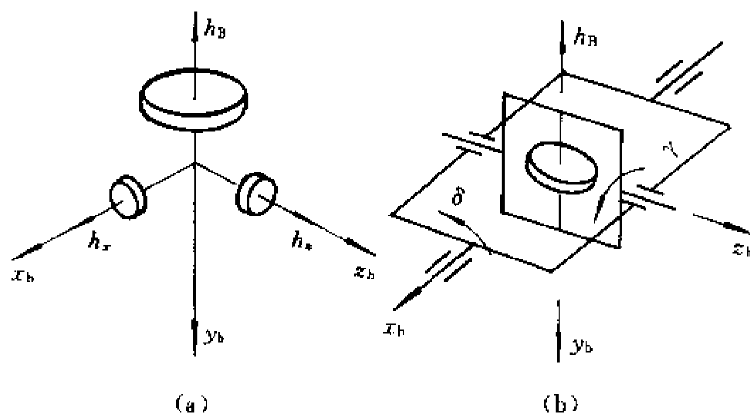


图 7.6-1

7.6.1 双轮动量控制

在双轮动量控制回路中，滚动轴和偏航轴的反作用轮动量控制传递函数可以独立选择，提供更充分的双通道解耦可能性。不仅解耦控制动力学，并解耦姿态动力学。基于控制动力学方程(7.5-6)，令滚动动量控制采用高增益滚动反馈，直接加强滚动阻尼强度。而在偏航动量控制中，主要引入滚动超前校正，以补偿滚动陀螺力矩对偏航的激励，削弱滚动-偏航的耦合，使系统成为两个独立的二阶阻尼系统，类似阻尼两个单自由度转动的刚体。在滚动被快速阻尼后，偏航陀螺效应 $-h_B\dot{\psi}$ 反应到滚动误差中，消除剩余误差又将同时校正偏航。由于不直接测量偏航角，偏航阻尼的强度很小(为 $\omega_o h_B$)，稳态误差较大，这是无偏航测量的偏置动量系统的普遍规律。

7.6.2 双框架动量控制

令动量装置的角动量为 h_g，根据角动量定理，有

$$\dot{\boldsymbol{h}}_g + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{h}_g = -\boldsymbol{M}_g \tag{7.6-1}$$

$\boldsymbol{M}_g$ 就是动量装置作用在星体上的反作用力矩。角动量 $\boldsymbol{h}_g$ 由三部分组成，一是飞轮旋转角动量，另两部分是内、外框转动的角动量：

$$\boldsymbol{h}_g = \boldsymbol{h}_w + \boldsymbol{h}_i + \boldsymbol{h}_o$$

下标 w,i,o 分别代表飞轮、内框、外框。令飞轮和内、外框的惯量矩阵为对角矩阵，主惯量分别是 $I_{wx}, I_{wy}, I_{wz}; I_{ix}, I_{iy}, I_{iz}; I_{ox}, I_{oy}, I_{oz}$。再令内、外框相对于空间的转速为 ω_g^i, ω_g^o。参阅图 7.6-1

(b)，可直接写出此转速在内、外框的各个分量为

$$\boldsymbol{\omega}_g^i = \begin{bmatrix} \omega_x + \dot{\delta} - \omega_o\gamma \\ \omega_y \\ \omega_z + \dot{\gamma} + \omega_o\delta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_g^o = \begin{bmatrix} \omega_x + \dot{\delta} \\ \omega_y \\ \omega_z + \omega_o\delta \end{bmatrix}$$

$\omega_x,\omega_y,\omega_z$ 是星体转速，由于飞轮固定在内框上，两者角动量之和在内框坐标系中是

$$(\boldsymbol{h}_w + \boldsymbol{h}_i)_i = \begin{bmatrix} (I_{wx} + I_{ix})(\omega_x + \dot{\delta} - \omega_o\gamma) \\ I_{iy}\omega_y - h_B \\ (I_{wz} + I_{iz})(\omega_z + \dot{\gamma} + \omega_o\delta) \end{bmatrix}$$

$(\ )_i$ 表示在内框坐标上的分量(下同)。参阅图 7.6-1(b)，将外框坐标系绕内框轴转 γ 角即得内框坐标系，不难得出飞轮和内框角动量在外框坐标系中分量的一阶式为

$$(\boldsymbol{h}_w + \boldsymbol{h}_i)_o = \begin{bmatrix} (I_{wx} + I_{ix})(\omega_x + \dot{\delta} - \omega_o\gamma) - \gamma(I_{iy}\omega_y - h_B) \\ I_{iy}\omega_y - h_B \\ (I_{wz} + I_{iz})(\omega_z + \dot{\gamma} + \omega_o\delta) \end{bmatrix}$$

将上式加上外框角动量即得 $\boldsymbol{h}_g$ 在外框坐标系中的分量

$$(\boldsymbol{h}_g)_o = \begin{bmatrix} I_{ox}(\omega_x + \dot{\delta}) + (I_{wx} + I_{ix})(\omega_x + \dot{\delta} - \omega_o\gamma) - \gamma(I_{iy}\omega_y - h_B) \\ (I_{oy} + I_{iy})\omega_y - h_B \\ I_{oz}(\omega_z + \omega_o\delta) + (I_{wz} + I_{iz})(\omega_z + \dot{\gamma} + \omega_o\delta) \end{bmatrix}$$

将星体坐标系绕外框轴转 δ 角，即得外框坐标系。因此，角动量 $\boldsymbol{h}_g$ 在星体坐标系中的分量是

$$(\boldsymbol{h}_g)_b = \begin{bmatrix} I_{ox}(\omega_x + \dot{\delta}) + (I_{wx} + I_{ix})(\omega_x + \dot{\delta} - \omega_o\gamma) - \gamma(I_{iy}\omega_y - h_B) \\ (I_{oy} + I_{iy})\omega_y - h_B \\ I_{oz}(\omega_z + \omega_o\delta) + (I_{wz} + I_{iz})(\omega_z + \dot{\gamma} + \omega_o\delta) + \delta((I_{oy} + I_{iy})\omega_y - h_B) \end{bmatrix}$$

俯仰通道控制系统保持星体的转速 $\omega_y = -\omega_o$，在上式中略去二阶小量(略去下标 b)，得

$$\boldsymbol{h}_g = \begin{bmatrix} I_{gx}(\omega_x + \dot{\delta}) + \gamma h_B \\ -I_{gy}\omega_o - h_B \\ I_{gz}(\omega_z + \dot{\gamma}) - \delta h_B \end{bmatrix} \tag{7.6-2}$$

I_{gx},I_{gy},I_{gz} 为框架和飞轮的组合惯量。将上式代入式(7.6-1)，用欧拉角表示星体的转速，再略去 ω_o 与框架惯量的乘积，得出双框架动量装置在滚动、偏航轴方向的动力学方程

$$\left.\begin{aligned} I_{gx}(\ddot{\varphi} + \ddot{\delta}) + h_B(\dot{\psi} + \dot{\gamma}) + \omega_o h_B(\varphi + \delta) &= -M_{gx} \\ I_{gz}(\ddot{\psi} + \ddot{\gamma}) - h_B(\dot{\varphi} + \dot{\delta}) + \omega_o h_B(\psi + \gamma) &= -M_{gz} \end{aligned}\right\} \tag{7.6-3}$$

由此可看出框架的惯量将引起新的章动，其频率为

$$\omega_n' = h_B\sqrt{\frac{1}{I_{gx}I_{gz}}}$$

显然，此章动频率 ω_n' 比星体惯量引起的章动频率 ω_n 高得多，但不影响控制系统的初步设计。略去框架惯量，将式(7.6-3)并入角动量方程(5.7-3)，再略去 ω_o 与星体惯量的乘积，简化后，

最后可列出带双框架动量装置的卫星滚动-偏航姿态的动力学方程为

$$\left.\begin{aligned} I_x\ddot{\varphi}+\omega_o h_B\varphi+h_B\dot{\psi}&=-h_B\dot{\gamma}-\omega_o h_B\delta+T_{cx}+T_{dx}\\ I_z\ddot{\psi}+\omega_o h_B\psi-h_B\dot{\varphi}&=h_B\dot{\delta}-\omega_o h_B\gamma+T_{cz}+T_{dz}\end{aligned}\right\}\tag{7.6-4}$$

除控制力矩 T_{cx},T_{cz}外，这里框架角 δ,γ 是控制量，它们与前面所述的控制角动量 h_x,h_z 是等效的。虽然两者是相互独立的，但两者的控制作用是耦合的。在这种两自由度动量系统中仅把 h_x,h_z(即 δ,γ)作为独立的控制量，此系统是不完全可控的，不难证明其可控性矩阵的行列式值为零。而将 $-\dot{h}_x+\omega_o h_z$，$-\dot{h}_z-\omega_o h_x$ 作为控制量，则系统是完全可控的，并且控制作用之间没有耦合作用。实现这种控制方式的框图是图 7.6-2。令控制量 $u_x=-\dot{h}_x+\omega_o h_z$，$u_z=-\dot{h}_z-\omega_o h_x$，将此控制信号输入给一个频率为 ω_o 的去耦振荡器[60]，它的输出是驱动动量装置的指令 h_{cx},h_{cz}。如动量装置的实际动量输出 h_x,h_z 与此指令完全符合，则作用在星体上的控制力矩就等于控制量 $-u_x$，$-u_z$。

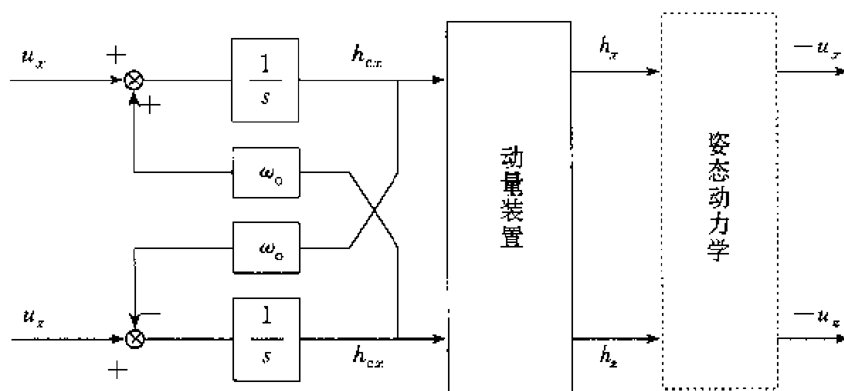


图 7.6-2

针对控制对象式(7.6-4)，最简单的反馈控制规律是

$$\left.\begin{aligned} -h_B\dot{\gamma}-\omega_o h_B\delta&=-KK_x(\tau\dot{\varphi}+\varphi)\\ h_B\dot{\delta}-\omega_o h_B\gamma&=KK_z(\tau\dot{\varphi}+\varphi)\end{aligned}\right\}\tag{7.6-5}$$

式中 K_x,K_z 为力矩分配系数。此式和式(7.6-4)组成的姿态控制系统，与外力矩控制固定动量系统的情况相似。由于框架角连续可控，此系统能更有效地阻尼长、短周期运动。如令控制参数 $KK_x \gg \omega_o h_B$，在扰动力矩作用下，长、短周期运动阻尼后，此控制系统的姿态输出就是解式(7.4-4)。在该式中力矩偏置角 α 与式(7.6-5)中的分配系数的对应关系是 $K_x-\cos\alpha$，$K_z-\sin\alpha$。实际上，在采用喷气推力控制的固定动量系统中，在喷气冲量的死区范围内姿态自由漂移，滚动、偏航的控制精度是靠缩小滚动角的死区获得的，姿态误差达不到式(7.4-4)给出的精度。在单自由度动量系统中，利用动量装置与星体之间的角动量交换和设置卫星角动量饱和区，实现滚动的直接控制和偏航的间接控制。在非饱和区内扰动力矩使卫星角动量螺旋式发散，单自由度的动量装置主要吸收沿偏航轴上的扰动角动量，使滚动角连续可控。但沿滚动轴上的扰动角动量直接积累到偏航角的偏差中去，只得将卫星沿偏航轴的角动量限制在较小的范围内，起到间接地限制偏航角漂移的作用，偏航角的误差也达不到式(7.4-4)给出的精度。在双框架动量系统中，偏置动量轮的转轴可以绕俯仰轴作圆锥运动。因此沿滚动、偏航轴上的扰动角动量都可转移到两个独立的框架角中去，偏航角间接地被控制在小范围内交变，不会螺旋

式地发散,因而能实现姿态高精度定向。

卫星角动量的饱和范围只受框架角饱和值的限制。将式(7.4-4)中的滚动角公式代入式(7.6-5),略去时间常数 τ,可得框架角 δ,γ 的调节规律:

$$\delta=\frac{T_{ox}}{\omega_o h_B}\tan\alpha\sin\omega_o t+\frac{T_{ox}}{\omega_o h_B}(1-\cos\omega_o t)+\frac{T_s}{\omega_o h_B}\sin 2\alpha\sin\omega_o t+\frac{T_s}{h_B}t\sin\omega_o t$$

$$\gamma=\frac{T_{ox}}{\omega_o h_B}\sin\omega_o t-\frac{T_{ox}}{\omega_o h_B}\tan\alpha(1-\cos\omega_o t)+\frac{T_s}{\omega_o h_B}\cos 2\alpha\sin\omega_o t+\frac{T_s}{h_B}t\cos\omega_o t$$

框架角螺旋式地逐渐增大与扰动角动量的变化形式相似。当框架角趋向饱和值时,喷气外力矩将消除卫星已积累的扰动角动量(储存在框架角中),使框架角回到零位,重新开始吸收扰动角动量。框架角的饱和值可以比卫星的姿态误差允许值大得多,这样就能大大地延长去饱和的周期。如 $T_{ox}=0.7\times10^{-6}$,$T_s=6\times10^{-6}\text{N}\cdot\text{m}$,$h_B=35\ \text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$,则偏航角的最大误差是 0.17°,如框架角的饱和值为 6°,则去饱和的周期为 7 天。

7.7 失控和定向恢复

在 5.6.2 节已阐明细长形结构的双旋卫星的自旋运动是不稳定的,镇定的方法是在消旋平台上安放高效率的章动阻尼器,或采用主动章动阻尼系统。当平台的消旋系统失效后,随着星体内的能量损耗,卫星的章动将逐渐地发散。

7.7.1 卫星的平旋运动

在第 5.5.3 节已说明轴对称或非轴对称旋转刚体的自由运动,它的转速矢量的轨迹在惯量椭球面上形成闭合的本体极迹,每一条本体极迹对应一组给定的初始角动量和动能。如在初始状态,刚体绕最小主惯量轴旋转,动能最大,椭球中心离不变平面的距离最远。当旋转体的能量逐渐地损耗时,椭球中心离不变平面的距离不断地缩短。当椭球的最短半轴(即最大主惯量轴)与不变平面相切时,椭球中心离此平面的距离最短,刚体处在最小动能状态,本体极迹变成一个极点,这时刚体绕最大主惯量轴自转。因此,自旋体失控后姿态翻滚的过程相当于它的转速矢量在惯量椭球上的轨迹,将从一条本体极迹转入另一条本体极迹。图 7.7-1 表示转速矢量从最小主惯量轴上的极点出发沿着螺旋式发散的轨迹。但轴对称与非轴对称自旋体的翻滚过程不同。轴对称体的本体极迹的螺旋方向总是指向同一个本体坐标轴的方向(图 7.7-1(a)),而非轴对称体的本体极迹跨过分界线后,它的螺旋方向转过 90°,最后逐渐收敛到另一个在 x 轴上的极点(图 7.7-1(b))。这种运动状态称为平旋运动。

假定卫星的惯量特性是 $I_x>I_y>I_z$,预定的自旋轴是 z 轴,根据 5.5.3 节的论述,惯量椭球上的分界线是以下式表示的分界平面

$$\frac{\omega_z}{\omega_x}=\pm\sqrt{\frac{I_x(I_x-I_y)}{I_z(I_y-I_z)}}$$

与此椭球的交线。此分界平面把本体坐标中的转速状态空间分成四个区——正、负自旋区和正、负平旋区,如图 7.7-2 所示。在自旋和平旋运动中刚体运动的相对能量 $\frac{T}{H^2}$ 的差别如下:

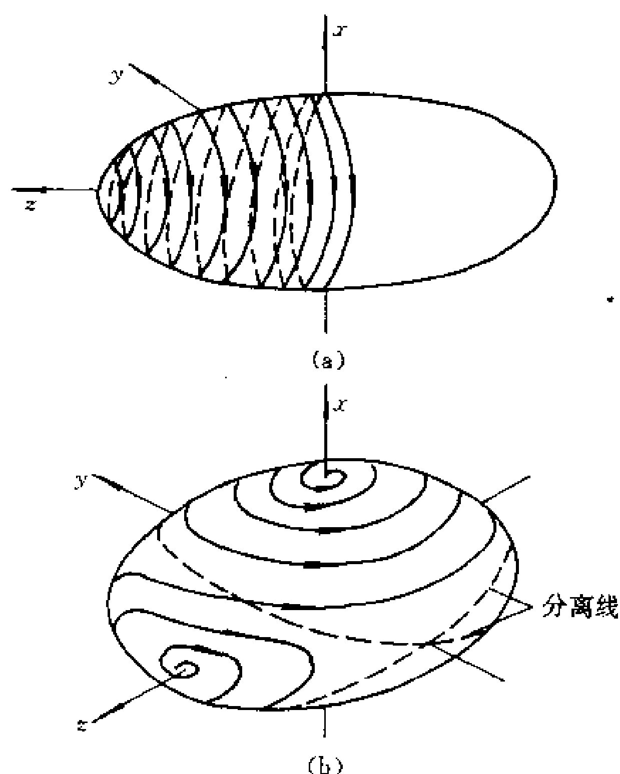


图 7.7-1

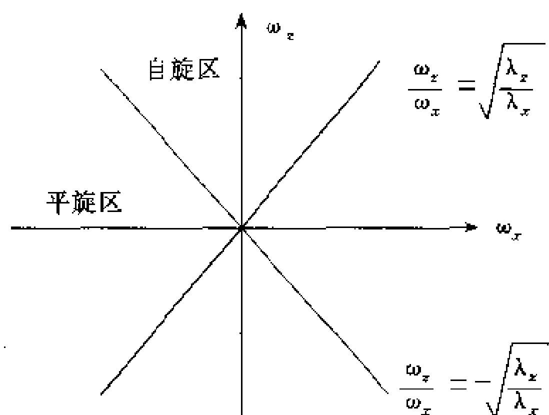


图 7.7-2

自旋运动
$$\frac{1}{2I_y}<\frac{T}{H^2}\leqslant\frac{1}{2I_z} \tag{7.7-1}$$

平旋运动
$$\frac{1}{2I_x}\leqslant\frac{T}{H^2}<\frac{1}{2I_y} \tag{7.7-2}$$

在自旋运动中 z 轴与角动量 $\boldsymbol{H}$ 之间的夹角为章动角 θ，而在平旋运动中章动角 θ' 是指 x 轴与 $\boldsymbol{H}$ 之间的夹角，图 7.7-3 示出这两种章动角的可能范围。

卫星失控后，失去了原有的自旋运动，最后卫星绕最大主惯量的横轴旋转。由于消旋轴承摩擦力矩的作用，平台与转子之间无相对运动，见图 7.7-4。将卫星的预定自旋轴重新定向，恢复到起始的纯自旋状态，这是细长形双旋卫星控制系统设计中的一个重要课题。在文献[60，

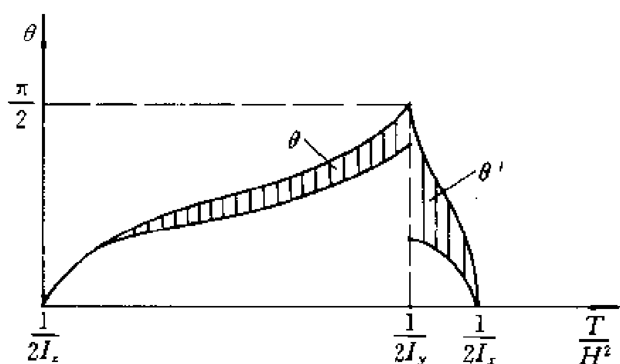


图 7.7-3

61]中分析了卫星自旋轴恢复定向的问题，下文列举一些最基本的要点。

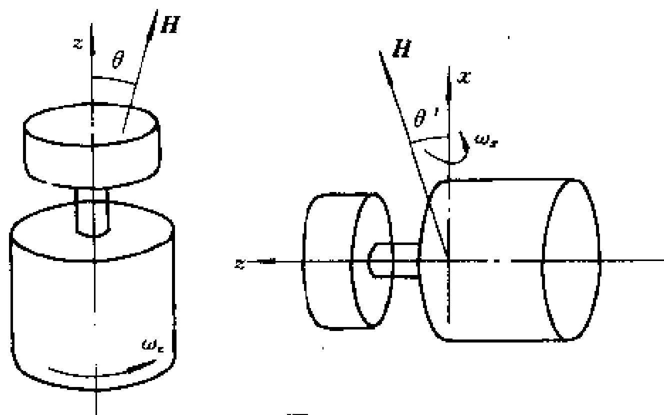


图 7.7-4

7.7.2 常值力矩法

要重新建立卫星的自旋运动，最简单的办法是利用卫星上的切向喷气推力器，将卫星重新起旋。像失控时那样，这种起旋方式要发生大角度章动运动。精确地求解卫星的运动参数是较复杂的，但可以定性分析运动变化的规律。细长形卫星在星体坐标中的动力学方程是

$$\left.\begin{aligned} \dot{\omega}_x - \lambda_x\omega_y\omega_z &= \alpha_x \\ \dot{\omega}_y + \lambda_y\omega_z\omega_x &= \alpha_y \\ \dot{\omega}_z - \lambda_z\omega_x\omega_y &= \alpha_z \end{aligned}\right\} \qquad (7.7\text{-}3)$$

式中，$\lambda_x=\frac{1}{I_x}(I_y-I_z)>0$；$\lambda_y=\frac{1}{I_y}(I_x-I_z)>0$；$\lambda_z=\frac{1}{I_z}(I_x-I_y)>0$；$\alpha_x,\alpha_y,\alpha_z$ 是各星体轴上的外力矩产生的角加速度。如卫星是轴对称的，有 $\lambda_x=\lambda_y=\lambda,\lambda_z=0$，绕 z 轴的自旋运动和横向的翻转运动，没有耦合作用；如卫星已绕 x 轴自旋，即 $\omega_x=\omega_x(0),\omega_y=\omega_y(0)=0,\omega_z=\omega_z(0)=0$。在起旋喷气推力器的作用下（$\alpha_z>0,\alpha_x=\alpha_y=0$）卫星绕 z 轴的转速将线性地增长，而横向角速率的变化规律是

$$\omega_x = \omega_x(0)\cos\eta(t)$$

$$\omega_y = -\omega_t(0)\sin\eta(t)$$

式中 $\eta(t)=\int_0^t \lambda\omega_z(\tau)\mathrm{d}\tau$。卫星的转速矢量将绕 z 轴作圆锥运动。随着 ω_z 的增长，圆锥运动的频率不断加快，圆锥角不断减少，最后可以接入章动阻尼系统使卫星绕 z 轴纯自旋。显然，由于喷气外力矩的作用，定向恢复后，卫星的角动量偏离了原来的起始方向，需要重新调整姿态。对于非轴对称卫星，起旋过程比较复杂，针对动力学方程(7.7-3)，引入新自变量——自旋角：

$$\varphi = \int_0^t \omega_z(\tau)\mathrm{d}\tau$$

这样可将前两个方程化成(当 $\alpha_x=\alpha_y=0$)

$$\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}\varphi} - \lambda_x\omega_y = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}\varphi} + \lambda_y\omega_x = 0$$

它的解是

$$\omega_x = \omega_t(0)\sqrt{\lambda_x}\cos(\sqrt{\lambda_x\lambda_y}\,\varphi+\varphi_0)$$

$$\omega_y = -\omega_t(0)\sqrt{\lambda_y}\sin(\sqrt{\lambda_x\lambda_y}\,\varphi+\varphi_0)$$

式中，$\omega_t(0)=(\omega_x^2(0)+\omega_y^2(0))^{\frac{1}{2}}$是初始横向角速率，$\varphi_0$ 是它的相角。将此角速率公式代入式(7.7-3)中第三个方程，可得自旋角 φ 的变化运动方程

$$\ddot{\psi} + (\lambda_z\lambda_y\lambda_x)\omega_t^2(0)\sin\psi = 2\sqrt{\lambda_x\lambda_y}\,\alpha_z \tag{7.7-4}$$

式中 $\psi=2(\sqrt{\lambda_x\lambda_y}\,\varphi+\varphi_0)$。由此可以看出，卫星自旋角 φ 的变化是一个振荡过程，它类似在常力矩作用下一个摆的运动。卫星转速矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的端点在星体坐标中的一个椭圆形的圆柱面上移动，该圆柱的横截面的椭圆方程是

$$\frac{\omega_x^2}{\lambda_x} + \frac{\omega_y^2}{\lambda_y} = \omega_t^2(0)$$

根据方程(7.7-4)，要使卫星能起旋起来，须产生一个较大的角加速度 α_z，以使自旋角不断地增大。起旋条件是

$$\alpha_z \geqslant \frac{1}{2}\lambda_z\sqrt{\lambda_x,\lambda_y}\,\omega_t^2(0)$$

换言之，如果星体的初始转速矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 在一个椭圆形的圆柱体内，此圆柱面的方程是

$$\frac{\omega_x^2}{\sqrt{\dfrac{\lambda_x}{\lambda_y}}} + \frac{\omega_y^2}{\sqrt{\dfrac{\lambda_y}{\lambda_x}}} = \frac{2\alpha_z}{\lambda_z}$$

则不论 $\boldsymbol{\omega}$ 的初始条件如何，式(7.7-4)中的 $\ddot{\varphi}$ 始终是正值，故 $\dot{\omega}_z>0$，星体能被起旋。反之，尽管切向推力器产生起旋力矩，但自旋运动不能脱离周期性的振荡状态。

7.7.3 脉冲力矩法

采用脉冲力矩恢复卫星的自旋状态的基本思想是：根据章动的相位，旋加合适的脉冲喷气力矩 $\boldsymbol{T}$，使卫星的相对能量$\frac{E_k}{H^2}$不断地提高。根据条件式(7.7-1)，(7.7-2)随着相对能量的增长，

卫星将从平旋运动跨过分界区域进入自旋运动，然后继续缩小章动角，趋向纯自旋状态。在喷气力矩 $\boldsymbol{T}$ 作用下，卫星的角动量幅值和能量的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}H^2}{\mathrm{d}t}=2\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{T}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{T}$$

应用此关系式可以求得相对能量的变化率

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{E_k}{H^2}\right)&=\frac{1}{H^2}\left(\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t}-\frac{E_k}{H^2}\frac{\mathrm{d}H^2}{\mathrm{d}t}\right)\\&=\frac{1}{H^2}\left[\left(1-2I_x\frac{E_k}{H^2}\right)\omega_xT_x+\left(1-2I_y\frac{E_k}{H^2}\right)\omega_yT_y+\left(1-2I_z\frac{E_k}{H^2}\right)\omega_zT_z\right]\end{aligned}\tag{7.7-5}$$

要使卫星从平旋运动状态(7.7-2)迅速地解脱，应使卫星相对能量的变化率为正，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{E_k}{H^2}\right)>0$$

由于 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ 是周期性的，根据条件式(7.7-1)，(7.7-2)和(7.7-5)，喷气脉冲力矩的相位应满足下列主要条件：

$$\omega_xT_x<0,\qquad \omega_yT_y>0,\qquad \omega_zT_z>0$$

式中 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ 为速率陀螺的测量值。当卫星从平旋状态进入自旋状态式(7.7-1)后，外力矩相位条件应改为

$$\omega_xT_x<0,\qquad \omega_yT_y<0,\qquad \omega_zT_z>0$$

使相对能量继续增长，卫星的章动将迅速地衰减。采用此法的关键在于，如何根据安装在星上的敏感器的信号，区分平旋与自旋状态。

7.7.4 动量转移法

双旋卫星失控后，平台与转子之间没有相对运动，整个卫星翻滚成绕横轴(最大惯量轴)旋转，此轴在空间中的方向与失控前的卫星角动量方向一致。要将卫星恢复成绕原定纵轴(最小惯量轴)旋转，可以通过电机力矩启动消旋平台和转子，由此引起的陀螺力矩和惯量耦合力矩使卫星在纵轴方向获得角动量，卫星的角动量从横轴逐渐地转移到纵轴上去。由于无外力矩作用，卫星角动量的方向是恒定的，因此卫星纵轴将逐渐向失控前的角动量方向机动，卫星姿态逐渐恢复成失控前的状态。

这种角动量转移法也用于带角动量储存的三轴稳定卫星的姿态捕获机动。角动量轮的旋转轴与星体俯仰轴平行，远地点发动机点火前，卫星绕星体偏航轴自旋，内部的角动量轮处在静止状态，点火后，喷气力矩将此旋转轴垂直于轨道平面，并建立姿态捕获机动前的初始角动量。星体的俯仰轴与轨道坐标系中的俯仰轴相垂直，这种状态与双旋卫星的失控状态非常相似，如启动角动量轮，它将逐渐成为卫星角动量的最主要成分，因此星体的俯仰轴将很靠近轨道法线，这就实现了姿态捕获。

显然，这种姿态机动过程包含有大角度章动运动，要获得解析解是困难的。在文献[60]中，根据卫星系统的角动量和动能的基本性质，用几何法定性地描述了姿态机动的规律。在该方法中，选择卫星平台坐标系 $ox_py_pz_p$ 为参考坐标系，且各坐标轴沿整星的主惯量轴，z_p 轴是自旋轴。卫星角动量 $\boldsymbol{H}$ 在空间中是恒定的，但在转动着的卫星坐标中却是变化的，而它的幅值是定

值，因此角动量 $\boldsymbol{H}$ 的端点 A 在卫星坐标系中的一个圆球面上移动，此圆球为角动量球，见图 7.7-5。球面的方程是

$$H^2 = H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 \quad (7.7\text{-}6)$$

H_x, H_y, H_z 是整星的角动量 $\boldsymbol{H}$ 在各卫星坐标轴上的分量。假定转子是对称的，令卫星的角动量由特定的两部分组成：

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_p' + \boldsymbol{h}_r \quad (7.7\text{-}7)$$

$\boldsymbol{H}_p'$ 是不考虑转子轴向惯量在内的卫星角动量，下标 p 表示这部分星体固连于平台或与平台之间没有相对转动自由度；$\boldsymbol{h}_r$ 是转子轴向角动量，它始终沿着 z 轴。卫星平旋时，$\boldsymbol{H}_p' = \boldsymbol{H}$。由于 $\boldsymbol{H}$ 是恒定的，根据式(7.7-7)，初看起来，只要让转子不断地获得 $\boldsymbol{h}_r$，$\boldsymbol{H}_p'$ 便将逐渐地减小，就可实现姿态恢复。但式(7.7-7)是矢量和，只有在一定条件下，$\boldsymbol{h}_r$ 的增长才能迫使 $\boldsymbol{H}_p'$ 减小。令整星的动能也由该两部分组成，不计及转子的旋转动能时，星体的动能为 E_k'，

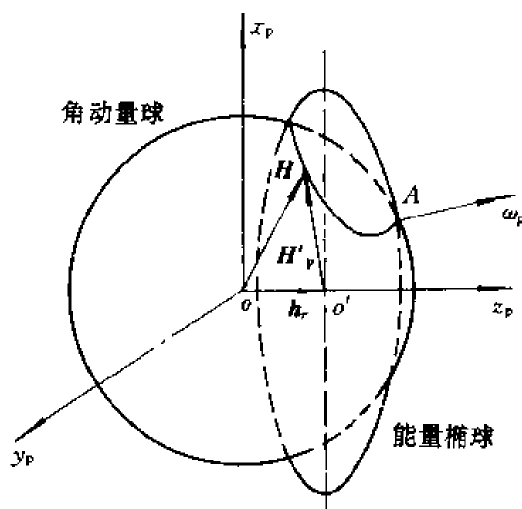


图 7.7-5

$$E_k' = \frac{1}{2}\boldsymbol{H}_p' \cdot \boldsymbol{\omega}_p = \frac{1}{2}\left(\frac{H_{px}'^2}{I_x} + \frac{H_{py}'^2}{I_y} + \frac{H_{pz}'^2}{I_z}\right) \quad (7.7\text{-}8)$$

$\boldsymbol{\omega}_p$ 是卫星平台坐标系的转速；I_x, I_y, I_z 是卫星体的主惯量，但 I_z 中不包含转子的轴向惯量。平台与转子之间只有一个旋轴自由度，因此 $H_{px}' = H_x$，$H_{py}' = H_y$。根据式(7.7-7)，能量 E_k' 又为

$$E_k' = \frac{1}{2}\left[\frac{H_x^2}{I_x} + \frac{H_y^2}{I_y} + \frac{(H_z - h_r)^2}{I_z}\right] \quad (7.7\text{-}9)$$

此方程在星体坐标中描绘出一个椭球(图 7.7-5)，它的轴线长度与对应的主惯量的平方根成正比，这里也称此椭球为能量椭球。它的大小决定于动能 E_k'，它的长轴与 x 轴平行，椭球中心 o' 在 z 轴方向移过 h_r。对于给定的动能 E_k' 和角动量 $\boldsymbol{h}_r$，卫星角动量 $\boldsymbol{H}$ 的端点也应在此椭球面上，因此卫星转动时，角动量 $\boldsymbol{H}$ 的端点 A 移动的轨迹就是能量椭球与动量球的交线，此交线是闭合的，卫星坐标的转速 $\boldsymbol{\omega}_p$ 沿着 A 点处能量椭球的法线方向。在平旋初始状态卫星绕最大主惯量轴旋转，转子绕自身转轴的角动量为零，这时卫星的动能最小，能量椭球与角动量球相切，切点在 x 轴上是两个对称点。电机起旋后，在常值力矩作用下，转子获得角动量，能量椭球的球心 o' 沿 z 轴方向移动，它与角动量球有两条对称于 z 轴的闭合交线。当 h_r 继续增大时，A 点的轨迹将逐渐地倒向 z 轴；当 h_r 增大到某一值时，能量椭球的一边将移出角动量球，这时两者形成一条包围 z 轴的闭合交线。因此，角动量 $\boldsymbol{H}$ 与转速 $\boldsymbol{\omega}_p$ 在星体坐标系中扫出两个沿 z 轴的圆锥，这表明卫星从平旋运动转入自旋运动。

在这种方法中，应合适地控制电机力矩和能量椭球的尺度，使能量椭球沿 z 轴移动时始终与动量球接近相切，使 A 点的轨迹在动量球上始终形成比较小的闭合曲线，最后，当 A 点的轨迹围绕 z 轴时，角动量 $\boldsymbol{H}$ 与 z 轴的夹角较小，也就是自旋轴的剩余章动角较小。显然，当卫星角动量从 x 轴移到 z 轴时，能量 E_k'(包括卫星的横向动能和平台绕自旋轴的动能)由初始最大值逐渐趋向于终了的最小值。

根据角动量定理，在平台坐标系中卫星姿态动力学方程是

$$\left.\begin{aligned} &I_x\dot{\omega}_{px}-(I_y-I_z)\omega_{pz}\omega_{py}+h_r\omega_{py}=0\\ &I_y\dot{\omega}_{py}-(I_z-I_x)\omega_{pz}\omega_{px}-h_r\omega_{pz}=0\\ &I_z\dot{\omega}_{pz}-(I_x-I_y)\omega_{px}\omega_{py}=-T\\ &\dot{h}_r=T \end{aligned}\right\} \tag{7.7-10}$$

T 为电机力矩。将此方程组代入动能公式(7.7-8)，微分后，可求得动能 E'_k 的变化率为

$$\dot{E}'_k=-\omega_{pz}\dot{h}_r$$

因此，电机力矩的控制要求是使平台转速 ω_{pz} 在角动量转移过程中保持为正值。方程组(7.7-10)的初始条件是 $\omega_{px}=\omega_o,\omega_{py}=\omega_{pz}=\omega_{r_z}=0$。当电机力矩较小时，$\omega_{px}$ 变化很缓慢，在初始的一段时间内 $\dot{\omega}_{px}\approx0$，方程组(7.7-10)的解是

$$\left.\begin{aligned} &\omega_{pz}=\frac{T}{I_x-I_z}\left[t-\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t\right]\\ &\omega_{py}=\frac{T\omega_o}{I_y\omega_n^2}[1-\cos\omega_n t] \end{aligned}\right\} \tag{7.7-11}$$

式中

$$\omega_n=\omega_o\left[\frac{(I_x-I_z)(I_z-I_y)}{I_yI_z}\right]^{\frac{1}{2}}$$

由此表明，在平旋状态启动电机后，转子旋转产生陀螺力矩 $h_r\omega_{px}$ 以及横惯量不对称引起惯性耦合力矩 $(I_x-I_y)\omega_{px}\omega_{py}$，使平台朝正方向起旋。在 $\omega_{py}>0$ 的期间，转子旋转又引起陀螺力矩 $-h_r\omega_{py}$，它将阻碍平旋运动。随着 h_r 的增长，ω_{px} 不断地减少，直到 ω_{px} 趋近于零前，平台转速保持为正值。然后，惯性耦合力矩 $(I_x-I_y)\omega_{px}\omega_{py}$ 将不起主要作用，电机力矩使平台减速，将平台消旋，卫星进入自旋状态。数字计算结果，见图 7.7-6。

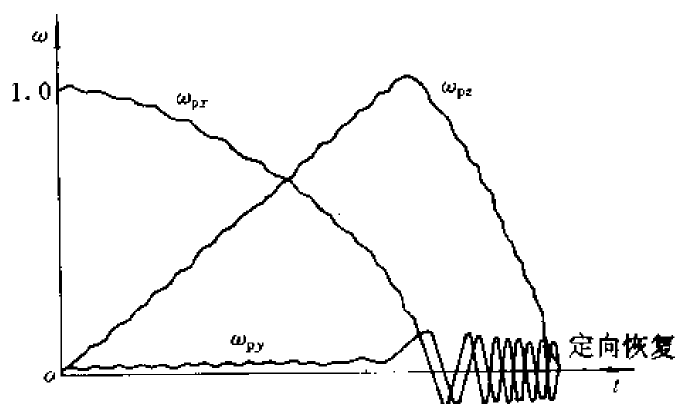


图 7.7-6

第八章　零动量卫星的姿态控制

不具有陀螺定轴性的卫星，可统称为零动量卫星。在此卫星系统中，没有动量装置，或虽有动量装置，但它的总角动量很小，不足以建立陀螺定轴性。此类卫星的姿态模式通常为三轴稳定，其三个姿态的动力学方程基本上是相互独立，须同时使用滚动、俯仰和偏航敏感器，组成三个独立的姿态控制回路。

最简单的三轴稳定控制方式是重力梯度稳定和全喷气控制。前者无需主动执行机构，但姿态稳定精度较差；后者因难以实现微小推力脉冲，姿控精度中等，并受燃料量的限制。通常，在零动量卫星中仍需动量装置作为姿态控制执行机构。由若干可变动量的飞轮或固定动量的力矩陀螺组成，其合成角动量始终保持在零界附近，但单个飞轮或力矩陀螺储存角动量的能力足以吸收周期性空间扰动力矩产生的外扰角动量，实现高精度姿态稳定。

8.1　重力梯度被动稳定

从卫星设计角度有两种方式处理重力梯度力矩。一种方式是重力梯度力矩被视为扰动力矩，通过卫星的构形设计，局部地减少此力矩，或通过姿态控制系统克服此扰动力矩的影响。另一种方式是重力梯度力矩被视为有用力矩，卫星的构形使重力梯度力矩成为稳定姿态的恢复力矩。此类利用重力梯度保持姿态对地定向的卫星称为重力梯度卫星，其最大优点是无需主动执行机构，又可称为被动稳定。

8.1.1　重力梯度卫星的姿态稳定性

为获得起稳定作用的重力梯度力矩，卫星的质量分布特性有特定要求——哑铃式构形。在轨道上，哑铃的质心沿轨道运动，相对地心距而言，哑铃的一端质量低于质心，另一端质量高于质心，低端质量的速度比高端质量小。因此，低端质量的离心力比高端小，两者相对质心的力矩差，使哑铃轴转向地心垂线方向。此外，低端受到的地球中心引力比高端大，两者相对质心的力矩差，以相同方向使哑铃轴趋向地心垂线方向。相对轨道坐标，定义哑铃轴为 z 轴，哑铃构形的质量特性是星体滚动轴惯量和俯仰轴惯量分别大于偏航轴惯量。这样，在重力梯度作用下，卫星的俯仰和滚动姿态运动获得“弹簧”恢复力矩。按重力梯度力矩公式(5.8-8)，卫星的重力梯度动力学方程可列为

$$\left.\begin{aligned} I_x\dot{\omega}_x &= (I_y - I_z)(\omega_y\omega_z - 3\omega_0^2 A_{yz}A_{zz}) \\ I_y\dot{\omega}_y &= (I_z - I_x)(\omega_z\omega_x - 3\omega_0^2 A_{zz}A_{xz}) \\ I_z\dot{\omega}_z &= (I_x - I_y)(\omega_x\omega_y - 3\omega_0^2 A_{xz}A_{yz}) \end{aligned}\right\} \tag{8.1-1}$$

按 zxy 顺序，由欧拉角得方向余弦

$$A_{xz} = -\cos\varphi\sin\theta,\qquad A_{yz} = \sin\varphi,\qquad A_{zz} = \cos\varphi\cos\theta$$

重力梯度力矩与偏航角无关，滚动和俯仰姿态的运动方程分别化为

$$\left.\begin{aligned} I_x\ddot{\varphi}+3\omega_o^2(I_y-I_z)\sin\varphi\cos\varphi=0 \\ I_y\ddot{\theta}+3\omega_o^2(I_x-I_z)\sin\theta\cos\theta=0 \end{aligned}\right\} \tag{8.1-2}$$

以俯仰轴为例，令

$$\lambda_y=\omega_o\sqrt{\frac{3(I_x-I_z)}{I_y}}$$

式(8.1-2)的俯仰转角方程的积分为

$$\dot{\theta}^2+\lambda_y^2\sin^2\theta=\lambda_y^2c^2 \tag{8.1-3}$$

上式右端实为积分常数，决定于姿态角及角速率的初始条件，为便于分析，在积分常数中引入参数 c。上式解的相平面图，见图 8.1-1，见文献[63]。$c=1$ 为稳定分界线。当由初始条件确定的 $c<1$，则俯仰姿态的平衡点在 $\theta=0,\pm n\pi$，此表明星体的偏航轴指向天底（地心）或指向天顶都是稳定平衡状态。相图又表明，在重力梯度作用下，重力梯度卫星的偏航轴（最小惯量轴）相对天底或天顶方向作无阻尼摆动。仿照天文学名词，称此摆动为天平动，摆动频率即为 λ_y。

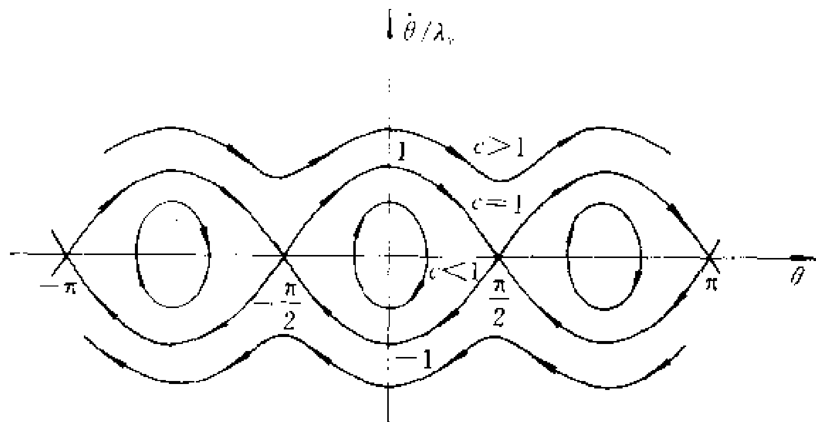


图 8.1-1

天平动的平衡状态是哑铃轴与垂线一致，并且相对空间的俯仰转速等于轨道转速。如在初始状态，重力梯度卫星相对空间静止，并且俯仰角为零；随着轨道运动，哑铃轴超前于当地垂线，俯仰偏角引起的重力梯度力矩使卫星产生与轨道转速同方向的角加速度。当卫星相对空间的角速度等于轨道转速时，俯仰偏角达最大值。然而，重力梯度力矩继续使卫星加速，其相对空间的转速超过轨道转速，使俯仰偏角开始减少，重力梯度力矩也开始减弱，形成绕地垂线的振荡摆动。前述的初条件，相当于式(8.1-3)中的 $c=\omega_o/\lambda_y$，代入式(8.1-3)：当 $\dot{\theta}=0$ 时，俯仰偏角的最大值为 $\theta_{max}=\arcsin\left(\frac{\omega_o}{\lambda_y}\right)$；如 $I_x=I_y\gg I_z$，则 $\theta_{max}=\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}=35.26°$。

在卫星对地定向小姿态角的情况下，卫星相对空间的转速在星体坐标的分量为

$$\omega_x=\dot{\varphi}-\omega_o\psi,\qquad \omega_y=\dot{\theta}-\omega_o,\qquad \omega_z=\dot{\psi}+\omega_o\varphi$$

代入式(8.1-1)，得线性化动力学方程

$$\left.\begin{aligned} &I_x(\ddot{\varphi}-\omega_o\dot{\psi})+(I_y-I_x)\omega_o\dot{\psi}=-4\omega_o^2(I_y-I_z)\varphi \\ &I_y\ddot{\theta}=-3\omega_o^2(I_x-I_z)\theta \\ &I_z(\ddot{\psi}+\omega_o\dot{\varphi})-(I_y-I_z)\omega_o\dot{\varphi}=-\omega_o^2(I_y-I_x)\psi \end{aligned}\right\} \tag{8.1-4}$$

上式右端为各姿态角运动的恢复力矩，与重力梯度恢复力矩式(5.8-4)不等同。上式右端并入了因对地定向圆周运动引起的陀螺力矩。

在小姿态情况下俯仰姿态与滚动、偏航无耦合，从式(8.1-4)按恢复力矩为负方向的条件，直接导出俯仰稳定性条件为

$$I_x > I_z \tag{8.1-5}$$

以及滚动和偏航姿态耦合运动的稳定性条件为

$$I_y > I_z, \qquad I_y > I_x \tag{8.1-6}$$

因此，重力梯度卫星对地定向的模式应是：最小惯量轴与地心垂线一致，最大惯量轴垂直轨道平面，中间惯量轴在轨道平面内。在弱耦合情况下，天平动绕三轴的自然频率分别为

$$\lambda_x^2 = \frac{4\omega_o^2(I_y - I_z)}{I_x}, \qquad \lambda_y^2 = \frac{3\omega_o^2(I_x - I_z)}{I_y}, \qquad \lambda_z^2 = \frac{\omega_o^2(I_y - I_x)}{I_z} \tag{8.1-7}$$

对于哑铃式构形惯量的特点，有 $\lambda_x \approx 2\omega_o$，$\lambda_y = 1.73\omega_o$，$\lambda_z \approx 0$。

8.1.2 天平动的捕获

利用伸展重力梯度杆获得重力梯度力矩是小卫星的典型构形。与重力梯度杆一致的卫星主轴成为最小惯量轴。重力梯度稳定的平衡状态是重力梯度杆保持与地心垂线一致。为了不妨碍卫星对地的应用任务，通常重力梯度杆伸向天顶方向。实现重力梯度被动稳度的主要问题是，重力梯度杆指向的初始捕获和摆动阻尼。

卫星从运载分离后，卫星姿态具有初始角速率，重力梯度尚未伸展，卫星的应用面不指向地球。实现重力梯度稳定初始捕获的要求是使卫星姿态的应用面指向地球，重力梯度伸向天顶，卫星不再在大范围内翻滚，天平动的摆幅不大于±90°，显然，此项要求决定了重力梯度伸杆捕获时卫星姿态角和角速率应具备合适的匹配组合。可从能量角度分析，卫星限于±90°范围作天平摆动的姿态角和角速率限制条件。

以俯仰摆动为例，卫星摆动的机械能等于动能和势能之和，分别为

$$E_k = \frac{1}{2} I_y \dot{\theta}^2$$

$$E_p = \int_0^\theta T_{gy} \mathrm{d}\theta$$

由于卫星的角速率 $\dot{\theta}$ 远大于轨道角速率 ω_o，在动能式中略去 ω_o。T_{gy} 为俯仰方向重力梯度力矩。在 0°～90°范围内，卫星摆动的总能等于重力梯度力矩的作功，其总能为

$$E_t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} T_{gy} \mathrm{d}\theta$$

将 $T_{gy} = \frac{3}{2}\omega_o^2(I_x - I_z)\sin 2\theta$（见式(8.1-2)）代入下列能量方程：

$$E_t = E_k + E_p$$

积分后，得俯仰±90°天平动的姿态角和角速率的组合关系，即捕获条件：

$$\dot{\theta} = \sqrt{3}\,\omega_o \sqrt{\frac{I_x - I_z}{I_y}} \cos\theta \tag{8.1-8}$$

同样，对滚动和偏航姿态，捕获条件为

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= 2\omega_o\sqrt{\frac{I_y - I_z}{I_z}}\cos\varphi \\
\dot{\psi} &= \omega_o\sqrt{\frac{I_y - I_x}{I_x}}\cos\psi
\end{aligned}\right\} \tag{8.1-9}
$$

天平动捕获的技术实现是在适当时刻、合适的俯仰角状态，伸展重力梯度杆(沿偏航轴)，增大横向惯量，降低俯仰、滚动角速率。在伸杆过程中，姿态角运动方程为

$$
I_y\ddot{\theta} = -\frac{3}{2}\omega_o^2(I_x - I_z)\sin 2\theta + \dot{I}_y(\omega_o - \dot{\theta}) \tag{8.1-10}
$$

与轨道周期相比，伸杆时间较短，在伸杆过程中可忽略重力梯度力矩的作用。按角动量守恒的原则，得出伸杆过程中的俯仰转角 $\Delta\theta$。令伸杆前和伸杆后俯仰轴惯量分别为 I_{y1}，I_{y2}，并有

$$
I_{y2} = I_{y1} + mL^2
$$

$$
L = \dot{L}\cdot t
$$

式中，m 为重力梯度杆的杆端质量，L 为杆长，$\dot{L}$为伸杆速度。令伸杆前后俯仰角和角速率为 θ_1，θ_2 和 $\dot{\theta}_1$，$\dot{\theta}_2$，根据角动量定理，得

$$
\dot{\theta}_2 = \frac{I_{y1}}{I_{y1} + m(\dot{L}\cdot t)^2}\dot{\theta}_1
$$

如伸杆时间为 t_f，则完成伸杆后俯仰角 θ_2 为

$$
\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta - \omega_o t_f \tag{8.1-11}
$$

式中 $\Delta\theta$ 为

$$
\Delta\theta = \int_0^{t_f}\dot{\theta}_2\mathrm{d}t = \dot{\theta}\, t_f\sqrt{\frac{I_{y1}}{mL^2}}\arctan\sqrt{\frac{mL^2}{I_{y1}}}
$$

根据式(8.1-11)和 $\dot{\theta}_2$ 应满足的捕获条件(8.1-8)，得出伸杆控制的方式——伸杆的起始状态和伸杆的速率。

8.1.3 天平动的阻尼

天平动捕获后，还须抑制天平动的摆幅，被动阻尼的典型方法是耗散天平动的机械能。在重力梯度杆的杆端安置磁液阻尼器。它由内、外圆球组成，外球固连于杆体，外球内壁为铜制内壳，内球与外球之间充有粘滞液体，内球可相对外球自由转动，在内球内部装有十字形永久磁铁。在轨道上，内球因内含磁铁沿地磁场方向定向，外球随天平动而转动，内外球之间形成的相对转动在外球内壳产生涡流，同时剪切内外球之间的液体，两者都引起阻尼力矩。它正比于内外球的相对转速。阻尼过程即为天平动机械能的耗散过程。

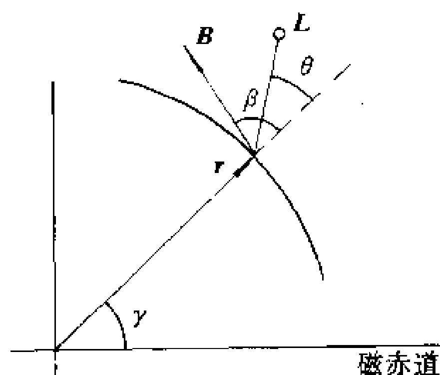


图 8.1-2

以太阳同步的极地轨道为例。轨道平面与地球地磁场平面相近，按地磁偶极子模型，磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方向与当地地垂线的夹角 β 近似为(参见图 8.1-2)

$$\beta = -\arctan\left(\frac{1}{2}\cot\gamma\right) \tag{8.1-12}$$

取直接微分，得内外球之间的相对转速可表达为

$$\dot\beta - \dot\theta = \frac{2\dot\gamma}{1+3\sin^2\gamma} - \dot\theta \tag{8.1-13}$$

参照式(8.1-10)，在重力梯度力矩和阻尼力矩作用下，俯仰角转动方程为

$$I_y\ddot\theta = -\frac{3}{2}\omega_o^2(I_x - I_z)\sin 2\theta + c(\dot\beta - \dot\theta) \tag{8.1-14}$$

c 为阻尼系数。将式(8.1-13)代入上式，对于圆轨道，有 $\dot\gamma = \omega_o$。再引入自变量 $M = \omega_o t$。有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \omega_o \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}M} = \omega_o(\ )'$，为相对轨道圈的导数。在小角度情况，式(8.1-14)俯仰线性化方程可化成

$$\theta'' + \frac{c}{\omega_o I_y}\theta' + \frac{\lambda_y^2}{\omega_o^2}\theta = \frac{2c}{\omega_o I_y(1+3\sin^2\gamma)}$$

λ_y 为俯仰天平动的自然频率，见式(8.1-7)。由此二阶运动方程可得天平动阻尼时间常数的估计值 t_d(以轨道圈数为单位)：

$$t_d = \frac{\omega_o I_y}{\pi c}$$

8.2 全喷气控制

在此系统中没有动量飞轮装置，全靠喷气推力器产生的控制力矩消除卫星姿态误差，实现三轴姿态控制。令姿态动力学方程式(5.7-10)中的 $h_x = h_y = h_z = 0$，当姿态角偏差较小时，三个方向的姿态运动不耦合，有

$$\left.\begin{aligned} I_x\ddot\varphi &= T_{cx} + T_{dx} \\ I_y\ddot\theta &= T_{cy} + T_{dy} \\ I_z\ddot\psi &= I_{cz} + T_{dz} \end{aligned}\right\} \tag{8.2-1}$$

喷气控制力矩 T_c 是断续脉冲式的，当外扰力矩 T_d 使姿态角偏差漂向死区边界时，姿态控制系统自动地驱动喷气推力器，产生一定量的冲量，使姿态回到死区内，并朝反方向漂移，姿态角在死区内往复地摆动着。为了限制姿态角偏差，姿控系统运行在高精度极限环的工作状态，考虑到节省喷气系统中的燃料，采用单侧极限环工作方式(如图 8.2-1)。以俯仰控制通道为例，在喷气推力器作用后，卫星在某个方向上姿态的初始状态在相图上处在 D 点，姿态初始偏差和漂移速率为 θ_d 和 $-\dot\theta_d$，假定常值外扰力矩 T_{dy} 为正，在它的作用下，姿态运动在相图上的轨迹由 $D\to E\to F$。在 F 点，姿态漂到死区的边界，推力器开始喷气，经过 Δt

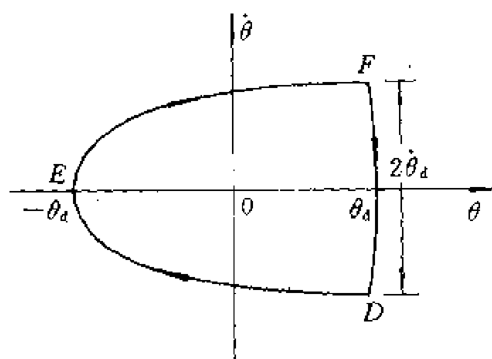


图 8.2-1

时间使卫星再次获得反方向的漂移速率$-\dot{\theta}_d$。由于控制力矩T_{cy}比外扰力矩T_{dy}大得多，因此有

$$2\dot{\theta}_d = \frac{T_{cy}}{I_y}\Delta t$$

I_y是卫星绕控制轴的惯量，这种单边极限环使姿态限制在下式范围内：

$$-\theta_d \leqslant \theta \leqslant \theta_d$$

$$\theta_d = \frac{\left(\frac{T_{cy}}{I_y}\Delta t\right)^2}{16\left(\frac{T_{dy}}{I_y}\right)} \tag{8.2-2}$$

每次校正姿态所需的喷气力矩冲量ΔI应等于在极限环一周内外扰力矩赋予卫星的角动量，参见图8.2-1和式(8.2-2)，两次喷气之间间隔Δt为

$$\Delta t = 4\sqrt{\frac{\theta_d I_y}{T_{dy}}}$$

每次控制时，喷气推力器产生的冲量是

$$\Delta I = \frac{1}{l}T_c \cdot \delta t = \frac{1}{l}T_d \cdot \Delta t = \frac{4}{l}\sqrt{\theta_d I_y T_{dy}}$$

l为推力器的力臂。如$\theta_d=0.05°$，$I_y=500\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，$T_d=10^{-6}\ \mathrm{N\cdot m}$，$l=1\ \mathrm{m}$，则$\Delta I=2.6\times 10^{-3}\ \mathrm{N\cdot s}$，$\delta t=26\ \mathrm{ms}$，因此，推力器的推力应低于0.1 N。这种低推力的推力器系统的重量、功耗、寿命等技术问题尚待解决。采用动量装置吸收外扰角动量，将大大降低对喷气推力器的技术要求。

8.3　反作用轮动量控制

通过调节飞轮转速，进行飞轮与卫星星体之间角动量交换，实现卫星姿态转角控制。这种控制方式又可体现在飞轮与星体之间的相互力矩作用，即作用在飞轮上使飞轮改变转速的电磁力矩同时以反作用力矩作用在星体上。此类组成零界动量的飞轮又称为反作用飞轮，以区别于使卫星获得陀螺定轴性的偏置动量飞轮。

由若干反作用飞轮组成的飞轮组与星体形成动量系统，其角动量为

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I\omega} + \boldsymbol{CJ\Omega} \tag{8.3-1}$$

式中，$\boldsymbol{I}$为整星惯量阵；$\boldsymbol{J}$为各飞轮惯量组成的飞轮组对角惯量阵；$\boldsymbol{\Omega}$为N个飞轮转速组成的飞轮组转速矢量；$\boldsymbol{C}$为飞轮组安装方向阵($3\times N$)，其各列为各飞轮转轴在星体坐标的方向余弦。令飞轮组控制量(电压)矢量为$\boldsymbol{E}$，略去飞轮和电机的动态过程，飞轮组成的控制方程为

$$\boldsymbol{J}(\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\omega}}) = K_e\boldsymbol{E} \tag{8.3-2}$$

式中K_e为电磁系数。整星系统角动量与控制量$\boldsymbol{u}$无关，无外力矩作用的角动量方程为

$$\dot{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{CJ}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{H} = 0$$

将式(8.3-2)代入上式，得星体姿态的飞轮电压控制方程

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{I}^0[\tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{H} + \boldsymbol{C}(K_e\boldsymbol{E})] \tag{8.3-3}$$

式中$\boldsymbol{I}^0=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{CJC}^{\mathrm{T}}]^{-1}$。此控制模型用于飞轮组动量交换式的姿态控制。

8.3.1 反作用轮的控制模型

反作用飞轮由电机和轮框组成，后者固连于电机转子。惯量为 J，相对星体的转速为 Ω，电机的电流为 i，电流力矩系数为 N，则飞轮转动方程为

$$J\dot{\Omega} = Ni + M_f \tag{8.3-4}$$

Ni 为驱动力矩，M_f 为摩擦力矩。两者又以反作用力矩作用在星体上，以俯仰轴为例，见图 8.3-1，有

$$I\ddot{\theta} = -Ni - M_f + T_d \tag{8.3-5}$$

T_d 为作用在星体上的空间干扰力矩。将式(8.3-4)和(8.3-5)相加，如外力矩为零，则有

$$I\ddot{\theta} + J\dot{\Omega} = \dot{H}_s = 0$$

可见，电机的作用不改变系统(星体＋飞轮)的总角动量 H_s，而是重新分配星体和飞轮的角动量。令电机控制电压为 E，电阻为 R，反电势系数为 N。如飞轮转速的正方向与俯仰转角正方向一致，则电机的电流方程可写为

$$i = \frac{1}{R}[E - N(\Omega - \dot{\theta})] \tag{8.3-6}$$

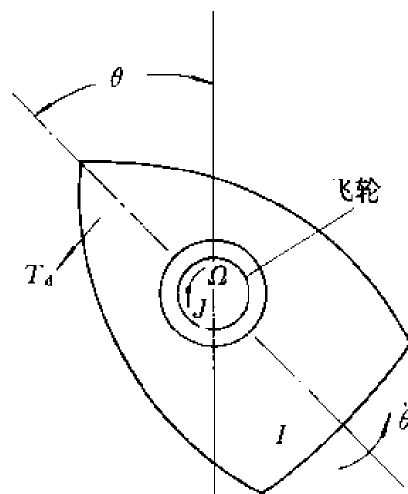


图 8.3-1

上述式(8.3-4)～(8.3～6)组成姿态飞轮控制方程。飞轮转速远大于姿态速率，$\Omega \gg \dot{\theta}$，再以角动量 $h = J\Omega$ 代替飞轮的转速变量，控制方程可写成

$$I\ddot{\theta} = -\dot{h} + T_d \tag{8.3-7}$$

$$\dot{h} + \sigma h = \frac{N}{R}E + M_f \tag{8.3-8}$$

式中 $\sigma = N^2/JR$，而 $1/\sigma$ 即为飞轮转速的时间常数，一般约数十秒。

将飞轮的安装方向(正转速方向)与俯仰轴方向相反，则控制方程中 $\dot{h}$ 的(－)号即可略去。在控制回路中，飞轮的控制模型有力矩模式和转速模式两种。令姿态控制回路所需的指令控制力矩为 T_c，由式(8.3-8)，飞轮力矩模式的传递回路如图 8.3-2(a)所示，飞轮力矩输出的传递函数为

$$\dot{h} = \frac{s}{s+\sigma}\left(\frac{NK}{R}T_c\right) \tag{8.3-9}$$

K 为控制增益。由于 $\sigma \ll 1$，此传递函数的零极点非常相近。力矩模式的力矩时间常数很小，有利于系统稳定，但飞轮摩擦力矩直接进入控制量($\dot{h}$)。如将指令力矩 T_c 积分后，再驱动飞轮，由测速机测飞轮转速，形成飞轮角动量反馈，则为转速模式，见图 8.3-2(b)，飞轮力矩输出的传递函数为

$$\dot{h} = \frac{K'}{s + \sigma + \frac{NK'}{R}}\left(\frac{NK}{R}T_c\right) \tag{8.3-10}$$

力矩输出的时间常数近似为 R/NK'。如时间常数较大，则其极点靠近原点，对控制回路的稳定性不利，但摩擦力矩对控制品质的影响较小。

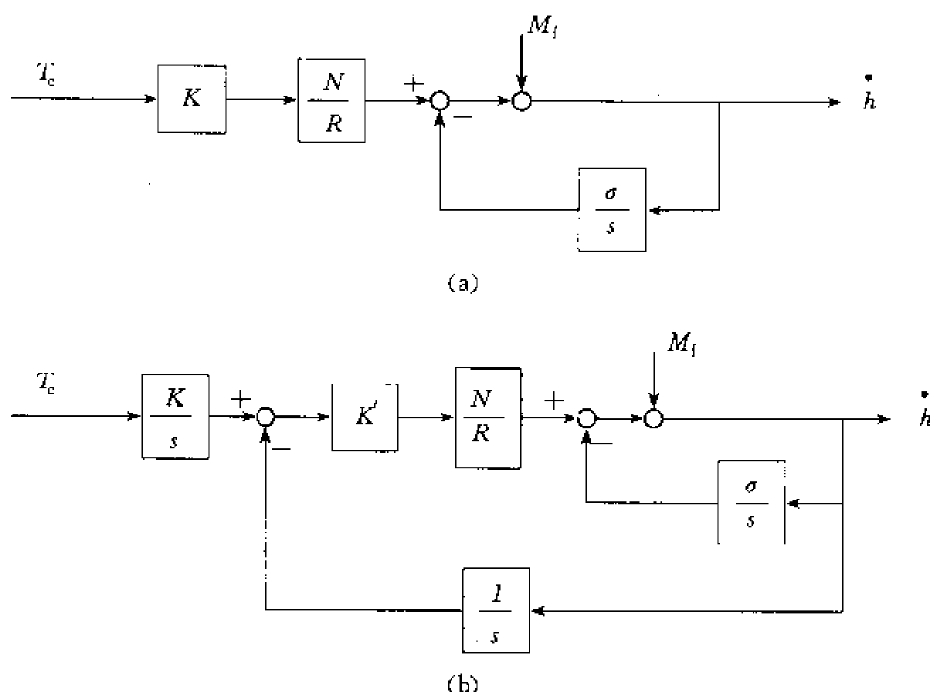


图 8.3-2

8.3.2 三正交反作用轮系统

在最简单的零动量系统中，采用了三个正交安装的反作用飞轮，它们的角动量与星体主惯量轴平行，此三个飞轮分别独立地吸收沿滚动、俯仰偏航轴上的外扰角动量。姿控系统根据姿态敏感器测得的姿态偏差，调节（增加或减少）飞轮的转速，实现连续式的姿态控制。以俯仰通道为例，飞轮负向安装，略去通道之间耦合，俯仰姿态的控制方程为

$$I_y\ddot{\theta}=\dot{h}_y+T_{dy}=J\dot{\Omega}+T_{dy}$$

J,Ω 为反作用飞轮的惯量和转速。假定上式的初值为零，积分后得

$$\dot{\theta}=\frac{1}{I_y}\left(\int T_{dy}\mathrm{d}t+J\Omega\right)$$

如外力矩 $T_{dy}=T_{oy}+T_{sy}\cos\omega_o t$，为了保持姿态稳定，要求 $\dot{\theta}=0$，控制系统应自动按下式规律驱动飞轮的转速：

$$\Omega=\frac{-1}{J}\left(T_{oy}t+\frac{T_{sy}}{\omega_o}\sin\omega_o t\right)$$

因此，周期性外扰力矩 T_{sy}引起飞轮转速交变，而常值外扰力矩 T_{oy}则引起飞轮转速单调地增长（或减少），这就是飞轮吸收外扰角动量的结果。当飞轮的转速超过允许范围的上界（或下界）时，必须沿俯仰轴的负（或正）方向施加一个去饱和用的喷气力矩或磁力矩 T_{cy}。同理，控制系统为保持姿态稳定必使飞轮的转速按相反方向回到初始值，也就是将飞轮储存的外扰角动量释放出去，使飞轮能重新吸收外扰角动量。

上述控制方程表示的控制对象是纯惯性的，没有阻尼特性；在控制回路中，除有姿态误差的比例项外，还应引入微分项（超前校正），起系统阻尼作用。令控制动量指令 $\dot{h}_{cy}$为

$$\dot{h}_{cy} = -K_p'(\tau_p\dot{\theta}_s + \theta_s)$$

式中，θ_s 是姿态敏感器的输出；$\dot{h}_{cy}$可作为驱动反作用飞轮的输入。上节论述有两种驱动飞轮的模式——力矩模式和转速模式。在力矩模式中，根据动量指令 $\dot{h}_{cy}$直接调节电机的电流 i_c，产生电磁力矩，此模式的时间常数很小；但电机摩擦力矩直接进入控制效应。在转速模式中，电机转速通过伺服回路跟随控制动量指令的积分，此模式的时间常数较大，但电机摩擦力矩不直接起控制作用。

任何一个具有角动量的飞轮都会引起陀螺耦合效应，为了简化控制模式，还应合适地选择飞轮的最大角动量和控制系统的参数，以便将每个通道之间的耦合减到最小程度。在评价耦合影响时，可以假定姿态控制系统的初始角动量处在 $h_x=h_z=0$，$h_y=\pm|h_y|_{max}$的状态，令滚动、偏航通道控制器的控制规律是

$$sh_x(s) = G_x(s)[-\varphi(s)], \qquad sh_z(s) = G_z(s)[-\psi(s)]$$

在卫星姿态力学方程式(5.7-4)中，略去二阶小量后，滚动、偏航姿态控制系统的传递函数方程是

$$[I_x s^2 + G_x(s)]\varphi(s) - h_y s\psi(s) = 0$$
$$h_y s\varphi(s) + [I_z s^2 + G_z(s)]\psi(s) = 0$$

它的特征方程为

$$\left[1 + \frac{G_x(s)}{I_x s^2}\right]\left[1 + \frac{G_z(s)}{I_z s^2}\right] + \frac{h_y^2}{I_x I_z s^2} = 0$$

如不考虑陀螺效应，上式左端第二项为零，两个姿控通道是独立的，闭环传递函数的极点，即 $I_x s^2+G_x(s)$和 $I_z s^2+G_z(s)$的零点决定了系统的动态品质。从上式可以看出，应选择控制系统的参数和 $|h_y|_{max}$，使

$$\frac{|h_y|_{max}}{(I_x I_z)^{\frac{1}{2}} \| s \|_{min}} \ll 1$$

式中，$\| s \|_{min}$是闭环传递函数的极点离原点的最小距离。这样，角动量 h_y 对滚动、偏航闭环系统的根轨迹的影响最小，即引起的耦合作用最小。

8.3.3 四斜装反作用轮系统

在三个正交飞轮系统中，如其中一个飞轮出了故障，系统将失控，最简单的备分方法是在与星体三个主惯量轴成等角的方向上安装第四个飞轮，见图 8.3-3。此飞轮的角动量 h_4 在三个坐标轴上的分量都应相等 $h_{4x}=h_{4y}=h_{4z}=\frac{1}{\sqrt{3}}h_4$，因此斜装角为

$$\beta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54.74°$$

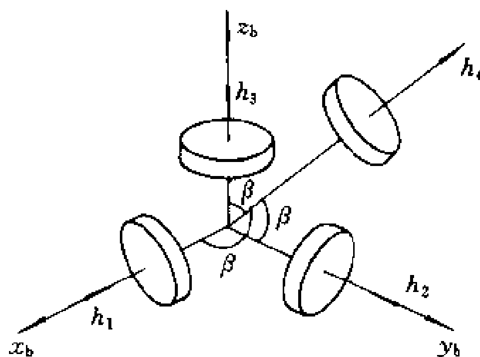


图 8.3-3

飞轮组的方向阵 C 为

$$C=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 1/\sqrt{3}\\ 0 & -1 & 0 & 1/\sqrt{3}\\ 0 & 0 & -1 & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

令 4 个飞轮控制电压组成的控制矢量 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3,u_4)^{\mathrm{T}}$。如飞轮组中仅选三个参与控制，例如，第 i 个飞轮不参与控制，则由三轴姿态控制的指令力矩 T_{Cx},T_{Cy},T_{Cz}分配飞轮组电压控制矢量 $\boldsymbol{u}_i$ 为

$$\boldsymbol{u}_i=K\boldsymbol{C}_i^{-1}\begin{bmatrix}T_{Cx}\\ T_{Cy}\\ T_{Cz}\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{u}_i$ 为矢量 $\boldsymbol{u}$ 中 u_i 为零的控制矢量；$\boldsymbol{C}_i$ 为矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中第 i 列为零的方向阵；$\boldsymbol{C}_i^{-1}$ 可称为动量分配矩阵。

另一种，更一般的备份方法是将四个飞轮相对于俯仰轴对称斜装，见图 8.3.4（文献[64，65]）。各角动量与俯仰轴的夹角都是 β。角动量 h_1 和 h_3 在同一平面内，h_2 和 h_4 在另一平面内，此两平面与滚动、偏航平面的交线与滚动轴 x 和偏航轴 z 的夹角都为 α。根据上述安装情况，

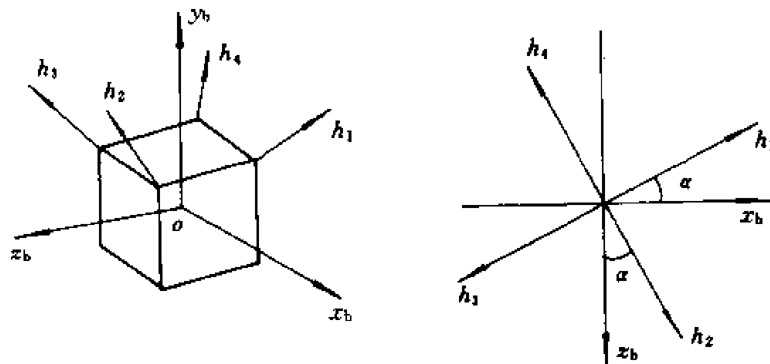


图 8.3-4

四个飞轮产生的合成角动量 h_x,h_y,h_z 是

$$\begin{bmatrix}h_x\\ h_y\\ h_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\beta\cos\alpha & \sin\beta\sin\alpha & -\sin\beta\cos\alpha & -\sin\beta\sin\alpha\\ \cos\beta & \cos\beta & \cos\beta & \cos\beta\\ -\sin\beta\sin\alpha & \sin\beta\cos\alpha & \sin\beta\sin\alpha & -\sin\beta\cos\alpha\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\\ h_4\end{bmatrix}$$

或写成

$$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{h}_{\mathrm{w}} \tag{8.3-11}$$

$\boldsymbol{C}$ 为方向阵；安装角 α,β 决定了各个飞轮在每个控制通道中提供的角动量。

在姿态控制系统中，可令 $-h_x$，$-h_y$，$-h_z$ 为控制指令动量，根据安装几何关系式(8.3-11)，将指令控制动量分配到各个飞轮。因控制量的维数大于控制维数，分配方式是式(8.3-11)的伪逆解，即

$$\boldsymbol{h}_{\mathrm{w}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{h} \tag{8.3-12}$$

代入式(8.3-11)，有

$$h = CC^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1}h = h$$

伪逆分配是最佳分配，飞轮功耗总和为最小，即飞轮组转速(或角动量)的平方和为最小。利用乘子 λ，可将具有等式约束(8.3-11)的最优问题化为下列指标函数的极值问题：

$$J'(h_w) = \frac{1}{2}h_w^{\mathrm{T}}h_w + \lambda^{\mathrm{T}}(h - Ch_w) \tag{8.3-13}$$

式中 h 为给定矢量。

对指标函数取偏导数得

$$\frac{\partial J'}{\partial h_w} = h_w - C^{\mathrm{T}}\lambda = 0$$

$$\frac{\partial J'}{\partial \lambda} = h - Ch_w = 0$$

消去乘子 λ，得最佳分配解，即为式(8.3-12)。

如四个飞轮都参与控制，分配矩阵 $D=C^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1}$可展开为

$$D = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos\alpha}{2\sin\beta} & \dfrac{1}{4\cos\beta} & \dfrac{-\sin\alpha}{2\sin\beta} \\ \dfrac{\sin\alpha}{2\sin\beta} & \dfrac{1}{4\cos\beta} & \dfrac{\cos\alpha}{2\sin\beta} \\ \dfrac{-\cos\alpha}{2\sin\beta} & \dfrac{1}{4\cos\beta} & \dfrac{\sin\alpha}{2\sin\beta} \\ \dfrac{-\sin\alpha}{2\sin\beta} & \dfrac{1}{4\cos\beta} & \dfrac{-\cos\alpha}{2\sin\beta} \end{bmatrix}$$

将此最佳动量分配代入原指标函数，得

$$J(h_w) = h_w^{\mathrm{T}}h_w = \frac{1}{2\sin^2\beta}h_x^2 + \frac{1}{4\cos^2\beta}h_y^2 + \frac{1}{2\sin^2\beta}h_z^2 \tag{8.3-14}$$

令此二次式各项系数之和为 P，应选择最佳安装角 β 使 P 值极小，得

$$\beta = \arctan\sqrt{2} = 54.74^\circ$$

对于三个正交飞轮系统，有

$$J(h_w) = h_x^2 + h_y^2 + h_z^2 \tag{8.3-15}$$

比较式(8.3-14)与式(8.3-15)的系数可知，四斜装飞轮功耗在三个通道中都是三正交飞轮系统的 3/4。

比较正三交飞轮加斜装与四斜装飞轮系统储存外扰角动量的能力，将显示出四斜装飞轮方案的更大优点。储存角动量的能力体现在这些动量装置在星体坐标中的各个方向上所能提供的角动量，这些角动量的端点组成一个多面体，称为角动量包络，此包络的体积越大，储存角动量的能力越大。三正交飞轮加斜装的系统共有四种工作模式(任意三个轮工作)，四斜装飞轮共有五种工作模式(四个轮全工作或任意三个轮工作)。每种工作模式的角动量包络是不相同的，因此储存角动量的能力应是各个系统中各种模式的角动量包络的公共部分，这个公共部分都包含在某一种模式的角动量包络之内。

令各个飞轮的额定角动量为 1，三个正交飞轮系统中的斜装轮与各坐标轴的夹角 $\beta=$

54.74°，如四斜装飞轮的安装方位角 $\alpha=45°$，每个斜装轮与各坐标轴的夹角也都是 $\beta=54.74°$，各个飞轮在星体坐标轴上的分量都是 $1/\sqrt{3}$，不难想象，三正交轮加斜装轮的角动量包络的公共部分是一个边长为 $2/\sqrt{3}$ 的立方体，见图 8.3-5。四斜装飞轮包络的公共部分的中央部分也是一个边长为 $2/\sqrt{3}$ 的立方体，另外，在此立方体的每面上再加一个高度为 $1/\sqrt{3}$，底边长为 $2/\sqrt{3}$ 的四棱锥。

图 8.3-6 是这个立体图形沿 x_b 轴，y_b 轴和沿 x_b，y_b 轴夹角的平分线上的投视图，图上的实线是此立体图形的各个棱的投影，箭头是各角动量(取正值)的投影。显然，此立体图形的体积比图 8.3-5 的体积大得多。因此，四斜装轮系统具有较大的储存角动量的能力，或者说，此系统的抗扰动能力强，可控区域大，飞轮的卸载次数少。

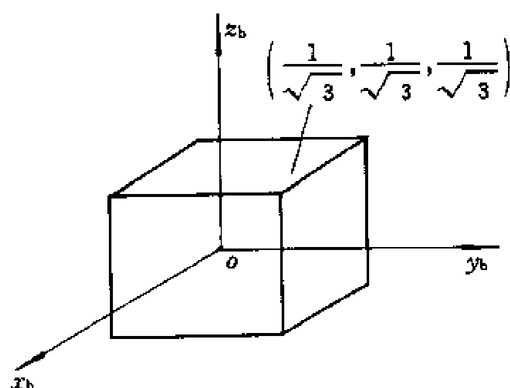


图　8.3-5

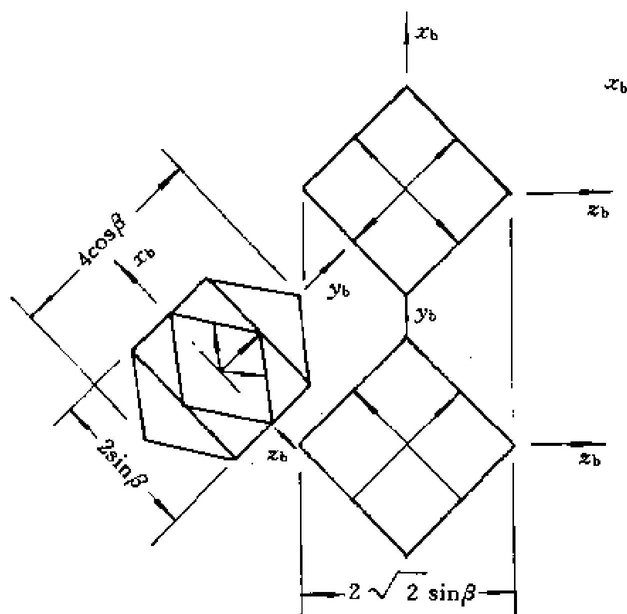


图　8.3-6

下面略加说明带四斜装轮的姿态控制系统的组成，图 8.3-7 是用矩阵形式表示的姿态控制系统图，其中各环节的传递函数如下。根据卫星动力学方程的一般式，略去包含 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ 和 h_x,h_y,h_z 的二阶小量以及轨道运动的耦合作用，卫星姿态动力学传递函数方程的最简式是

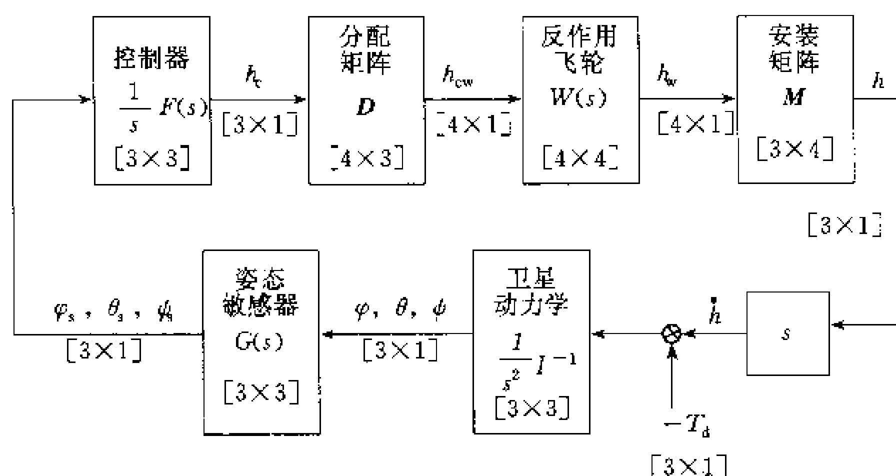


图 8.3-7

$$
s^2\underbrace{\begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}}_{I}\begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \theta(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sh_x(s) \\ -sh_y(s) \\ -sh_z(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x(s) \\ T_y(s) \\ T_z(s) \end{bmatrix} \tag{8.3-16}
$$

如三个通道的姿态敏感器的传递函数相同,有

$$
\begin{bmatrix} \varphi_s(s) \\ \theta_s(s) \\ \psi_s(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{K_s}{\tau_s s+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_s}{\tau_s s+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_s}{\tau_s s+1} \end{bmatrix}}_{G(s)}\begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \theta(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix}
$$

控制器的传递函数是

$$
\begin{bmatrix} -h_{cx}(s) \\ -h_{cy}(s) \\ -h_{cz}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s}\underbrace{\begin{bmatrix} K_x(\tau_x s+1) & 0 & 0 \\ 0 & K_y(\tau_y s+1) & 0 \\ 0 & 0 & K_z(\tau_z s+1) \end{bmatrix}}_{F(s)} \times \begin{bmatrix} -\varphi_s(s) \\ -\theta_s(s) \\ -\psi_s(s) \end{bmatrix}
$$

分配矩阵的关系式是

$$
\begin{bmatrix} h_{c1} \\ h_{c2} \\ h_{c3} \\ h_{c4} \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}\begin{bmatrix} h_{cx} \\ h_{cy} \\ h_{cz} \end{bmatrix} \tag{8.3-17}
$$

反作用飞轮驱动回路的传递函数是

$$\begin{bmatrix} h_1(s) \\ h_2(s) \\ h_3(s) \\ h_4(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} W_1(s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_2(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_3(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_4(s) \end{bmatrix}}_{W(s)} \times \begin{bmatrix} h_{c1}(s) \\ h_{c2}(s) \\ h_{c3}(s) \\ h_{c4}(s) \end{bmatrix}$$

安装矩阵是

$$\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{M} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix}$$

将上述各环节的传递函数连接起来，得框图 8.3-7，此姿态控制系统的特征方程式为

$$\boldsymbol{E} + \frac{1}{s^2} I^{-1} \boldsymbol{M} W(s) \boldsymbol{D} F(s) G(s) = 0 \tag{8.3-18}$$

$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵。前面已论及分配矩阵 $\boldsymbol{D}$ 应是安装矩阵的伪逆，$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{M}'$。如四个飞轮都工作，并且传递函数相同，并等于 $W(s)$，则

$$\boldsymbol{M} W(s) \boldsymbol{M}' = W(s) \boldsymbol{E}$$

特征方程式(8.3-18)可分解为三个独立的特征方程式：

$$I_i s^2 + K_i(\tau_i s + 1) W(s) \frac{K_s}{\tau_s s + 1} = 0 \quad (i = x, y, z)$$

这样，滚动、俯仰、偏航三个姿态控制通道互不耦合。如有一个飞轮出了故障，应相应地改变分配矩阵，此矩阵仍然应是三个工作飞轮的安装矩阵的伪逆，使姿态控制系统的三个通道保持互不耦合。如三个通道姿态敏感器的传递函数不同，或飞轮驱动回路的传递函数各不相同，应仔细地选择各环节的参数及飞轮的安装角，使各通道之间的耦合影响减到最小。

8.4　力矩陀螺动量控制

力矩陀螺由定常转速的动量飞轮、支撑飞轮的框架和框架转动伺服系统组成。框架转动迫使动量飞轮的角动量改变方向。从物理学角度，飞轮角动量进动将产生陀螺反作用力矩(简称陀螺力矩)作用在框架基座上，陀螺力矩等于框架转速矢量与飞轮角动量矢量的叉积。从姿态动力学角度，动量装置角动量的进动，形成等效的内控制力矩，数值等于单位时间内角动量的变化率，方向沿角动量变化的负方向。由于力矩陀螺框架转速伺服回路具有良好的线性度和带宽，因而控制性能良好。

单框力矩陀螺仅有一个框架，其框架转轴线与飞轮转轴始终垂直，并通过飞轮质心，飞轮角动量的进动限于框架轴的垂直平面内见图 8.4-1。在某一瞬时(相当于某一框架角)，其角动量变率(陀螺力矩)限于单自由度，因此，至少应用三个单框力矩陀螺实现三自由度姿态控制。由于框架转动引起的陀螺力矩垂直于框架转轴，因此该力矩通过框架轴承直接作用到陀螺基座(星体)上，力矩传递与框架伺服系统的力矩器无关，从而可获得较大控制力矩的输出，这是单框力矩陀螺的重要优点。

双框力矩陀螺具有内、外两个框架，其框架转轴的轴线相互垂直，并通过飞轮的质心。飞轮角动量的进动不限于某个平面内，内、外框架可带动飞轮角动量作两自由度进动，产生两自由度的陀螺力矩，因此，仅需两个双框架力矩陀螺实现三自由度姿态控制。这是双框力矩陀螺的主要优点。但陀螺力矩的输出受到较大限制，以内框转动为例，当飞轮角动量与外框轴垂直时，内框转动产生的陀螺力矩沿外框轴，这时外框伺服系统必须迫使外框不转动，才能将该陀螺力矩传递到基座（星体）上。因此，内框转动的陀螺力矩输出受外框轴的力矩器能力的限制。同样，外框转动产生的陀螺力矩沿内框轴。由内框轴伺服回路和力矩器的锁定作用，该力矩才能通过框架传递到星体上。本章叙述单框力矩陀螺的控制特性。

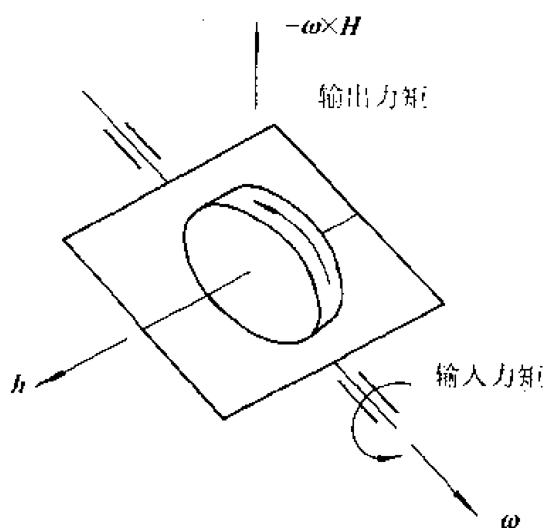


图 8.4-1

8.4.1 单框力矩陀螺群的构形

单框力矩陀螺的动量轮以正交方式架在单轴框架上，框架轴与动量轴垂直，框架可绕基座相对转动，提供一个控制自由度。定义框架坐标系 $ox_g y_g z_g$，坐标基轴可以单位矢量 $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{t}$ 表示，分别沿框架轴、角动量轴和力矩轴，见图 8.4-2。按叉积规则，力矩轴垂直于框架平面（框架轴与角动量轴组成的平面）。令框架转角为 δ，框架转动 $\dot{\delta}$ 引起的陀螺输出力矩 T_o 为：

$$\boldsymbol{T}_o = -(\dot{\delta}\boldsymbol{g}) \times (h\boldsymbol{W}) = -(\dot{\delta}h)\boldsymbol{t} \tag{8.4-1}$$

略去框架转动的动态过程，驱动框架转动的输入力矩 T_i 仅需克服星本体转动 ω 引起的陀螺反作用力矩在框架轴的分量，即有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_i &= -[(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{h}) \cdot \boldsymbol{g}]\boldsymbol{g} = h[(\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{W}) \cdot \boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{g} \\ &= h(\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{g}\end{aligned} \tag{8.4-2}$$

输出式(8.4-1)和输入式(8.4-2)力矩之比为力矩陀螺的力矩放大倍数，有

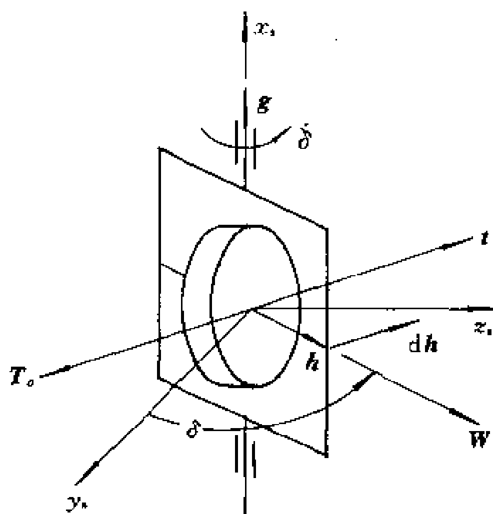


图 8.4-2

$$T_o/T_i = \dot{\delta}/\omega$$

此放大倍数不受框架力矩器能力的限制。星体惯量远大于陀螺框架惯量，两者的转速相差甚大，因而力矩放大倍数很大，可达千倍。这是单框力矩陀螺的最大优点。

定义陀螺基座坐标系 $ox_s y_s z_s$，当框架角为零时，它与框架坐标系 $ox_g y_g z_g$ 重合。在基座坐

标中，陀螺角动量及其变率为

$$(\boldsymbol{h})_s = \begin{bmatrix} 0 \\ h\cos\delta \\ h\sin\delta \end{bmatrix}, \qquad (\dot{\boldsymbol{h}})_s = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\delta} h\sin\delta \\ \dot{\delta} h\cos\delta \end{bmatrix} \tag{8.4-3}$$

按陀螺群的构形和每个陀螺框架轴的方向布置，确定第 i 个陀螺基座的安装矩阵 $\boldsymbol{M}_i(i=1,2\cdots,n)$，得出陀螺群在星体坐标系 $ox_b y_b z_b$ 中角动量 $\boldsymbol{H}$(略去下标 b)为

$$\boldsymbol{H} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_i^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{h}_i)_s = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\delta}) \tag{8.4-4}$$

i 为陀螺序号，n 为陀螺总数，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\delta})$为框架角矢量 $\boldsymbol{\delta}=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)^{\mathrm{T}}$ 的非线性函数。因安装矩阵 $\boldsymbol{M}_i$ 为常系数阵，单个陀螺在星体坐标中角动量贡献的一般式可写为

$$\boldsymbol{h}_i = \begin{bmatrix} h_{ix} \\ h_{iy} \\ h_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i}\sin\delta_i + b_{1i}\cos\delta_i \\ a_{2i}\sin\delta_i + b_{2i}\cos\delta_i \\ a_{3i}\sin\delta_i + b_{3i}\cos\delta_i \end{bmatrix} \cdot h$$

因此，陀螺群总角动量可表达成

$$\boldsymbol{H} = h(\boldsymbol{A}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{B}\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{E} \tag{8.4-5}$$

式中矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的元素仅与安装有关，可写成

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots a_{2n} \\ a_{31}\cdots a_{3n} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11}\cdots b_{1n} \\ b_{21}\cdots b_{2n} \\ b_{31}\cdots b_{3n} \end{bmatrix} \tag{8.4-6}$$

$\mathbf{sin}\boldsymbol{\delta}$、$\mathbf{cos}\boldsymbol{\delta}$ 为框架角正、余弦对角阵[66]：

$$\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \sin\delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sin\delta_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \cos\delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \cos\delta_n \end{bmatrix} \tag{8.4-7}$$

$\boldsymbol{E}$ 为 n 维单位矢量，$\boldsymbol{E}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 列矢量是框架角为 90°和 0°时第 i 个陀螺的角动量单位矢量，因此，式(8.4-5)表征陀螺群的角动量构形。

在星体坐标中，陀螺群各陀螺框架转速 $\dot{\delta}_i$ 产生的合成陀螺力矩 T 可表示为(略去负号)：

$$\boldsymbol{T} = \dot{\boldsymbol{H}} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{\delta}}\dot{\boldsymbol{\delta}} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\delta})\dot{\boldsymbol{\delta}}\, h \tag{8.4-8}$$

式中 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\delta})$为$(3\times n)$维矩阵，是框架角的三角函数，

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{C}_1\ \boldsymbol{C}_2\ \cdots\ \boldsymbol{C}_n)$$

$$\boldsymbol{C}_i(\delta_i) = \frac{\partial F}{\partial \delta_i} \cdot \frac{1}{h} \tag{8.4-9}$$

其中列矢量$\boldsymbol{C}_i$ 实为第 i 个陀螺在星体坐标的输出力矩的单位矢量 $\boldsymbol{t}_i$。按陀螺力矩的叉积规则，列矢量 $\boldsymbol{C}_i$ 又可写成

$$\boldsymbol{C}_i(\delta_i) = \boldsymbol{g}_i \times \boldsymbol{W}_i(\delta_i) \tag{8.4-10}$$

因此，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为陀螺群的力矩矩阵，仿照式(8.4-5)力矩矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的显式可写成

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\mathbf{cos}\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{B}\mathbf{sin}\boldsymbol{\delta} \tag{8.4-11}$$

陀螺群的输出力矩等于力矩矩阵 C 与框架转速矢量 $\dot{\delta}$ 乘积，因此，式(8.4-8)称为陀螺群的力矩方程。

陀螺群中各陀螺框架轴方向之间的空间几何关系以及与星体轴之间的安装几何方式形成陀螺群的基本构形或称静态构形。对于某一框架角组合 δ，式(8.4-5)表征陀螺群在该状态的角动量构形，式(8.4-11)表征相应的力矩构形，后两者实为动态构形，与可控性密切有关。例如，当矩阵 C 的列矢量相互平行时，陀螺群不能在该平行方向上输出力矩，丧失三维控制能力，可称谓陀螺陷入奇异状态。

陀螺群静态构形设计的重要因素是，合成角动量 $\boldsymbol{H}$ 在各种框架角组合下，在三维空间任意进动指向，即保证陀螺群具有三维控制能力，并使角动量 $\boldsymbol{H}$ 的端点能伸展到最大空间范围。此范围所包含的容积构成陀螺群的动量体，它的表面为动量包络，此包络的形状应满足特定要求。例如，要求此包络能笼罩住各种周期干扰力矩作用在星体上积累的动量容积。这样，周期性干扰动量全部被陀螺群吸收在动量体内，无需借助其他执行机构克服外界力矩干扰，即无需消耗它种能源。为提高陀螺群的效益，应尽量减少动量包络与干扰动量容积之间多余的动量空间。在一般情况下，陀螺群构形设计的效益指标可定义为动量包络上最小角动量与陀螺群角动量的代数和之比，可写成

$$\gamma = \min_{\xi} \max_{\delta} (F(\delta)|_{\xi}) \frac{1}{nh}$$

式中 ξ 表示由动量体中心指向包络的方向。

文献[67]分析了最大动量效益的可能性，如陀螺群由无限个陀螺组成，框架轴沿球面均匀分布，则最大动量效益可达

$$\gamma_{\max} = \frac{\pi}{4} = 0.785$$

其他任何构形的效益都小于此最大值。

下面是若干典型构形。

(1) 双平行构形

共设置四只力矩陀螺，安装方式见图 8.4-3。陀螺框架轴两两平行，又分别与星体轴 x_b，y_b 平行。动量体呈椭球形，长轴沿 z 轴。由于沿框架轴，该陀螺无角动量，在该方向上包络面呈凹陷，沿三轴的角动量为

$$H_x = 2h, \qquad H_y = 2h, \qquad H_z = 4h$$

动量效益为

$$\gamma = \frac{2}{4} = 0.5$$

双平行构形又可称为屋顶式构形，两对陀螺框架轴位于屋顶面，并与屋脊垂直，屋顶角为 90°。

(2) 三平行构形

在双平行构形上，增设一对平行陀螺，其框架轴沿星体第三轴。此构形的动量体近似为圆球，动量包络在三轴上均为 $4h$，动量效益为

$$\gamma = \frac{4}{6} = 0.667$$

单框陀螺群构形的一般形式可描述为锥形构形，其特点是：每只陀螺的框架轴与星体某一体轴(例如 z 轴)共面，与该轴夹角 β，框架轴在星体坐标平面 $x_b y_b$ 的投影与 x_b 轴夹角 α，框架

角零位的角动量平行于 $x_b y_b$ 平面，见例图 8.4-4。锥形构形陀螺群角动量的各分量（下标 i 为

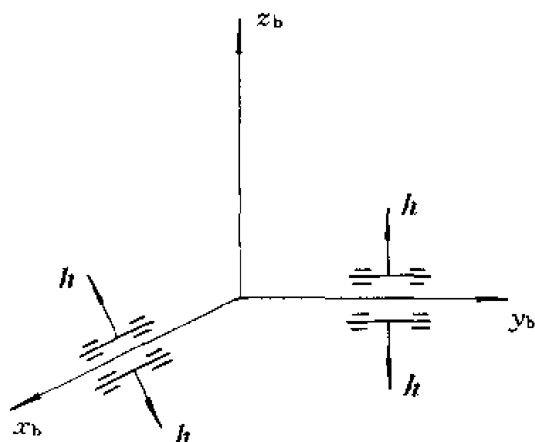


图　8.4-3

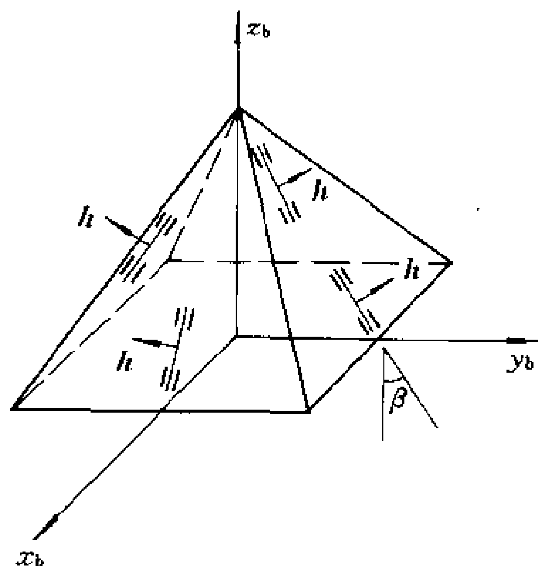


图　8.4-4

陀螺的序号）可写为

$$\left.\begin{aligned}H_x &= \sum_{i=1}^{N}(\cos\beta_i\cos\alpha_i\sin\delta_i - \sin\alpha_i\cos\delta_i)h\\H_y &= \sum_{i=1}^{N}(\cos\beta_i\sin\alpha_i\sin\delta_i + \cos\alpha_i\cos\delta_i)h\\H_z &= \sum_{i=1}^{N}(\sin\beta_i\sin\delta_i)h\end{aligned}\right\}\tag{8.4-12}$$

(3) 金字塔构形

共设置四只力矩陀螺，其框架轴分别位于金字塔的四个侧面，并与塔面底线垂直框架轴，与塔顶轴（z 轴）夹角均为 β。按表达式(8.4-12)，可设 $\alpha_1=0°$，$\alpha_2=90°$，$\alpha_3=180°$，$\alpha_4=270°$，见图 8.4-4，沿星体三轴的角动量分别为

$$\begin{aligned}H_x &= 2h + 2h\cos\beta\\H_y &= 2h + 2h\cos\beta\\H_z &= 4h\sin\beta\end{aligned}$$

为获得对称形的动量体和包络面，令沿三轴的角动量相等，由此得金字塔面倾角 $\beta=53.1°$，沿星体轴的角动量均为 $3.2h$。动量体的形状近似为球形，包络面上有四对凹陷，分布在球面的周围，沿框架轴方向，见图 8.4-5。包络凹陷的最小角动量为 $2.56h$，此构形的动量效益为

$$\gamma = \frac{2.56}{4} = 0.64$$

如四只陀螺中，有一只失效，陀螺群仍保持有三自由度控制能力，但动量体和动量包络变形较大，见图 8.4-6。

(4) 四棱锥构形

共有五只力矩陀螺，构形方式是在金字塔构形中增加一只陀螺，其框架轴平行于塔顶轴，与塔底面垂直。沿三本体轴的角动量为

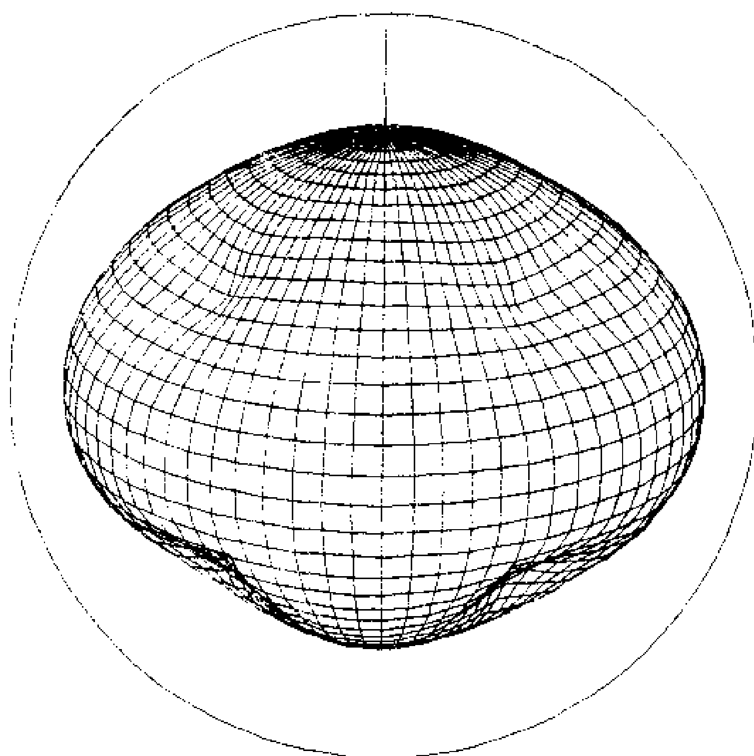


图 8.4-5

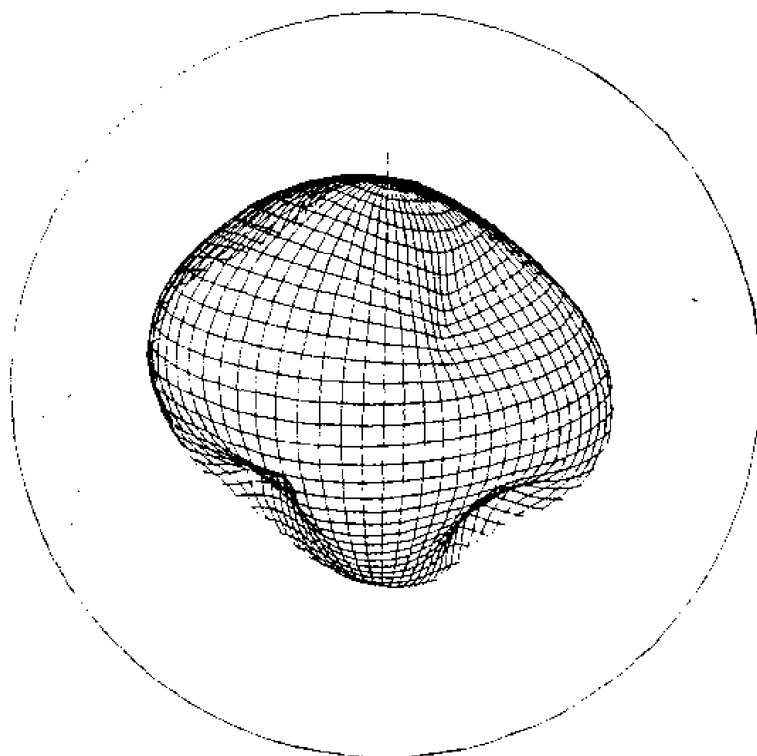


图 8.4-6

$$H_x = 3h + 2h\cos\beta$$

$$H_y = 3h + 2h\cos\beta$$

$$H_z = 4h\sin\beta$$

为获得对称动量体和包络,金字塔面倾角应改为 68.7°。此构形的动量体更接近为球形,在包络面上除原有四对凹陷,沿 z 轴也有一对凹陷,见图 8.4-7。此构形失效一只陀螺引起的包络变形有所改善,见图 8.4-8。

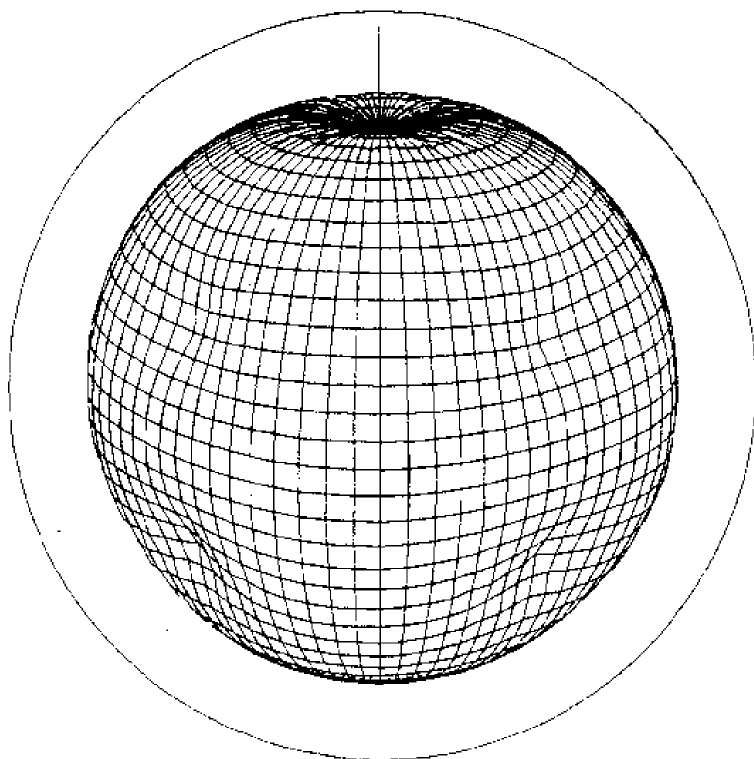


图 8.4-7

(5) 五棱锥构形

由六只陀螺组成,其中五只陀螺框架轴对称位于五棱锥的侧面,与棱轴夹 β 角,棱锥的底面呈正五边形,第六只陀螺框架轴垂直于底面 $x_b y_b$,见图 8.4-9。为获得均匀对称的动量体和包络,令任意两只陀螺框架轴之间的夹角均相等,由球面三角形 zAB(见图 8.4-10),有余弦定理

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \eta$$

依据构形设置要求,应令 $\eta=\frac{1}{5}\times 360°=72°$, $a=b=c=\beta$,由此得框架轴夹角 $\beta=63.4°$。

此构形的动量体更接近为圆球形,包络面上凹陷不明显,见图 8.4-11。包络凹陷的最小角动量为 $4.35h$,因此,动量效益为

$$\gamma = \frac{4.35}{6} = 0.725$$

如有一只陀螺失效,此构形仍有较好的动量体和包络外形,见图 8.4-12。

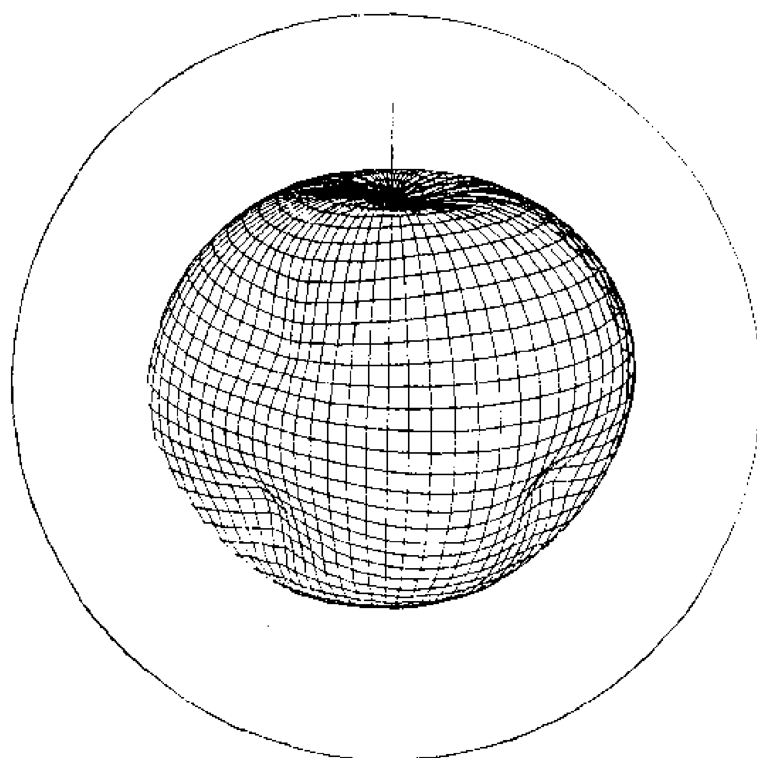


图 8.4-8

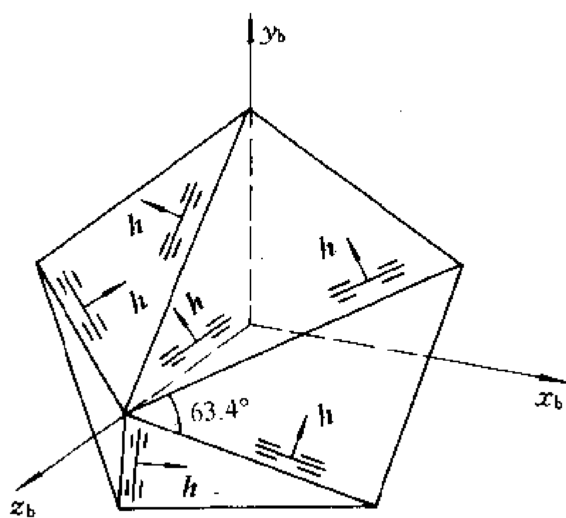


图 8.4-9

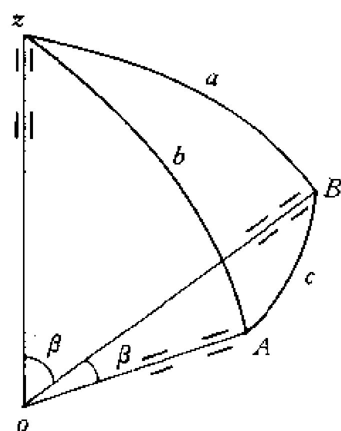


图 8.4-10

8.4.2 单框力矩陀螺群的构形奇异

单框力矩陀螺群静态构形设计的另一重要因素是动态构形的奇异问题。单框力矩陀螺的角动量局限于框架轴垂直平面，输出的陀螺力矩局限于框架平面的法线。在星体坐标中，两者的方向决定于陀螺群的安装构形和框架转角。如在某种框架角组合情况下，陀螺群的角动量相

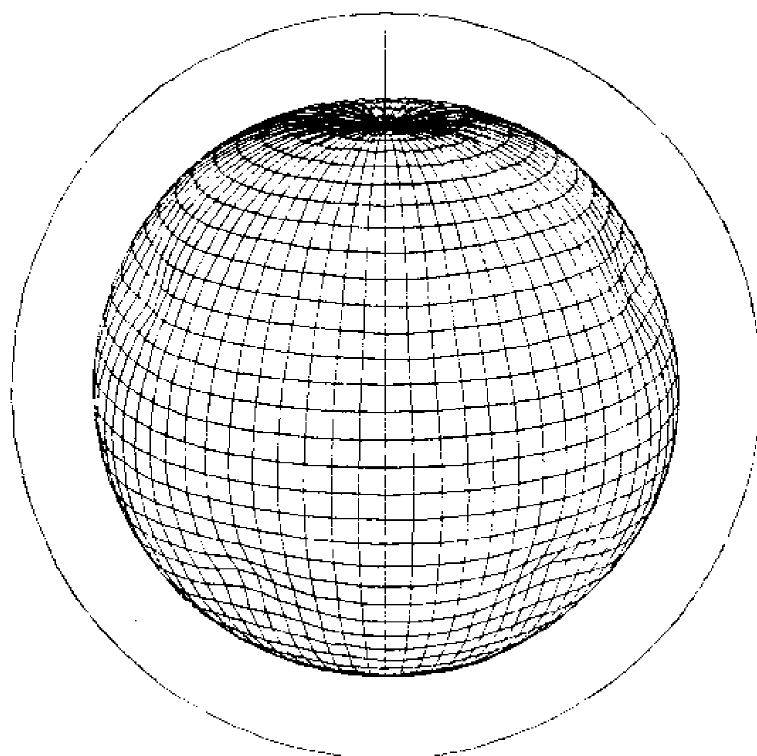


图 8.4-11

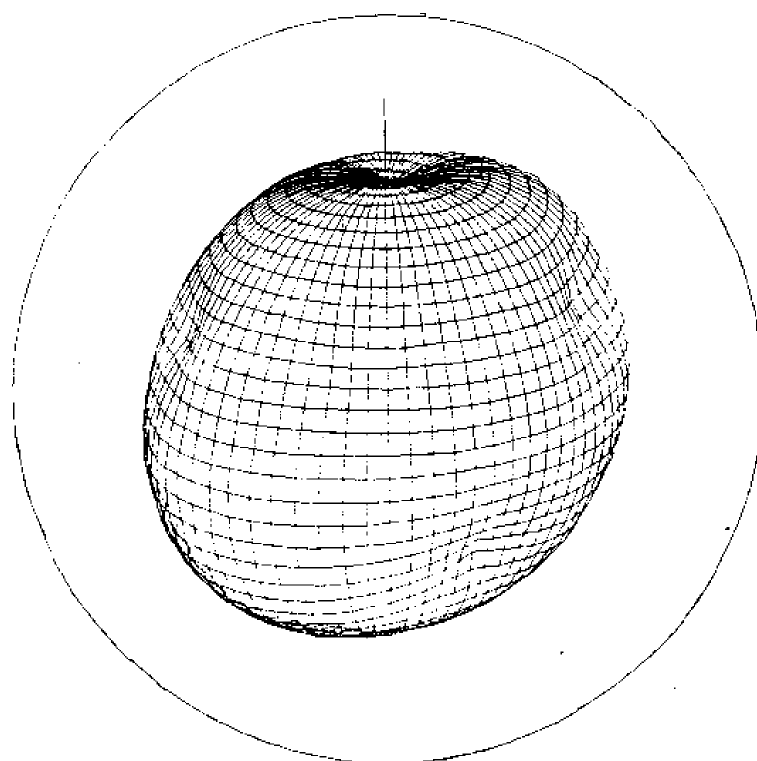


图 8.4-12

互平行，则陀螺群在该方向不能输出力矩；如在另种框架角组合下，陀螺群的力矩轴共面，则陀螺群的控制作用局限于该面。上述两种情况，陀螺群都丧失三维控制能力，称陀螺群陷入框架构形奇异状态。描述奇异状态的定义可列为：符合下列等式的框架角组合$(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)$，

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{C}_i(\delta_i)=0\qquad i=1,2,\cdots,n\tag{8.4-13}$$

式中$\boldsymbol{u}$为某一给定控制力矩方向的单位矢量。根据陀螺群角动量相对动量体的状况，奇异状态可分为两类：外奇异和内奇异，后者又有隐奇异或显奇异两种性质[67,68]。

外奇异实为饱和奇异，陀螺群的角动量进动到动量体的包络面，各陀螺角动量在此方向的投影都达最大值，见图8.4-13。角动量端点仅能沿包络切线方向或切线内部方向移动，因而，陀螺群不能提供沿包络法线N的力矩，失去在此方向的控制能力。

内奇异为框架构形状态奇异，陀螺群的角动量位于动量体内部，但各陀螺角动量在指令力矩方向的投影都为最大，因而陀螺群失去沿该方向产生陀螺力矩的能力。在奇异状态，各个陀螺的力矩矢量$\boldsymbol{C}_i$垂直于框架轴g_i与指令力矩$\boldsymbol{u}$的平面，即处在框架转动平面与指令力矩矢量的垂直平面的节线上，见图8.4-14。利用陀螺角动量$\boldsymbol{h}_i$和力矩矢量$\boldsymbol{C}_i$(即角动量变率的单位矢

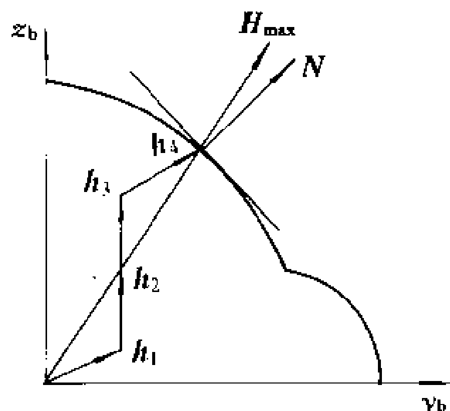


图 8.4-13

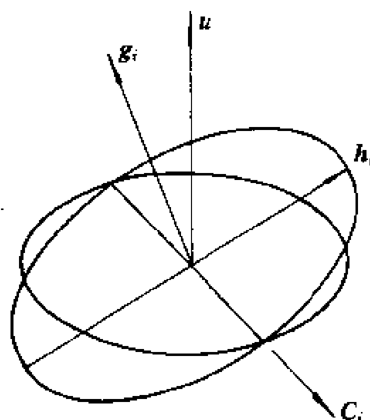


图 8.4-14

量)在陀螺基座坐标的表达式(8.4-3)，两者与指令力矩的标积为

$$\boldsymbol{h}_i\cdot\boldsymbol{u}=h\cos\delta_i(\boldsymbol{y}_s\cdot\boldsymbol{u})+h\sin\delta_i(\boldsymbol{z}_s\cdot\boldsymbol{u})$$

$$\boldsymbol{C}_i\cdot\boldsymbol{u}=-\sin\delta_i(\boldsymbol{y}_s\cdot\boldsymbol{u})+\cos\delta_i(\boldsymbol{z}_s\cdot\boldsymbol{u})$$

$\boldsymbol{y}_s\cdot\boldsymbol{z}_s$代表基座坐标矢量。根据奇异状态条件式(8.4-13)，上面第二式为零，由此可得

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{h}_i\cdot\boldsymbol{u})^2&=h^2[(\boldsymbol{y}_s\cdot\boldsymbol{u})^2+(\boldsymbol{z}_s\cdot\boldsymbol{u})^2]\\\delta_i&=\arctan\left[\pm\frac{(\boldsymbol{z}_s\cdot\boldsymbol{u})}{(\boldsymbol{y}_s\cdot\boldsymbol{u}}\right]\end{aligned}\right\}\tag{8.4-14}$$

上式表明角动量$\boldsymbol{h}_i$在指令力矩$\boldsymbol{u}$方向的投影达最大值，又表明奇异状态的框架角可有双值，即角动量$\boldsymbol{h}_i$可指向节线两侧的某一方向，见图8.4-14。因此，对应某一给定的指令力矩，在动量体内部存在2^n组奇异框架构形(由2^n组框架角决定)，陀螺群不能产生沿该指令方向的陀螺力矩。

在n维框架角空间，奇异框架构形对应一个奇点δ^s，它在三维角动量空间影射一个奇点H^s，但角动量H^s在框架角空间的影射是一个$n-3$维的子空间。如果此子空间含有在奇点δ^s附

近无穷多个非奇点，则此奇点 H^s 或 δ^s 称为隐奇点。如角动量奇点 H^s 在 δ 空间仅对应一个孤立的奇点 δ^s，则称为显奇点，见图 8.4-15。显然，在隐奇点附近，可以调整框架构形不引起角动量的变化，即对于该角动量，可以将陀螺群的框架再构形，脱离奇异状态，同时又不产生附加的陀螺力矩(因角动量未进动)。但对显奇点，调整框架构形必然引起角动量的变化，引起附加的陀螺力矩，即处于显奇点的框架不具备再构形的条件。因此，隐奇点又可称为可越奇点，显奇点称为不可越奇点[67~70]。

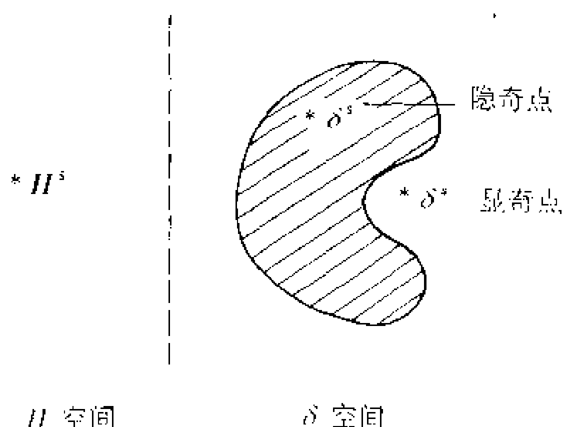


图 8.4-15

从框架构形奇异角度，陀螺群构形设计的另一重要因素是，使动量体内不存在显奇点(理想情况)，或使显奇点处在动量体的外表部且靠近包络面。这样不影响动量体内的正常控制，仅少许降低动量效益。通过检查奇点处再构形的可能性，即可验证该奇点的性质。设对于某指令力矩 $\boldsymbol{u}$，已知框架奇点 $\boldsymbol{\delta}^*$ 及对应的角动量 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\delta}^*)$，将该角动量以泰勒展开，有

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\delta}^* + \mathrm{d}\boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\delta}^*) + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \delta_i}\mathrm{d}\delta_i + \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial \delta_i}\mathrm{d}\delta_i^2\right]_{\delta^*} + 0$$

$$= \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\delta}^*) + \sum_{i=1}^{n}\left[h\boldsymbol{C}_i(\delta_i^*)\mathrm{d}\delta_i - \frac{1}{2}\boldsymbol{h}_i(\delta_i^*)\mathrm{d}\delta_i^2\right] + 0 \tag{8.4-15}$$

式中，$\mathrm{d}\delta$ 为框架角增量，$\boldsymbol{C}_i$ 为第 i 个陀螺的力矩矢量，$\boldsymbol{h}_i$ 为第 i 个陀螺的角动量。以该指令方向 $\boldsymbol{u}$ 与式(8.4-15)标积，由奇点定义式(8.4-13)，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{C}_i=0$，得

$$\boldsymbol{u}\cdot[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\delta}^* + \mathrm{d}\boldsymbol{\delta}) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\delta}^*)] = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{\delta}_i^*)\mathrm{d}\delta_i^2$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\mathrm{d}\boldsymbol{\delta} \tag{8.4-16}$$

式中矩阵 $\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{h}_i^*)$。再构形的条件是不改变陀螺群的角动量，这种再构形称为空转控制，有角动量等式，

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\delta}^* + \mathrm{d}\boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\delta}^*)$$

由式(8.4-16)，再构形框架角增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}$ 应满足条件

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\mathrm{d}\boldsymbol{\delta} = 0 \tag{8.4-17}$$

又根据再构形时无陀螺力矩输出的条件，由力矩方程(8.4-8)，再构形的框架角增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}$ 应满足条件

$$\boldsymbol{C}\mathrm{d}\boldsymbol{\delta} = 0 \tag{8.4-18}$$

即框架角增量 $d\delta$ 应与力矩阵 C 的三个行矢量正交。再根据线性方程理论，上式(8.4-18)齐次方程的一般解可写为

$$d\delta = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i \boldsymbol{n}_i = N\boldsymbol{\lambda} \tag{8.4-19}$$

式中，λ_i为待定的标量系数；$\boldsymbol{n}_i$为矩阵 C 的基矢量，$i=1,2,\cdots,n-r$；r 为矩阵 C 的秩；$\boldsymbol{\lambda}$ 为 λ_i 组成的列矢量；N 为由基矢量 $\boldsymbol{n}_i$ 作为行矢量组成的矩阵。将式(8.4-19)代入式(8.4-17)，得二次形方程

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} Q \boldsymbol{\lambda} = 0 \tag{8.4-20}$$

式中对称矩阵 $Q=N^{\mathrm{T}}PN$。如上式的待定系数 λ 有解，则表明存在框架角增量 $d\delta$，同时满足条件式(8.4-17)和(8.4-18)，可实现再构形，该奇点 δ^* 为隐奇点。如 λ 无解，则表明不具备再构形的条件，该奇点为显奇点。因此，应用式(8.4-20)建立验证动量体内奇点性质的判别条件。

对于任一类陀螺构形，都可检查动量体内部显奇点的分布区。在星体坐标的球面立体空间，按经、纬圈，逐次给定指令力矩方向 $\boldsymbol{u}$，按式(8.4-14)，得出相应的 2^n 个框架奇点，以及相应角动量在动量体内的位置，计算各奇点处各陀螺角动量 $\boldsymbol{h}_i$ 沿指令力矩方向 $\boldsymbol{u}$ 的投影矩阵 P。再计算各奇点处力矩矩阵 C 的零解基矢量及矩阵 N，判别二次型矩阵 $Q=N^{\mathrm{T}}PN$ 的确定性。如 Q 为确定阵(正定或负定)，则等式(8.4-20)的待定系数 λ 只有零解，该奇点为显奇点；如 Q 为非确定阵，则式(8.4-20)有解，该奇点为隐奇点。

图 8.4-16 和图 8.4-17 显示几种陀螺构形的动量体内显奇点的分布情况，构形的标记如下：

■——双平行构形；

▲——金字塔构形；

⋆——四棱锥构形；

●——五棱锥构形。

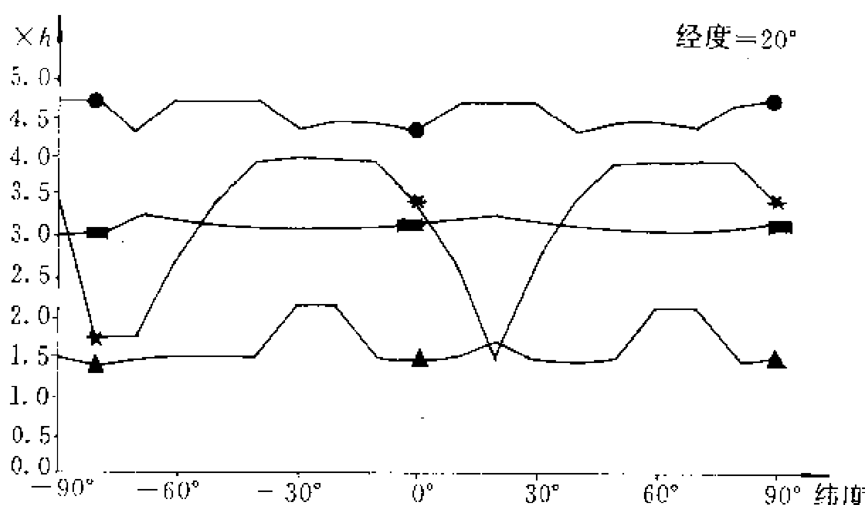


图 8.4-16

图 8.4-16 表示在沿星体座球面的经度圈 20°上，指令力矩的显奇点对应的最小角动量 $H_{\min}$；图 8.14-17 表示沿纬度圈 20°上，显奇点对应的最小角动量 $H_{\min}$。

比较经度和纬度圈中各构形动量体内奇点分布的区域，五棱锥构形的奇点角动量分布在

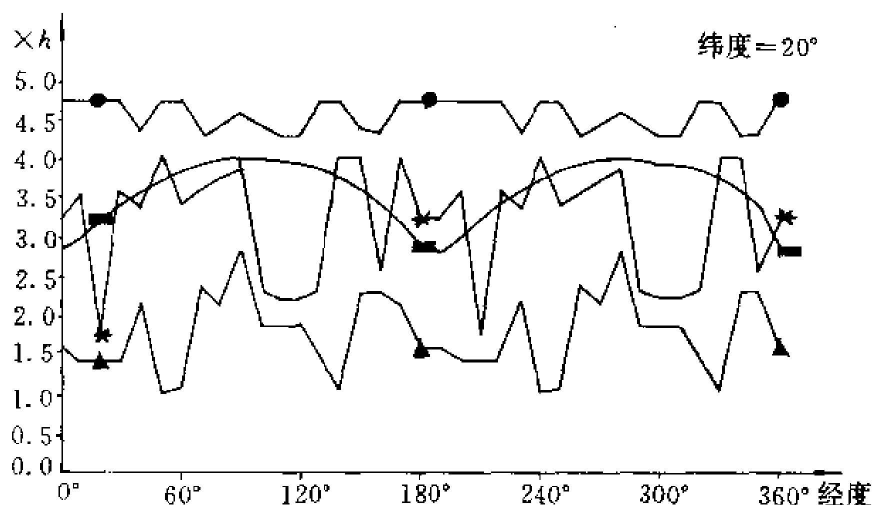


图　8.4-17

最靠近动量体外表。定义奇点损失率 μ 为动量体构形效益与可控效益之差，即

$$\mu = \gamma - H_{\min}/nh$$

不同陀螺群的奇点损失见表 8.4-1。

表　8.4-1

构　　形	最小显奇点角动量 h	显奇点损失率
双平行构形	2.828	7.8
金字塔构形	1.038	52.5
四棱锥构形	1.727	44.0
五棱锥构形	4.274	7.3

因此，对于长寿命低轨道的航天器，五棱锥构形是单框力矩陀螺群的最佳构形，见文献[71]。

通过上述方法可检查陀螺群动量体内显奇点所处位置。对于实际控制，须对实时框架构形进行评估，是否处于奇异状态，或是否靠近奇异状态。因此，须给予框架构形以适当的量度：对于任意框架构形，即任意框架角的组合，该量度应恒为正值；仅在所有奇点处，该量度为零；此量度越大表明框架构形越远离奇异状态。根据力矩矩阵 C 的几何特性，框架构形奇异相应于矩阵 C 的秩小于 3，即 $\mathrm{Rank}(C)<3$ 或行列式 $\det(CC^{\mathrm{T}})=0$。因此，陀螺群框架构形的量度可列为

$$D = \det(CC^{\mathrm{T}})$$

因 CC^{T} 为对称矩阵，令其特征矢量和特征值为 Λ_1，Λ_2，Λ_3 和 λ_1，λ_2，λ_3，则有正则矩阵

$$\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$$

可将对称矩阵 CC^{T} 正则化为对角阵

$$\Lambda^{\mathrm{T}} CC^{\mathrm{T}} \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

矩阵 C 的第 i 列为 C_i，展开上式可得

$$\lambda_1 = \sum_{i=1}^{n}(\Lambda_1^{\mathrm{T}}C_i)^2 \geqslant 0$$

$$\lambda_2 = \sum_{i=1}^{n}(\Lambda_2^{\mathrm{T}}C_i)^2 \geqslant 0$$

$$\lambda_3 = \sum_{i=1}^{n}(\Lambda_3^{\mathrm{T}}C_i)^2 \geqslant 0$$

因 Λ_1，Λ_2，Λ_3 为正交特征矢量，因此，由上式得矩阵 CC^{T} 的特征值之和为

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \sum_{i=1}^{n}|C_i|^2 = n \tag{8.4-21}$$

即矩阵 CC^{T} 的特征值之和与陀螺框架角无关，恒等于陀螺的总数。对称矩阵 CC^{T} 的另一性质为

$$\det(CC^{\mathrm{T}}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \tag{8.4-22}$$

因此，力矩阵 C 或框架构形的量度 D 恒为正值。再由式(8.4-21)，(8.4-22)，当特征值 λ_1，λ_2，λ_3 相等且等于 $n/3$ 时，量度 D 达最大值，

$$D_{\max} = n^3/27$$

量度 D 值越大，表明力矩阵 C 的特征值越大，框架构形离奇异状态越远，产生沿任一方向的陀螺力矩的可能性越大。

8.4.3 单框力矩陀螺群的控制律

陀螺群的控制律是陀螺群动力学的逆问题，即根据陀螺群框架转角的现况，合理分配各框架转速指令，使陀螺群的输出力矩与星体姿态控制系统要求的指令控制力矩相等。由于控制量的维数大于控制自由度，逆问题的解不是唯一的，最优解是满足力矩方程(作为约束条件)

$$C(\delta)\dot{\delta} = T/h \tag{8.4-23}$$

和优化指标 $Q=\frac{1}{2}\dot{\delta}^{\mathrm{T}}\dot{\delta}$ 为最小的伪逆解(参见式(8.3-12))，即为

$$\dot{\delta} = C^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1}T/h \tag{8.4-24}$$

显然，当行列式 $\det(CC)^{\mathrm{T}} = 0$ 时，上式无解，即当陀螺群框架处于奇异状态时，力矩方程(8.4-23)无伪逆解。由 8.4.2 节叙述，框架奇异并不表明一概无力矩输出，而是沿奇异方向无力矩输出，该奇异方向是与力矩矩阵各列矢量 C_i 正交的方向。因此，当框架陷入奇异，但指令力矩与奇异方向不并行时，力矩方程(8.4-23)的逆问题可修改为无约束的优化问题，优化指标为下式达最小值，

$$Q = \frac{1}{2}\alpha\dot{\delta}^{\mathrm{T}}\dot{\delta} + \frac{1}{2}(C\dot{\delta} - T/h)^{\mathrm{T}}(C\dot{\delta} - T/h)$$

式中 α 为权系数。上式优化的意义包含陀螺群的输出力矩与指令力矩的差为最小。对上式求偏导数，并令其为零，可得控制律

$$\dot{\delta} = C^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}} + \alpha E)^{-1}T/h \tag{8.4-25}$$

称为鲁棒伪逆[69]，式中 E 为 3×3 单位阵。当 $\alpha=0$，鲁棒伪逆与一般伪逆等同，由于引入权系数 α，鲁棒伪逆控制律含小量力矩误差，但在奇点处仍有可控性。结合两者特性，在非奇异处，令

$\alpha=0$，而当 $\det(CC^{\mathrm{T}})$ 趋向于零时，则增大权系数 α。

在航天器的控制过程中，指令力矩的变化趋势是不可预知的，因而难以预估陀螺群角动量及框架构形的变化趋向，但可利用框架构形的量度 $D=\det(CC^{\mathrm{T}})$，实时评估构形的品质，并作为限制条件，不断地将框架再构形，预防进入奇异状态。因此，在陀螺群控制律——框架转速指令中应引入框架再构形指令。由于框架再构形不应引起附加的陀螺力矩，这种框架构形的调整可称为空转，再构形指令称为空转指令或空转控制。空转指令可由力矩方程(8.4-23)的齐次部分得出，该方程的解有两部分

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}=\dot{\boldsymbol{\delta}}_T+\dot{\boldsymbol{\delta}}_N$$

其中，$\dot{\boldsymbol{\delta}}_T$ 为有力矩输出的转速指令，$\dot{\boldsymbol{\delta}}_N$ 为空转指令，满足下列方程式：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{\delta}}_T&=\boldsymbol{T}/h\\ \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{\delta}}_N&=0\end{aligned}\right\}\tag{8.4-26}$$

上面第一式有伪逆解(8.4-24)。按广义逆定理上面第二式有解

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_N=\alpha[\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{C}]\boldsymbol{u}\tag{8.4-27}$$

即为空转指令。式中 α 为待定标量系数，$\boldsymbol{u}$ 为待定 n 维矢量，$\boldsymbol{E}_n$ 为 $n\times n$ 单位矩阵。将空转控制律(8.4-27)代入式(8.4-26)，即可验证其空转性质

$$\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{\delta}}_N=\alpha[\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{C}]\boldsymbol{u}=\alpha[\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}]\boldsymbol{u}=0$$

空转控制的要点在于选择标量 α 和矢量 $\boldsymbol{u}$，使构形的框架构形量度 D 的增值为正，有效地避开陷入奇异。

框架转动引起 D 值的变化为

$$\dot{D}=\frac{\partial D^{\mathrm{T}}}{\partial\delta}\dot{\boldsymbol{\delta}}=\frac{\partial D^{\mathrm{T}}}{\partial\delta}\dot{\boldsymbol{\delta}}_T+\frac{\partial D^{\mathrm{T}}}{\partial\delta}\dot{\boldsymbol{\delta}}_N$$

式中 $\frac{\partial D^{\mathrm{T}}}{\partial\delta}=\left(\frac{\partial D}{\partial\delta_1},\frac{\partial D}{\partial\delta_2},\cdots,\frac{\partial D}{\partial\delta_n}\right)$，为框架构形量度的梯度。上式右端第一项决定控制指令的需求，空转控制仅能影响第二项，令其为 R：

$$R=\frac{\partial D^{\mathrm{T}}}{\partial\delta}\dot{\boldsymbol{\delta}}_N$$

此值为陀螺群构形在空转控制过程中脱离奇异状态的速度，应取正最大值。将空转指令(8.4-27)代入上式(略去标量 α)，有

$$R=\frac{\partial D^{\mathrm{T}}}{\partial\delta}[\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{C}]\boldsymbol{u}=\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{u}$$

式中矢量 $\boldsymbol{V}$ 的 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}=\frac{\partial D^{\mathrm{T}}}{\partial\delta}[\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{C}]$。显然，当待定矢量 $\boldsymbol{u}$ 与矢量 $\boldsymbol{V}$ 平行时，R 取正最大值，引入标量 α，令

$$\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{V}$$

得空转指令为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\delta}}_N&=\alpha[\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{C}][\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{C}]\frac{\partial D}{\partial\delta}\\&=\alpha[\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{C}]\frac{\partial D}{\partial\delta}\end{aligned}\tag{8.4-28}$$

待定标量 α 与再构形的反应快慢有关，须从控制系统总体需求考虑。综上所述，单框力矩陀螺群的整体控制律可归纳为

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}\frac{\boldsymbol{T}}{h}+\alpha[\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{C}]\frac{\partial D}{\partial\delta} \tag{8.4-29}$$

式中

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cos\delta-\boldsymbol{B}\sin\delta$$

$$D=\det(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})$$

$$\frac{\partial D^{\mathrm{T}}}{\partial\delta}=\left(\frac{\partial D}{\partial\delta_1},\frac{\partial D}{\partial\delta_2},\cdots,\frac{\partial D}{\partial\delta_n}\right)$$

为便于控制律的应用，应列出梯度矢量$\frac{\partial D}{\partial\delta}$的显式，见文献[72]。令矩阵 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 的元素为 $e_{m,k}$，其对 δ_i 的偏导数为 $e'_{m,k,i}$ ($m=1,2,3$; $k=1,2,3$; $i=1,2,\cdots,n$)，则奇异梯度的各分量可按下式计算：

$$\frac{\partial D}{\partial\delta_i}=\frac{\partial}{\partial\delta_i}\begin{vmatrix}e_{11}&e_{12}&e_{13}\\e_{21}&e_{22}&e_{23}\\e_{31}&e_{32}&e_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}e'_{11i}&e'_{12i}&e'_{13i}\\e_{21}&e_{22}&e_{23}\\e_{31}&e_{32}&e_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}e_{11}&e_{12}&e_{13}\\e'_{21i}&e'_{22i}&e'_{23i}\\e_{31}&e_{32}&e_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}e_{11}&e_{12}&e_{13}\\e_{21}&e_{22}&e_{23}\\e'_{31i}&e'_{32i}&e'_{33i}\end{vmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵，$e_{m,k}=e_{k,m}$，$e'_{m,k,i}=e'_{k,m,i}$，上式可写成

$$\frac{\partial D}{\partial\delta_i}=e'_{11i}\ (e_{22}e_{33}-e_{23}^2)+e'_{22i}\ (e_{11}e_{33}-e_{13}^2)+e'_{33i}\ (e_{11}e_{22}-e_{12}^2)$$

$$+2e'_{12i}\ (e_{13}e_{23}-e_{12}e_{33})+2e'_{13i}\ (e_{12}e_{23}-e_{22}e_{13})+2e'_{23i}\ (e_{12}e_{13}-e_{11}e_{23}) \tag{8.4-30}$$

式中偏导数 $e'_{m,k,i}$ 为矩阵 $\partial(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})/\partial\delta_i$ 的元素。引用式(8.4-11)，有矩阵式[66]

$$\frac{\partial(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})}{\partial\delta_i}=(\boldsymbol{A}\frac{\partial\cos\boldsymbol{\delta}}{\partial\delta_i}-\boldsymbol{B}\frac{\partial\sin\boldsymbol{\delta}}{\partial\delta_i})\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}(\frac{\partial\cos\boldsymbol{\delta}}{\partial\delta_i}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\frac{\partial\sin\boldsymbol{\delta}}{\partial\delta_i}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$$

$$=2\sin\delta_i\cos\delta_i(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}})+(\sin^2\delta_i-\cos^2\delta_i)(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}) \tag{8.4-31}$$

$\boldsymbol{A}_i$，$\boldsymbol{B}_i$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的第 i 列；$(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}})$和$(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}})$为$(3\times3)$对称矩阵，是常值矩阵，与框架转角无关；式(8.4-30)和(8.4-31)组成梯度矢量$\frac{\partial D}{\partial\delta}$的算式。

8.5 姿态大角度机动控制

因卫星入轨操作或卫星应用任务的需求(例[73])，须控制卫星在大范围内进行姿态机动调整，从现姿态转向另一个预定的目标姿态。在大角度机动过程中，当相对参考天体的姿态矢量敏感器不能恒定地进行观测，只能应用速率陀螺测量星体绕各轴的转速，通过运动学方程求解卫星的姿态参数。同时速率陀螺也是控制姿态机动的敏感器。因此，大角度机动过程采用姿态四元素描述最为合适。参阅 5.2.4 节和 5.3 节关于四元素姿态的转换和四元素运动方程。姿态四元素实际为将参考坐标转至姿态星体坐标的欧拉轴/角转动四参数，因此，也可称为坐标系之间的姿态机动四元素。

令现姿态四元素为 $\boldsymbol{q}$，目标姿态四元素为 $\boldsymbol{q}''$，按代数四元素的乘法顺序和乘法规则，向目标姿态机动的姿态机动四元素 $\boldsymbol{q}'$（见式(5.2-28)）为

$$\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{q}^{-1}\boldsymbol{q}'' = \begin{bmatrix} -q_4'' & q_3'' & -q_2'' & q_1'' \\ q_3'' & -q_4'' & -q_1'' & q_2'' \\ -q_2'' & q_1'' & -q_4'' & q_3'' \\ q_1'' & q_2'' & q_3'' & q_4'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \tag{8.5-1}$$

$\boldsymbol{q}'$ 也可视为目标姿态相对现姿态星体坐标的四元素。从控制回路角度，还可称作现姿态相对目标姿态的四元素偏差。为便于姿态机动控制律的设计，令目标姿态为参考坐标，即描述目标姿态的四元素为

$$\boldsymbol{q}'' = (0\ 0\ 0\ 1)^{\mathrm{T}} \tag{8.5-2}$$

代入式(8.5-1)，得 $\boldsymbol{q}'=\boldsymbol{q}^{-1}$，即姿态机动四元素为现姿态四元素的逆，这与现姿态被定义在目标姿态坐标的结果相符。在工程实践中，目标姿态以几何方式给出，现姿态由姿态敏感器测得，两者的初始描述均为姿态矩阵 $\boldsymbol{A}''$ 和 $\boldsymbol{A}$。由此可确定姿态机动的转换矩阵 $\boldsymbol{A}'$ 为

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}''\boldsymbol{A}^{-1}$$

以及与姿态矩阵 $\boldsymbol{A}'$ 相对应的姿态机动四元素 $\boldsymbol{q}'$。按上述定义式(8.5-2)，现姿态的四元素则为此 $\boldsymbol{q}'$ 的逆。

在姿态机动过程，根据四元素运动方程，由姿态转速可得姿态四元素，两者定义在同一坐标系。如相对定义在轨道坐标的目标姿态进行姿态机动，则由速率陀螺测量值 ω_{xg}，ω_{yg}，ω_{zg} 解算姿态四元素（相对轨道坐标系）的运动方程应列为

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{xg} - \omega_{ox} \\ \omega_{yg} - \omega_{oy} \\ \omega_{zg} - \omega_{oz} \end{bmatrix} \tag{8.5-3}$$

式中 ω_{ox}，ω_{oy}，ω_{oz} 为轨道坐标相对空间的转速在星体坐标的分量。如上式四元素 $\boldsymbol{q}$ 为现姿态相对目标标姿态的四元素，目标姿态矩阵在轨道坐标中定为 $\boldsymbol{A}''$，则轨道转速分量的计算式为

$$\begin{bmatrix} \omega_{ox} \\ \omega_{oy} \\ \omega_{oz} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{A}'' \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_o \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8.5-4}$$

式中 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$ 是以现姿态四元素 $\boldsymbol{q}$ 得出的姿态矩阵。

理想的机动方式是欧拉轴/角机动，控制卫星绕欧拉轴 $\boldsymbol{e}$：

$$\boldsymbol{e} \parallel (-q_1\boldsymbol{x}_b - q_2\boldsymbol{y}_b - q_3\boldsymbol{z}_b)$$

转过欧拉角 φ：

$$\varphi = 2\arccos q_4$$

建立星体转速控制回路，令三轴的转速指令为

$$\begin{bmatrix} \omega_{xc} \\ \omega_{yc} \\ \omega_{zc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Kq_4q_1 + \omega_{ox} \\ -Kq_4q_2 + \omega_{oy} \\ -Kq_4q_3 + \omega_{oz} \end{bmatrix} \tag{8.5-5}$$

式中 K 为正值系数。如忽略动力学问题，在机动过程中速率陀螺的测量能复现指令值，则将式(8.5-5)代入式(8.5-3)，得姿态机动过程的四元素方程为

$$\dot{q}_1 = -\frac{1}{2}Kq_4^2q_1$$

$$\dot{q}_2 = -\frac{1}{2}Kq_4^2q_2$$

$$\dot{q}_3 = -\frac{1}{2}Kq_4^2q_3$$

$$\dot{q}_4 = \frac{K}{2}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)q_4$$

姿态四元素收敛至 $\boldsymbol{q}=(0\ 0\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}$，与目标姿态重合。

考虑星体动力学，因星体三轴惯量不等并有惯量积，姿态机动引起陀螺力矩 $-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I\omega}$，简单的转速控制回路不能实现欧拉轴/角机动。采用姿态四元素和转速联合反馈的力矩控制，可实现大角度机动的稳定收敛。令零动量卫星姿态动力学方程为

$$\boldsymbol{I\dot{\omega}} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{I\omega} + \boldsymbol{T} \tag{8.5-6}$$

惯量阵 $\boldsymbol{I}$ 仅含主惯量，控制力矩 $\boldsymbol{T}$ 正比于姿态四元素的欧拉轴方向元素 $\boldsymbol{q}_e=(q_1\ q_2\ q_3)^{\mathrm{T}}$ 和姿态速率 $\boldsymbol{\omega}$ 的负反馈，即令

$$\boldsymbol{T} = -K\boldsymbol{q}_e - D\boldsymbol{\omega} \tag{8.5-7}$$

K 为标量系数，D 为标量系数对角阵。利用李亚普诺夫函数法验证此控制律的渐近稳定性，令李亚普诺夫函数为

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=x,y,z} I_i\omega_i^2 + \frac{1}{2}K[\sum_{j=1}^{3}q_j^2 + (q_4 - 1)^2] \tag{8.5-8}$$

其导数为

$$\dot{V} = \sum_{i=x,y,z} I_i\omega_i\dot{\omega}_i + K[\sum_{j=1}^{4}q_j\dot{q}_j - \dot{q}_4] \tag{8.5-9}$$

参阅式(8.5-3)，有

$$\sum_{j=1}^{4}q_j\dot{q}_j = 0$$

$$\dot{q}_4 = -(q_1\omega_x + q_2\omega_y + q_3\omega_z)$$

将控制律(8.5-7)代入动力学方程(8.5-6)，再将转速状态 $I_i\dot{\omega}_i$ 代入式(8.5-9)，得

$$\dot{V} = -\sum_{i=x,y,z} D_i\omega_i^2$$

欲使李亚普诺夫函数趋向于零值，其充分条件即为 $\boldsymbol{\omega}$，$\boldsymbol{q}_e$ 趋向零，q_4 趋向于 1。

实现欧拉轴/角机动的基本条件是在控制力矩中包含陀螺力矩的补偿项 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{I\omega}$，或压低机动转速，忽略陀螺力矩的影响。在此情况下如星体初始转速为零，则控制力矩的作用方向不是沿欧拉轴 $\boldsymbol{q}_e$，而应沿 $\boldsymbol{Iq}_e$ 的方向($\boldsymbol{I}$ 为星体主惯量阵)。令控制力矩为

$$\boldsymbol{T} = -k\boldsymbol{Iq}_e - d\boldsymbol{I\omega} \tag{8.5-10}$$

式中 k，d 为标量系数。将上式代入式(8.5-6)，得动力学方程

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -d\boldsymbol{\omega} - k\boldsymbol{q}_e \tag{8.5-11}$$

四元素方程式(8.5-3)可分解为两部分

$$\dot{\boldsymbol{q}}_e = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{q}_e + \frac{1}{2}q_4\boldsymbol{\omega} \tag{8.5-12}$$

$$\dot{q}_4 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_e \tag{8.5-13}$$

初始条件为 $\boldsymbol{q}_e(0)$，$q_4(0)$和 $\boldsymbol{\omega}(0)$等于零。如星体绕欧拉轴 $\boldsymbol{q}_e$ 转动，则转动过程中 $\boldsymbol{q}_e$ 不变，即 $\boldsymbol{q}_e(t)$总是平行于 $\boldsymbol{q}_e(0)$，可写为

$$\boldsymbol{q}_e(t) = C(t)\boldsymbol{q}_e(0) \tag{8.5-14}$$

式中$C(t)$为标量系数。因 $\boldsymbol{\omega}(0)=0$ 且 d，k 为标量系数，式(8.5-11)的解 $\boldsymbol{\omega}(t)$必平行于 $\boldsymbol{q}_e(0)$，可写为

$$\boldsymbol{\omega}(t) = C'(t)\boldsymbol{q}(0) \tag{8.5-15}$$

式中 $C'(t)$为标量系数。由此，式(8.5-12)右端第一项(实为 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{q}$)恒为零，式(8.5-12)方程的解 $\boldsymbol{q}(t)$确有如式(8.5-15)，即星体保持绕轴向 $\boldsymbol{q}_e(0)$机动，转速 $\omega(t)$与此同向。由于控制力矩与星体惯量参数有关，而后者常具有不确定性，文献[74,75]论述惯量含有不确定性时控制律(8.5-10)的稳定性。

第九章　挠性卫星的姿态控制

现代大型应用卫星的构形是中心主刚体带若干大尺度的附件，如太阳电池帆板、通信天线或遥感天线等，后者的伸展空间远大于中心主刚体，并均为挠性结构，其弹性振动直接引起主体姿态振荡。卫星主体内燃料晃动也是引起主体姿态不稳定的重要因素。因此，从动力学角度统称此类卫星为挠性卫星，其姿控问题是现代卫星技术的主要课题之一。

9.1　带挠性附件的卫星姿态动力学

带挠性附件卫星姿态动力学方程建模的主要问题是，如何描述挠性附件的弹性运动和主体与附件之间的运动耦合。挠性附件本质上是分布参数系统，具有无限个自由度。在实际工程实践中，挠性附件通常被简化由有限个有限质量的质点集组成，它们之间又由无质量的弹簧相连，此简化法称为集中参数法。较为精确的简化方程法是将附件分割为有限个单元，单元之间由若干弹性元素通过节点相连，称之为有限元素法。应用这些方法对挠性附件进行模态分析，得出描述附件弹性振动的振型和模态坐标，再通过动量定理，与主体的刚体运动参数组合起来，形成混合坐标的动力学模型[76,77]。

本节采用基于角动量原理的欧拉法建立带挠性附性卫星的姿态动力学模型，包含三部分：

(1) 卫星系统姿态转动方程；

(2) 挠性附件转动方程；

(3) 挠性附件弹性变形振动方程。

在卫星姿态三轴稳定状态，通常引用三项基本假定——卫星系统的惯性加速度为小量；附件的转动和挠性振动引起系统质心的位移为小量；主体的转速、附件的转速以及附件的弹性变形位移均为小量。基于第一项、第二项，卫星系统相对空间固定基准的角动量可简化归结为相对系统自身质心的角动量；基于第三项，动力学参数的乘积为二阶小量，可被忽略，得出线性近似化的动力学方程。

为叙述简便并不失一般性，以单个附件为例。引入有关动力学参数的定义（见图9.1）：

空间惯性坐标系 $ox_i y_i z_i$，原点在空间固定基准点；

中心刚体主体坐标系 $ox_b y_b z_b$，原点在系统质心 o；

附件坐标系 $Px_a y_a z_a$，原点在附件的铰链点 P；

主体坐标至附件坐标的转移矩阵 $\boldsymbol{A}$；

附件铰链点至系统质心的距离 $\boldsymbol{r}_a$；

附件质心至铰链点的距离 $\boldsymbol{r}_0$；

附件质量元 m_j 至铰链点的距离 $\boldsymbol{r}_j$；

附件质量元 m_j 的弹性位移 $\boldsymbol{u}_j$；

系统中任一质量元 m_j 至系统质心的距离 $\boldsymbol{\rho}_j$；

主体在主体坐标系的惯量矩阵 $\boldsymbol{I}_b$；

附件在主体坐标系的惯量矩阵 $\boldsymbol{I}_a$；

附件在附件坐标系的惯量矩阵 $\boldsymbol{I}'_a$；

附件相对自身质心的惯量矩阵 $\boldsymbol{I}'_{a0}$；

主体相对空间的姿态转动 $\overline{\omega}$；

附件相对主体的转动 $\overline{\omega}_a$。

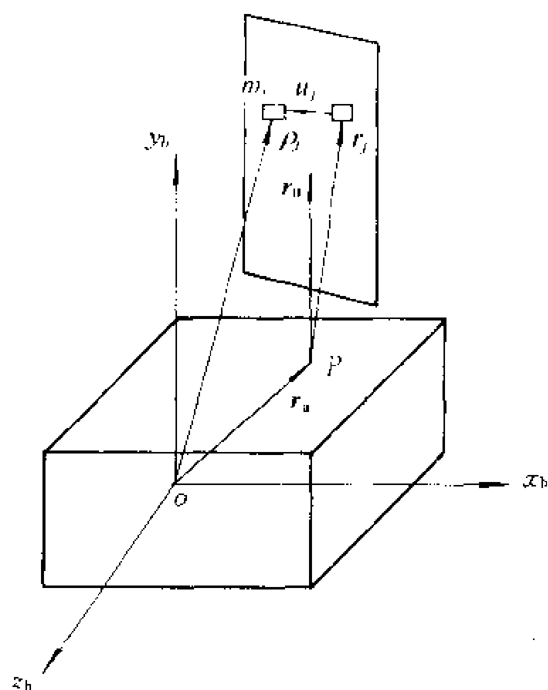


图 9.1-1

9.1.1 系统动力学方程

基于动量和角动量原理，卫星系统转动动力学方程、附件转动和弹性振动动力学方程可列为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{B+A}\boldsymbol{\rho}_j \times m_j \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_j}{\mathrm{d}t}\right)_i = \boldsymbol{T}_e - \boldsymbol{T}_a \tag{9.1-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{A}(\boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{u}_j) \times m_j \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_j}{\mathrm{d}t}\right)_i = \boldsymbol{T}_a \tag{9.1-2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_j \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_j}{\mathrm{d}t}\right)_i = F_j \qquad (J \in A) \tag{9.1-3}$$

式中，$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_j}{\mathrm{d}t}\right)_i$ 为质量元相对空间的速度，T_e 为作用在主体上的外力矩，T_a 为主体与附件之间相互作用的铰链力矩，F_j 为作用在附件质量元 m_j 上的弹性应力和阻尼力。为展开动力学方程，须导出质量元相对空间的惯性加速度。

质量元 m_j 的位置 $\boldsymbol{\rho}_j$ 为

$$\boldsymbol{\rho}_j = \boldsymbol{r}_a + \boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{u}_j$$

对于主体质量元，上式右端的 $\boldsymbol{r}_a$ 和 $\boldsymbol{u}_j$ 为零。基于上述基本假定，主体质量元的惯性加速度直接决定于主体的转动，

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}_j}{\mathrm{d}t^2}\right)_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{\rho}_j \qquad (j\in B)$$

附件质量元的惯性加速度是主体转动、附件转动和质量元自身弹性位移的综合效果。位移速度为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_j}{\mathrm{d}t}\right)_i = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_a + (\dot{\boldsymbol{r}}_j+\dot{\boldsymbol{u}}_j)_b + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}_j+\boldsymbol{u}_j) \qquad (j\in A)$$

位移加速度为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}_j}{\mathrm{d}t^2}\right)_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_a + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_a) + (\ddot{\boldsymbol{r}}_j+\ddot{\boldsymbol{u}}_j)_b + \boldsymbol{\omega}\times(\dot{\boldsymbol{r}}_j+\dot{\boldsymbol{u}}_j)_b$$
$$+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times(\boldsymbol{r}_j+\boldsymbol{u}_j) + \boldsymbol{\omega}\times[(\dot{\boldsymbol{r}}_j+\dot{\boldsymbol{u}}_j)_b + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}_j+\boldsymbol{u}_j)]$$

在主体坐标中，附件质量元相对铰链点的速度和加速度可展开为

$$(\dot{\boldsymbol{r}}_j+\dot{\boldsymbol{u}}_j)_b = (\dot{\boldsymbol{r}}_j+\dot{\boldsymbol{u}}_j)_a + \boldsymbol{\omega}_a\times(\boldsymbol{r}_j+\boldsymbol{u}_j)$$
$$(\ddot{\boldsymbol{r}}_j+\ddot{\boldsymbol{u}}_j)_b = (\ddot{\boldsymbol{r}}_j+\ddot{\boldsymbol{u}}_j)_a + \boldsymbol{\omega}_a\times(\dot{\boldsymbol{r}}_j+\dot{\boldsymbol{u}}_j)_a$$
$$+\dot{\boldsymbol{\omega}}_a\times(\boldsymbol{r}_j+\boldsymbol{u}_j) + \boldsymbol{\omega}_a\times[(\dot{\boldsymbol{r}}_j+\dot{\boldsymbol{u}}_j)_a + \boldsymbol{\omega}_a\times(\boldsymbol{r}_j+\boldsymbol{u}_j)]$$

按定义，在附件坐标系中 $(\dot{\boldsymbol{r}}_j)_a=0$，状态 $\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}_a,\boldsymbol{u}_j$ 均为小量，因而，附件质量元惯性加速度的线性化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t^2}\right)_i = (\ddot{\boldsymbol{u}}_j)_a + \dot{\boldsymbol{\omega}}_a\times\boldsymbol{r}_j + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times(\boldsymbol{r}_a+\boldsymbol{r}_j)$$

将质量元惯性加速度代入动力学原始方程，并应用矢量叉积的矩阵表达式 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\tilde{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$ 和斜对称矩阵式 $(\widetilde{\boldsymbol{c}\boldsymbol{a}})=\boldsymbol{c}\,\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$，可将动力学方程的有关各项展开。

卫星系统角动量的变化率式((9.1-1)左端)包含两部分：

对于主体，有

$$\sum_B\boldsymbol{\rho}_j\times m_j\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}_j}{\mathrm{d}t^2}\right)_i = \sum_B m_j\boldsymbol{\rho}_j\times(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{\rho}_j) = \sum_B m_j\,\tilde{\boldsymbol{\rho}}_j\tilde{\boldsymbol{\rho}}_j^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{I}_b\dot{\boldsymbol{\omega}}$$

对于附件(相对主体坐标系)，有

$$\begin{aligned}
&\sum_A\boldsymbol{\rho}_j\times m_j\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}_j}{\mathrm{d}t^2}\right)_i \\
&= \sum_A m_j(\boldsymbol{r}_a+\boldsymbol{r}_j)\times(\ddot{\boldsymbol{u}}_j)_a - \sum_A m_j\boldsymbol{r}_a\times(\dot{\boldsymbol{\omega}}_a\times\boldsymbol{r}_j) \\
&\quad + \sum_A m_j\boldsymbol{r}_j\times(\dot{\boldsymbol{\omega}}_a\times\boldsymbol{r}_j) + \sum_A m_j(\boldsymbol{r}_a+\boldsymbol{r}_j)\times(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times(\boldsymbol{r}_a+\boldsymbol{r}_j)) \\
&= \sum_A m_j(\tilde{\boldsymbol{r}}_a\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{r}}_j)\ddot{\boldsymbol{u}}_j + \sum_A m_j\,\tilde{\boldsymbol{r}}_a\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\tilde{\boldsymbol{r}}_j^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_a) + \sum_A m_j\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\tilde{\boldsymbol{r}}_j\,\tilde{\boldsymbol{r}}_j^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_a) \\
&\quad + \sum_A m_j(\widetilde{\boldsymbol{r}_a+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_j})(\widetilde{\boldsymbol{r}_a+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_j})^{\mathrm{T}}\,\dot{\boldsymbol{\omega}} \\
&= \sum_A m_j(\tilde{\boldsymbol{r}}_a\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\,\tilde{\boldsymbol{r}}_j)\boldsymbol{u}_j + (m_a\,\tilde{\boldsymbol{r}}_a\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\,\tilde{\boldsymbol{r}}_0^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}'_a)\dot{\boldsymbol{\omega}}_a + \boldsymbol{I}_a\dot{\boldsymbol{\omega}}
\end{aligned}$$

在上式中，引用了惯量和质量的基本式

$$I_a = + \sum_A m_j \widetilde{(r_a + A^T r_j)} \widetilde{(r_a + A^T r_j)}$$

$$I'_a = \sum_A m_j \tilde{r}_j \tilde{r}_j^T$$

$$\sum_A m_j r_j = m_a r_0$$

附件转动角动量的变化率式(9.1-2)左端展开为(相对附件坐标系)，

$$\sum_A (r_i + u_j) \times m_j \left(\frac{d^2 \rho_j}{dt^2} \right)_i$$

$$= \sum_A m_j r_j \times (\ddot{u}_j)_a + \sum_A m_j r_i \times (\dot{\omega}_a \times r_j) + \sum_A m_j r_j \times (\dot{\omega} \times (r_a + r_j))$$

$$= \sum_A m_j \tilde{r}_j \ddot{u}_j + \sum_A m_j \tilde{r}_j \tilde{r}_j^T \omega_a + \sum_A m_j \tilde{r}_j A(\tilde{r}_a^T \dot{\omega}) + \sum_A m_j \tilde{r}_j \tilde{r}_j^T A \dot{\omega}$$

$$= \sum_A m_j \tilde{r}_j \ddot{u}_j + I'_a \omega_a + (m_a \tilde{r}_0 A \tilde{r}_a^T + I'_a A) \dot{\omega}$$

在附件坐标系质量元惯性加速度(式(9.1-3)左端)展开为

$$\left(\frac{d^2 \rho}{dt^2} \right)_i = \ddot{u}_j + \tilde{r}_j^T \dot{\omega}_a + (A \tilde{r}_a^T + \tilde{r}_j^T A) \dot{\omega}$$

综合上述展开，动力学基本方程归纳为

$$I_s \dot{\omega} + J_a A^T \dot{\omega}_a + \sum_A m_j (\tilde{r}_a A^T + A^T \tilde{r}_j) \ddot{u}_j = T_e - T_a \tag{9.1-4}$$

$$I'_a \dot{\omega}_a + A J_a^T \dot{\omega} + \sum_A m_j \tilde{r}_j \ddot{u}_j = A T_a \tag{9.1-5}$$

$$m_j \ddot{u}_j + m_j \tilde{r}_j^T \dot{\omega}_a + m_j (A \tilde{r}_a^T + \tilde{r}_j^T A) \dot{\omega} = F_j \qquad (j \in A) \tag{9.1-6}$$

式中

$$I_s = I_b + I_a$$

$$J_a = m_a \tilde{r}_a A^T \tilde{r}_0^T A + A^T I'_a A \tag{9.1-7}$$

I_s 为挠性附件固定时，整星的惯量矩阵。

9.1.2 挠性位移简化模型

为完成动力学建模，还须简化挠性体弹性位移 u_j 的描述，并加以规范化。最简化的方式是集中参数法，将无限自由度质量元构成的挠性附件简化为按一定几何分布的有限集中质量集，质点间由无质量弹簧连接。上述动力学方程 u_j 可视为集中质量 m_j 的弹性位移(仅 N 个，$j=1, 2, \cdots, N$)，r_j 为集中质点 m_j 的位置矢量。集中质点弹性振动的惯性力仅与自身位移加速度有关，但弹性应力不仅与自身位移有关还与相邻集中质点之间的相对位移有关。定义 U 为挠性附件弹性振动的全位移，$U=(u_1, u_2, \cdots, u_N)$，将上述质量单元振动方程(9.1-6)扩展到附件振动全位移，(略去阻尼力的描述)有

$$M\ddot{U} + KU + P\dot{\omega}_a + Q\dot{\omega} = 0 \tag{9.1-8}$$

式中，M 为质量阵(对角阵)，K 为刚度阵(带对角阵)，$P\dot{\omega}_a$，$Q\dot{\omega}$ 为挠性附件转动和主体转动作用在集中质量上的惯性力，矩阵 P,Q 为

$$P=\begin{bmatrix}\vdots\\ m_j r_j^{\mathrm{T}}\\ \vdots\end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix}\vdots\\ m_j(A\tilde{r}_a^{\mathrm{T}}+\tilde{r}_j^{\mathrm{T}}A)\\ \vdots\end{bmatrix} \tag{9.1-9}$$

相应地，主体和挠性附件转动动力学方程(9.1-4)，(9.1-5)的集中参数式可为

$$I_s\dot{\omega}+J_aA^{\mathrm{T}}\dot{\omega}_a+Q^{\mathrm{T}}\ddot{U}=T_c-T_a \tag{9.1-10}$$

$$I'_a\dot{\omega}_a+AJ_a^{\mathrm{T}}\dot{\omega}+P^{\mathrm{T}}\ddot{U}=AT_a \tag{9.1-11}$$

式中$Q^{\mathrm{T}}U$，$P^{\mathrm{T}}U$为挠性附件振动对主体转动和附件自身转动的动力学耦合。

有限元法是较精确的简化方法[78,79]，将挠性体分割为有限N个结构单元，在每个结构单元i中，任一点的弹性位移$\boldsymbol{u}(x,y,z)$可描述为单元弹性位移的形状函数$S(x,y,z)$与单元节点位移$\boldsymbol{W}$的乘积，弹性应变$\boldsymbol{\varepsilon}(x,y,z)$为单元应变函数$R(x,y,z)$与节点位移$\boldsymbol{W}$的乘积

$$\boldsymbol{u}(x,y,z)=\boldsymbol{S}(x,y,z)\boldsymbol{W}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x,y,z)=\boldsymbol{R}(x,y,z)\boldsymbol{W}$$

式中(x,y,z)表示单元中任一点的坐标(对应离散化标记j)。单元节点位移包括线位移和角位移，单元节点数与每个节点的位移数的乘积为维数k。$\boldsymbol{S}$为形状函数阵$(3\times k)$；$\boldsymbol{R}$为应变函数阵$(3\times k)$，是形状函数的偏导数。这样，可用单元节点位移描述挠性体的弹性振动和对主体的动力学作用。

参见上述动力学方程(9.1-4)中挠性体弹性振动对主体姿态动力学的作用项，赋予单位编号i。对于单个结构单元i可写成

$$\sum_{(i)}m_j(\tilde{r}_aA^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}}\tilde{r}_j)\ddot{u}_j=[\tilde{r}_aA^{\mathrm{T}}\sum_{(i)}m_jS(j)+A^{\mathrm{T}}\sum_{(i)}m_j\tilde{r}_jS(j)]\ddot{W}_i=(\tilde{r}_aA^{\mathrm{T}}m_{si}+A^{\mathrm{T}}\tilde{r}_s m_s)\ddot{W}_i$$

式中$\sum\limits_{(i)}$表示在单元i内求和。定义m_{si}和$\tilde{r}_{si}$为第i单元的等效质量和等效位置，有

$$\sum_{(i)}m_jS(j)=m_{si} \tag{9.1-12}$$

$$\sum_{(i)}m_j\tilde{r}_jS(j)=\tilde{r}_{si}m_{si} \tag{9.1-13}$$

因此，以单元节点位移表示挠性附件弹性振动对主体的姿态动力学作用项，可写为

$$\sum_A m_j(\tilde{r}_aA^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}}\tilde{r}_j)\ddot{u}_j=\sum_{i=1}^{N}(\tilde{r}_aA^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}}\tilde{r}_{si})m_{si}\ddot{W}_i$$

同理，对挠性体转动的作用项可写为

$$\sum_A m_j\tilde{r}_j\ddot{u}_j=\sum_{i=1}^{N}\tilde{r}_{si}m_{si}\ddot{W}_i$$

参照式(9.1-4)，(9.1-5)，主体和挠性体动力学方程的有限元节点位移形式可归结为

$$I_s\dot{\omega}+J_aA^{\mathrm{T}}\dot{\omega}_a+Q_s^{\mathrm{T}}W=T_c-T_a \tag{9.1-14}$$

$$I'_a\dot{\omega}_a+AJ_a^{\mathrm{T}}\dot{\omega}+P_s^{\mathrm{T}}W=AT_a \tag{9.1-15}$$

式中$\boldsymbol{W}=(W_1\cdots W_i\cdots W_N)^{\mathrm{T}}$为整体的全节点位移。动力学耦合阵$Q_s$，$P_s$为

$$Q_s=\begin{bmatrix}\vdots\\ m_{si}^{\mathrm{T}}(A\tilde{r}_a^{\mathrm{T}}+\tilde{r}_{si}^{\mathrm{T}}A)\\ \vdots\end{bmatrix},\qquad P_s=\begin{bmatrix}\vdots\\ m_{si}^{\mathrm{T}}\tilde{r}_{si}^{\mathrm{T}}\\ \vdots\end{bmatrix} \tag{9.1-16}$$

为了以节点位称描述挠性体的振动方程，引入有限单元的弹性动力 E_k 和应变势能 E_p，

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_i m_j \ddot{u}_j^T \ddot{u}_j = \frac{1}{2}\ddot{W}_i^T(\sum_i m_j S^T(j)S(j))\ddot{W}_i = \frac{1}{2}\ddot{W}_i^T \boldsymbol{m}_i \ddot{W}_i$$

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_i \boldsymbol{\sigma}_j^T \boldsymbol{\epsilon}_j = \frac{1}{2}\sum_i \boldsymbol{\epsilon}_j^T \boldsymbol{E}_j \boldsymbol{\epsilon}_j = \frac{1}{2}\boldsymbol{W}_i^T(\sum_i R^T(j)E_j R(j))\boldsymbol{W}_i = \frac{1}{2}\boldsymbol{W}_i^T \boldsymbol{K}_i \boldsymbol{W}_i$$

式中，$\boldsymbol{\sigma}_j$ 为应变力，$\boldsymbol{E}_j$ 为模量矩阵，$\boldsymbol{m}_i$，$\boldsymbol{K}_i$ 为第 i 单元的质量阵和刚度阵：

$$\boldsymbol{m}_i = \sum_i m_j \boldsymbol{S}^T(j)\boldsymbol{S}(j) \tag{9.1-17}$$

$$\boldsymbol{K}_i = \sum_i \boldsymbol{R}^T(j)\boldsymbol{E}_j \boldsymbol{R}(j) \tag{9.1-18}$$

根据虚位移和虚功原理，在弹性振动情况下，单元虚位移引起的虚应变势能等于在单元上体力所作的虚功和弹性位移惯性力所作虚功之和。令 $\delta \boldsymbol{u}_j$ 为虚位移，$\boldsymbol{g}_j$ 为体力，则第 i 单元的虚功方程可写为

$$\delta E_p = \sum_i \delta \boldsymbol{u}_j^T \boldsymbol{g}_j + \sum_i \delta \boldsymbol{u}_j^T(-m_j \ddot{\boldsymbol{u}}_j)$$

虚位移为无限小量，虚应变势能即等于应变力与虚位移的乘积。利用单元节点位移表达式，第 i 单元的虚功方程可化成

$$\delta \boldsymbol{W}_i^T \boldsymbol{K}_i \boldsymbol{W}_i = \delta \boldsymbol{W}_i^T \sum_i \boldsymbol{S}^T(j)\boldsymbol{g}_j - \delta \boldsymbol{W}_i^T \boldsymbol{m}_i \ddot{\boldsymbol{W}}_i$$

由于节点位移 δW_i 的任意性，得单元 i 的弹性振动方程

$$\boldsymbol{m}_i \ddot{\boldsymbol{W}}_i + \boldsymbol{K}_i \boldsymbol{W}_i = \sum_i \boldsymbol{S}^T(j)\boldsymbol{g}_j \tag{9.1-19}$$

在给定情况下，体力 g_j 为主体和挠性体转动引起的惯性力。参照上述动力学方程(9.1-6)，以及单元等效质量和等效位置的定义，由式(9.1-12)，(9.1-13)可得

$$\sum_i \boldsymbol{S}^T(j)\boldsymbol{g}_j = -\boldsymbol{m}_{si}^T \tilde{\boldsymbol{r}}_{si}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_a - \boldsymbol{m}_{si}^T(\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{r}}_a^T + \tilde{\boldsymbol{r}}_{si}^T \boldsymbol{A})\dot{\boldsymbol{\omega}}$$

代入式(9.1-19)，再以节点位移协调条件综合连接各单元，并以 W 表示挠性体的全节点位移，得整体弹性振动方程

$$\boldsymbol{M}\ddot{W} + \boldsymbol{K}W + \boldsymbol{P}_s\dot{\omega}_a + \boldsymbol{Q}_s\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0 \tag{9.1-20}$$

式中 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{K}$ 为由 N 个单元质量阵 $\boldsymbol{m}_i$，刚度阵 $\boldsymbol{K}_i$（式(9.1-17)，(9.1-18)）组成的整体质量阵和刚度阵。$\boldsymbol{P}_s\dot{\omega}_a$，$\boldsymbol{Q}_s\dot{\boldsymbol{\omega}}$ 为挠性体转动和主体转动作用在各单元之上的等效惯性力，矩阵 $\boldsymbol{P}_s$，$\boldsymbol{Q}_s$ 如式(9.1-16)。可见，以有限元节点位移描述挠性卫星动力学方程(9.1-14)，(9.1-15)，(9.1-20)与集中参数法(9.1-8)，(9.1-10)，(9.1-11)的形式相同。

9.1.3　挠性附件模态分析

利用弹性结构的振型和模态分析方法，可进一步将挠性卫星动力学方程规范化。为了简明，以集中参数模型为例。基于线性振动理论，对于自由振动，参见式(9.1-8)，略去激励项，有 N 维齐次动力学方程

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{U} = 0 \tag{9.1-21}$$

令方程解的一般形式为 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\varphi}\, e^{i\lambda t}$，代入上式得动力学方程解的固有方程

$$(-\lambda^2 \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K})\boldsymbol{\varphi} = 0$$

相应的特征方程为

$$|-\lambda^2 M + K| = 0$$

有 N 个数值解 λ_i^2，即有 N 个自然频率 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,N)$，代入固有方程，可得相应的振幅 φ_i。由于固有方程为齐次，系数行列式为零，因此，解 φ_i 不是唯一的，各分量的取值可成比例关系，通常将之归一化，即令 φ_i 满足条件

$$\varphi_i^{\mathrm{T}} M \varphi_i = 1 \qquad (i = 1,2,\cdots,N)$$

将 λ_i、φ_i 代入固有方程，再左乘 φ_i^{T}，可得

$$\varphi_i^{\mathrm{T}} K \varphi_i = \lambda^2\ i$$

再任取两个自然频率 λ_i，λ_l，由固有方程可得

$$\lambda_i^2 M \varphi_i = K \varphi_i$$

$$\lambda_l^2 M \varphi_l = K \varphi_l$$

利用质量阵 M、刚度阵 K 为对称阵的性质，又可导出 φ_i 满足正交条件，即

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}} M \boldsymbol{\varphi}_l = 0 \\ \boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}} K \boldsymbol{\varphi}_l = 0 \end{aligned}\right. \qquad (i \neq l)$$

由于矢量 U 是挠性体集中质量模型的全位移矢量，因此，矢量 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 给出以 λ_i 振动频率各集中质量弹性位移之间的分布关系，即 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 确定了挠性体频率为 λ_i 的振动形状，振动的具体幅值由振动初条件确定。$\boldsymbol{\varphi}_i$ 称之为频率 λ_i 的固有振型，它的各分量(3 维矢量)可记为 $\boldsymbol{\varphi}_{ij}(j=1,2,\cdots,N)$，标记 j 与集中质量的位置 $\boldsymbol{r}_j$ 相对应。由振型矢量 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 组成的振型矩阵记为

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{N1} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{N2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \varphi_{1N} & \varphi_{2N} & \cdots & \varphi_{NN} \end{bmatrix} \tag{9.1-22}$$

以 $\boldsymbol{\psi}(j)$ 表示振型矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的第 j 行矢量，它的意义是给出在集中质点 $\boldsymbol{r}_j$ 处，各个频率振型的分量。由此，挠性体弹性振动的全位移可统一表示为振型矢量 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 的线性组合。由于振型矢量仅决定于结构参数，这些线性组合系数称为弹性振动的模态坐标。它更概括地反映了挠性结构弹性振动中各自然频率所占的份额。它的幅值变化与振动初条件和外作用力有关。

令模态坐标矢量为 $\boldsymbol{\eta}$(N 维)，在挠性结构的 $\boldsymbol{r}_j$ 处的弹性位移即可表示为振型矩的第 j 行矢量与模态坐标矢量的乘积，引入时间变量，可写成

$$U_j(t) = \boldsymbol{\psi}(j)\boldsymbol{\eta}(t) \tag{9.1-23}$$

挠性体弹性振动的全位移可规范化表示为

$$U(t) = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\eta}(t) \tag{9.1-24}$$

根据振型的归一化和正交性质，振型矩阵满足

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} M \boldsymbol{\Phi} = E \\ \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} K \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Lambda}^2 \end{aligned}\right\} \tag{9.1-25}$$

式中 E 为单位矩阵；$\boldsymbol{\Lambda}^2$ 为对角阵，$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1^2\lambda_2^2\cdots\lambda_N^2)$。

9.1.4 混合坐标动力学方程

利用振型矢量、振型矩阵和模态坐标，将挠性卫星动力学方程规范化，形成由欧拉参数坐标和挠性模态坐标混合表示的动力学方程。在上述动力学方程(9.1-10)，(9.1-11)中，挠性体

的动力学耦合作用可改用模态坐标表示，将式(9.1-24)代入式(9.1-10)和(9.1-11)，有

$$\left.\begin{aligned} Q^{T}\ddot{U} &= Q^{T}\Phi\ddot{\eta} = A^{T}C\ddot{\eta} \\ P^{T}\ddot{U} &= P^{T}\Phi\ddot{\eta} = B\ddot{\eta} \end{aligned}\right\} \tag{9.1-26}$$

式中C，B为动力学耦合系数阵。根据矩阵Q，P的表达式(9.1-9)和振型阵Φ的组成，式(9.1-22)有

$$\left.\begin{aligned} C &= \sum_{A} m_j[A\tilde{r}_a A^{T} + \tilde{r}_j]\varphi(j) \\ B &= \sum_{A} m_j\tilde{r}_j\varphi(j) \end{aligned}\right\} \tag{9.1-27}$$

将挠性体弹性振动方程(9.1-8)乘以振型矩阵的转置Φ^{T}，并代入弹性位移的模态坐标式(9.1-24)，有

$$\Phi^{T}M\Phi\ddot{\eta} + \Phi^{T}K\Phi\eta + \Phi^{T}P\dot{\omega}_a + \Phi^{T}Q\dot{\omega} = 0$$

利用矩阵Φ的正交性质(9.1-25)和耦合项(9.1-26)，最后可将带单个挠性附件的卫星姿态动力学方程规范化地归结为

$$I_s\dot{\omega} + J_aA^{T}\dot{\omega}_a + A^{T}C\ddot{\eta} = T_e - T_a \tag{9.1-28}$$

$$I'_s\dot{\omega}_a + AJ_a^{T}\dot{\omega} + B\ddot{\eta} = AT_a \tag{9.1-29}$$

$$\ddot{\eta} + \Lambda^2\eta + B^{T}\dot{\omega}_a + C^{T}A\dot{\omega} = 0 \tag{9.1-30}$$

方程的动态变量包含主体坐标和模态坐标，因此又称为混合坐标系统方程。主体与挠性附件相互作用的耦合系数互为转置矩阵。

上述附件的模态分析基于附件的自由振动方程(9.1-21)，其中质量阵M局限于附件体，独立约束于主体之外，呈悬系形式，故可称之为约束模态或悬系模态。如在动力学方程(9.1-8)，(9.1-10)中略去附件的转动和作用力矩，并消去$\dot{\omega}$，得附件自由振动方程的另一形式

$$(M - QI_s^{-1}Q^{T})\ddot{U} + KU = 0$$

因I_s为实对称阵，故$\ddot{U}$的系数阵亦为实对称阵。求解上式的特征值问题，所得模态称为非约束模态或整体模态。当主体内包括陀螺系统时，此类整体模态的分析显得较复杂。

例　对称挠性太阳帆板，以均匀梁等效代替帆板的弯曲振动，采用集中参数模型，将单边梁分为两个单元段，并将质量集中于两个端点上，见图9.1-2。令$m_1=\frac{m}{2}$，$m_2=\frac{m}{4}$，m为原梁的

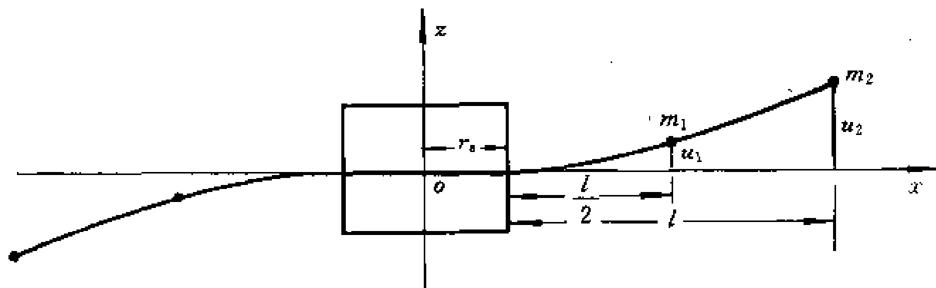


图　9.1-2

总质量。对于 $o\sim\frac{l}{2}$段，梁的弯曲方程为

$$EI\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=F_1\left(\frac{l}{2}-x\right)+F_2(l-x) \tag{9.1-31}$$

式中，EI 为梁的弯曲刚度；F_1，F_2 为作用在$\frac{l}{2}$和末端 l 处的负荷。将上式积分两次，得

$$\left.\begin{aligned} EIu' &= F_1\left(\frac{l}{2}x-\frac{x^2}{2}\right)+F_2\left(lx-\frac{x^2}{2}\right)+c \\ EIu &= F_1\left(\frac{l}{4}x^2-\frac{x^3}{6}\right)+F_2\left(\frac{l}{2}x^2-\frac{x^3}{6}\right)+cx+d \end{aligned}\right\} \tag{9.1-32}$$

由根部条件 $x=0$，$u=u'=0$，得 $c=d=0$，因而$\frac{l}{2}$处端点位移 u_1 和弯曲 u_1'为

$$EIu_1=F_1\frac{2l^3}{48}+F_2\frac{5l^3}{48}$$

$$EIu_1'=F_1\frac{l^2}{8}+F_2\frac{3l^2}{8}$$

对于$\frac{l}{2}\sim l$ 段，弯曲方程为

$$EI\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=-F_2(l-x)$$

积分两次，又得

$$EIu'=-F_2\left(lx-\frac{x^2}{2}\right)+c$$

$$EIu=-F_2\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+cx+d$$

由前段端点条件 u_1，$u'_1(x=\frac{l}{2})$，得上式的积分常数

$$c=-F_1\frac{l^2}{8}$$

$$d=F_1\frac{l^3}{48}$$

代入式(9.1-32)，得末端位移 u_2

$$EIu_2=-F_1\frac{5l^3}{48}-F_2\frac{l^3}{3}$$

与位移 u_1 的式子联合求解得

$$F_1=\frac{48EI}{7l^3}(-16u_1+5u_2)$$

$$F_2=\frac{48EI}{7l^3}(5u_1-2u_2)$$

由端点负荷与惯性力平衡式

$$-m_1\ddot{u}_1+F_1=0,\quad -m_2\ddot{u}_2+F_2=0$$

得端点位移的动力学方程

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix}+\frac{48EI}{7l^3}\begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=0$$

因此均匀梁的集中参数模型的质量阵和刚度阵分别为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\frac{m}{2} & 0\\ 0 & \frac{m}{4}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{K}=\frac{48EI}{7l^3}\begin{bmatrix}16 & -5\\ -5 & 2\end{bmatrix}$$

取下述工程参数：$EI=97.6\ \mathrm{N\cdot m^2}$，$m=8\ \mathrm{kg}$，$l=3\ \mathrm{m}$，由特征方程$|-\lambda^2\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K}|=0$，得特征值为

$$\lambda_1^2=\frac{96EI}{7ml^3}(10-\sqrt{86})=4.5,\qquad \lambda_1=2.12\ \mathrm{rad/s}$$

$$\lambda_2^2=\frac{96EI}{7ml^3}(10+\sqrt{86}=119.4,\qquad \lambda_2=10.93\ \mathrm{rad/s}$$

相应的特征矢量为

$$\begin{bmatrix}\varphi_{11}\\ \varphi_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6+\sqrt{86}\\ 5\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}\varphi_{21}\\ \varphi_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6-\sqrt{86}\\ 5\end{bmatrix}$$

规一化后得振型矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}\dfrac{10}{\sqrt{2\sqrt{86}(\sqrt{86}+6)m}} & \dfrac{10}{\sqrt{2\sqrt{86}(\sqrt{86}-6)m}}\\ \sqrt{\dfrac{2(\sqrt{86}+6)}{\sqrt{86}m}} & -\sqrt{\dfrac{2(\sqrt{86}-6}{\sqrt{86}m}}\end{bmatrix}\tag{9.1-33}$$

在此一维姿态和两维模态情况下，挠性附件的耦合系数阵可由下式得：

$$\boldsymbol{C}=m_1(r_a+\frac{l}{2})[\varphi_{11}\quad\varphi_{21}]+m_2(r_a+l)[\varphi_{12}\quad\varphi_{22}]=[c_1\quad c_2]\tag{9.1-34}$$

当帆板根部位置$r_a=0.5\ \mathrm{m}$时，耦合系数为

$$c_1=6.17\ \mathrm{kg^{\frac{1}{2}}\cdot m}$$

$$c_2=1.55\ \mathrm{kg^{\frac{1}{2}}\cdot m}$$

9.2 控制模型

9.1节叙述的带挠性体卫星动力学方程可直接用于姿态动力学和控制的仿真研究。卫星姿控系统的初步设计通常应用古典设计法，需建立传递函数控制模型。姿控执行机构的力矩为输入，姿态敏感器的测量为输出。对于多体卫星，控制模型与姿态敏感器和执行机构的安装布局密切有关。通常，按一般应用卫星的构形，姿控执行机构位于卫星主体上，但姿态敏感器可位于主体上，或因特殊任务需求必须安置在附件上，这样，姿态敏感器被附件结构与执行机构隔开。前者称为共位布局，后者称为非共位布局。对于非共位情况，姿控执行机构和敏感器之间存在挠性环节，姿态敏感器的测量是主体姿态角和挠性体相对主体的姿态角的综合，因而，非共位布局的控制问题比共位复杂。

为叙述简便，以一维姿态θ为例，并令附件转动$\omega_a=0$，则动力学方程(9.1-28)，(9.1-30)的简化形式为

$$I_s\ddot{\theta}+C\ddot{\eta}=T\tag{9.2-1}$$

$$\ddot{\eta}+\lambda^2\eta+C^{\mathrm{T}}\ddot{\theta}=0 \tag{9.2-2}$$

姿态测量方程的一般形式可写为

$$y=\theta+l\psi\cdot\eta \tag{9.2-3}$$

式中，η 为模态坐标，C 为模态耦合系数阵(行)即($C=(C_1C_2\cdots C_N)$)，λ^2 为模态频率对角阵，l 为观测系数，ψ 为敏感器安装点结构振型阵的行。

9.2.1 共位模型

姿态测量敏感器位于主体上，直接测量主体的姿态角($y=\theta,\psi=0$)。

(1) 约束模型。如将动力学的传递过程视为外作用力矩 T 使主体转动，它激励挠性体振荡，式(9.2-2)模态坐标的拉氏变换为

$$\eta(s)=\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & \dfrac{1}{s^2+\lambda_i^2} & \\ & & \ddots\end{bmatrix}\left[-s^2\theta(s)C^{\mathrm{T}}\right]$$

它对主体的反馈作用(代入式(9.2-1))形成主体姿态的传递方程

$$\theta(s)=\frac{1}{I_s s^2}\left[T(s)+s^4\theta(s)\sum\frac{C_i^2}{s^2+\lambda_i^2}\right]$$

或写成标准式

$$\theta(s)=\frac{1}{I_s s^2}\left[1-\sum_{i=1}^{n}\frac{s^2k_i}{s^2+\lambda_i^2}\right]^{-1}T(s) \tag{9.2-4}$$

式中，C_i 为行阵 C 的元素；$k_i=\dfrac{C_i^2}{I_s}$ 为模态耦合系数的平方除以整体的惯量，表征模态耦合作用的效果，因此 k_i 称为模态增益。由于式(9.2-2)的模态频率 λ 和耦合系数 C 是在附件被孤立约束情况下得出的，因此姿态的传递函数(9.2-4)称为约束模型。传递方块图可画成图 9.2-1，可见约束模态的动力学作用呈反馈形式。在 9.1 节太阳帆板实例中，如惯量 $I_s=165\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，则模态增益 $k_1=0.462$，$k_2=0.029$。以本例还可说明模态增益之和等于附件相对系统质心的惯量与整体惯量之比。由式(9.1-33)，得

$$\begin{aligned}k_1+k_2&=\frac{1}{I_s}(C_1^2-C_2^2)\\&=\frac{1}{I_s}\left\{\left[m_1\left(r_a+\frac{l}{2}\right)\varphi_{11}+m_2(r_a+l)\varphi_{12}\right]^2+\left[m_1\left(r_a+\frac{l}{2}\right)\varphi_{21}+m_2(r_a+l)\varphi_{22}\right]^2\right\}\end{aligned}$$

利用振型阵 Φ 的正交性质，$\varphi_{11}\varphi_{12}+\varphi_{21}\varphi_{22}=0$，并将式(9.1-32)代入，上式可化成

$$k_1+k_2=\frac{1}{I_s}\left[\frac{m}{2}\left(r_a+\frac{l}{2}\right)^2+\frac{m}{4}(r_a+l)^2\right]$$

因此，全模态增益的上限为挠性惯量与全星惯量之比[87]，即有

$$\sum_i k_i=\frac{I_t}{I_s}$$

利用此式，可以决策应取模态的阶次，并估计模态截断的影响。

(2) 整体模型。挠性附件的弹性振动亦可视为由作用力矩通过主体直接激励，将姿态方程(9.2-1)代入模态坐标方程(9.2-2)，消去 $\ddot{\theta}$，得

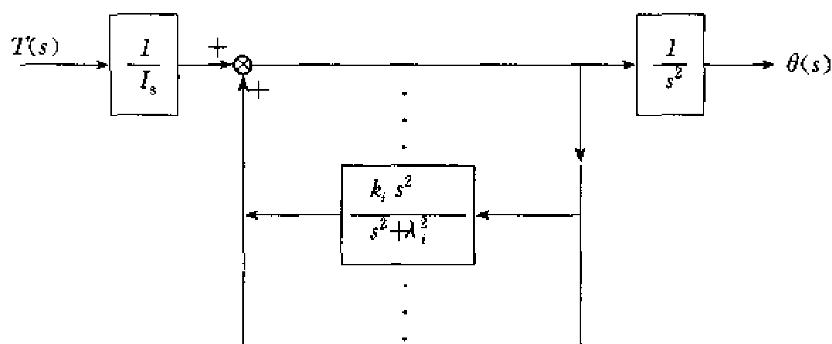


图　9.2-1

$$[\boldsymbol{E}-\frac{1}{I_s}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}]\ddot{\eta}+\lambda^2\eta=-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\frac{1}{I_s}T$$

式中，$\boldsymbol{E}$ 为单位对角阵，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$ 为对称矩阵，上式又可写成

$$\ddot{\eta}+\Lambda^2\eta=-T\boldsymbol{d} \tag{9.2-5}$$

式中，Λ^2 为方阵，$\boldsymbol{d}$ 为列阵

$$\Lambda^2=[\boldsymbol{E}-\frac{1}{I_s}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}]^{-1}\lambda^2$$

$$\boldsymbol{d}=\frac{T}{I_s}[\boldsymbol{E}-\frac{1}{I_s}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}]^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$$

一般，约束模态耦合系数的乘积 $C_i\cdot C_j\ll I_s$，$(i,j=1,2,\cdots)$，将之略去后，矩阵 Λ^2 近似为对角阵，对角元素为

$$\Lambda_i^2=\frac{\lambda_i^2}{(1-C_i^2/I)}=\frac{\lambda_i^2}{1-k_i} \tag{9.2-6}$$

同样，列阵 $\boldsymbol{d}$ 的元素为

$$d_i=\frac{C_i/I_s}{1-C_i^2/I_s}=\frac{k_i/C_i}{1-k_i}$$

由此，模态坐标式(9.2-5)的拉氏变换为

$$\eta(s)=\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & \dfrac{1}{s^2+\Lambda_i^2} & \\ & & \ddots\end{bmatrix}[-T(s)\boldsymbol{d}]$$

此模态是作用力矩作用在主体上，由主体和附件组成的整体引起的，因此，称为整体模态，或称为非约束模态。Λ_i 为非约束模态频率，代入姿态方程(9.2-1)，得非约束模型的姿态传递方块图 9.2-2。非约束模态的动力学作用呈叠加形式，相应的姿态传递方程为

$$\theta(s)=\frac{1}{I_s s^2}\left[1+\sum_{i=1}^{n}\frac{s^2K_i}{s^2+\Lambda_i^2}\right]T(s) \tag{9.2-7}$$

式中 K_i 为非约束模态增益。由约束模态增益 k_i 得出，其关系式为

$$K_i=\frac{k_i}{1-k_i} \tag{9.2-8}$$

或

$$k_i=\frac{K_i}{1+K_i}$$

由式(9.2-6)，(9.2-8)，非约束模态的频率和增益都大于约束模态的频率和增益。

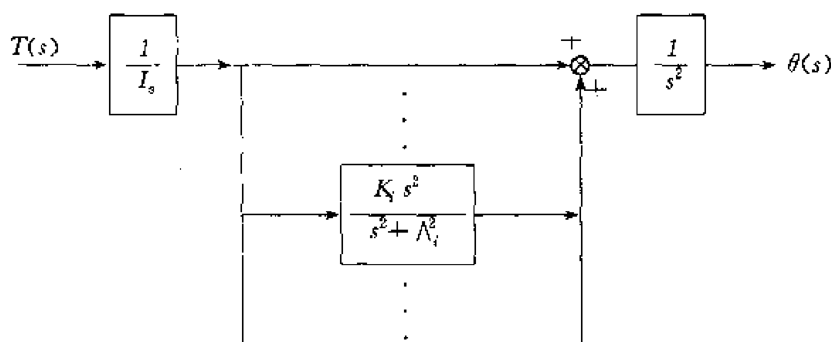


图 9.2-2

约束和非约束模型的姿态传递函数应等同，由式(9.2-4)和(9.2-7)，有等式

$$\left[1+\sum_{i=1}^{n}\frac{s^2K_i}{s^2+\Lambda_i^2}\right]\left[1-\sum_{i=1}^{n}\frac{s^2k_i}{s^2+\lambda_i^2}\right]=1 \tag{9.2-9}$$

通分后，上式左括号分式的分母为乘积 $\prod_i(s^2+\Lambda_i^2)$，右括号分式的分母为乘积 $\prod_i(s^2+\lambda_i^2)$。上式成立的充分条件是左右括号的分式互为倒数。推演此特定分式的必要条件是模态增益 k_i，K_i 均为小量。以二阶模态为例，式(9.2-9)左括号分式的分子可写成

$$s^4(1+K_1+K_2)+s^2(\Lambda_1^2(1+K_2)+\Lambda_2^2(1+K_1))+\Lambda_1^2\Lambda_2^2$$

因 K_1,K_2 为小量，在 s^4 的系数中补上二阶乘积小量 $K_1\cdot K_2$，则上式可化成因式

$$(1+K_1)(1+K_2)(s^2+\lambda_1^2)(s^2+\lambda_2^2)$$

同样式(9.2-9)右括号分式的分子可写成

$$s^4(1-k_1-k_2)+s^2(\lambda_1^2(1-k_2)+\lambda_2^2(1-k_1))+\lambda_1^2\lambda_2^2$$

在 s^4 的系数中补上二阶乘积小量 $-k_1\cdot k_2$，则可化成因式

$$(1-k_1)(1-k_2)(s^2+\Lambda_1^2)(s^2+\Lambda_2^2)$$

根据两种模态增益的关系式(9.2-8)，有

$$(1-k_1)(1+K_1)=(1-k_2)(1+K_2)=1$$

同理，可推广到高阶模态情况。根据上述基本论断，可将挠性卫星姿态的共位控制模型的传递函数归结为

$$\theta(s)=\frac{1}{I_s s^2}\prod_i\frac{(s^2/\lambda_i^2+1)}{(s^2/\Lambda_i^2+1)}T(s) \tag{9.2-10}$$

并有
$$\Lambda_i^2=\frac{\lambda_i^2}{1-k_i},\qquad k_i=\frac{1}{I_s}C_i^2$$

$$\lambda_1\leqslant\Lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\Lambda_2\cdots\leqslant\lambda_i\leqslant\Lambda_i\leqslant\cdots$$

由此可见，挠性卫星姿态运动的自然频率为非约束模态频率，各约束模态与非约束模态对应地形成一个带通滤波器，模态增益越大，约束和非约束模态频率之差越大，模态带通滤波器的带宽越宽，姿态运动的振荡特性越显著。

在相平面上，控制对象的特性是：主体有一对极点位于原点，沿正、负虚轴，各阶非约束模态的极点都有一个对应的约束模态的零点为伴，零点比极点靠近原点，各阶模态的零点、极点在虚轴上交替分布。纯比例反馈闭路的根轨迹是：主体的极点由左半平面绕入一阶模态的零点，模态的极点沿虚轴趋向高阶模态的零点。因此，共位模型的挠性耦合是稳定的。抑制挠性振荡的最简易的方法是压缩控制闭合回路的带宽 ω_c，使非约束模态频率位于控制带宽之外。

参见姿态传递方块图 9.2-1 和图 9.2-2，控制回路带宽和模态截断选取的综合准则可归结为[80]。

对于约束模型

$$k_i\left(\frac{\omega_c}{\lambda_i}\right)^2 \ll 1, \qquad i = 1,2,\cdots$$

对于非约束模型

$$K_i\left(\frac{\omega_c}{\Lambda_i}\right)^2 \ll 1, \qquad i = 1,2,\cdots$$

下文简述滚动-偏航双通道耦合模型。

以挠性附件为沿俯仰轴旋转的挠性太阳帆板为例。它的平面外弯曲振动，同时影响滚动和偏航姿态的振荡；帆板转过额定位置引起整星质量特性的变化(惯量积)，也是双通道耦合的因素。此外，还包括刚体章动和对地定向的轨道运动的耦合。令帆板处在额定位置(帆板面的法线与偏航轴平行)的模态增益矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第一行对应平面外弯曲，第二行对应平面扭转，第三行对应平面内弯曲，令帆板沿俯仰轴转动的坐标转换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

如仅考虑帆板平面外弯曲，则挠性耦合阵可简化为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \cos\beta \\ 0 \\ -\sin\beta \end{bmatrix} [C_{11} \cdots C_{1i} \cdots]$$

式中 $\boldsymbol{C}_{1i}$ 为挠性耦合系数阵第一行 $\boldsymbol{C}_1$ 的元素。如仅考虑挠性动力学，姿态的滚动-偏航的耦合方程可列为

$$I_x\ddot{\varphi} + \cos\beta \cdot C_1\ddot{\eta} = T_x$$

$$I_z\ddot{\psi} - \sin\beta \cdot C_1\ddot{\eta} = T_z$$

$$\ddot{\eta} + \lambda^2\eta + \cos\beta \cdot C_1^{\mathrm{T}}\ddot{\varphi} - \sin\beta \cdot C_1^{\mathrm{T}}\ddot{\psi} = 0$$

为显示双通道的耦合作用，列出传递函数和传递框图 9.2-3：

$$\begin{bmatrix} G_{xx}(s) & G_{xz}(s) \\ G_{zx}(s) & G_{zz}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_x(s) \\ T_z(s) \end{bmatrix}$$

式中

$$G_{xx}(s) = I_x s^2\left[1 - \cos^2\beta \sum_i \frac{s^2 C_{1i}^2 / I_x}{s^2 + \lambda_i^2}\right]$$

$$G_{zz}(s) = I_z s^2\left[1 - \sin^2\beta \sum_i \frac{s^2 C_{1i}^2 / I_z}{s^2 + \lambda_i^2}\right]$$

$$G_{xz}(s) = G_{zx}(s) = \cos\beta \sin\beta \sum \frac{s^4 C_{1i}^2}{s^2 + \lambda_i^2}$$

相应的特征方程为

$$\left[1 - \sum_i \left(\frac{\cos^2\beta}{I_x} + \frac{\sin^2\beta}{I_z}\right) \frac{s^2 C_{1i}^2}{s^2 + \lambda_i^2}\right] = 0$$

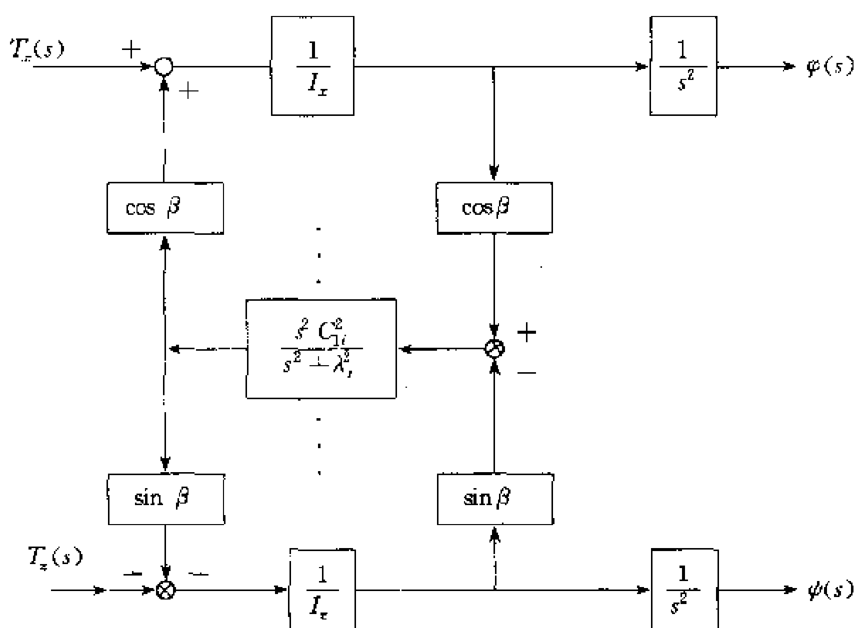


图 9.2-3

9.2.2 非共位模型

对于空间观测并要求高精度指向的科学卫星，姿态敏感器直接安装在科学仪器平台上，而控制执行机构(如飞轮等)位于主体，平台通过旋转关节与主体联接[81]。姿态敏感器的测量除主体的姿态运动外，还包含平台自身的挠性振动。对于一维姿态测量方程可表示为

$$y = \theta + l\psi \cdot \eta$$

式中，θ 为主体姿态角，l 为姿态敏感器的观测系数，ψ 为敏感器安装部位的结构振型，η 为模态坐标。因此，挠性体振动的模态坐标直接参与姿控反馈。参见 9.2.1 节的共位模型的姿态动力学传递方程(9.2-4)，非共位模型的姿态传递函数可列为

$$\begin{aligned} y(s) &= \theta(s)(1 + l\psi \cdot \eta(s)) \\ &= \frac{1}{I_s s^2}\left[1 - \sum_i \frac{s^2 k_i}{s^2 + \lambda_i^2}\right]^{-1}\left[1 + l\sum_i \frac{-s^2\psi_i C_i}{s^2 + \lambda_i^2}\right]T(s) \\ &= \frac{1}{I_s s^2 \prod_i (s^2/\Lambda_i^2 + 1)}\left[\prod_i (s^2/\lambda_i^2 + 1) - ls^2 \sum_i \frac{\psi_i C_i}{\lambda_i}\prod_{j\neq i}(s^2/\lambda_j^2 + 1)\right]T(s) \end{aligned}$$

式中 ψ_i 为振型阵 ψ 行的元素。此传递函数的极点与共位模型的极点相同，但零点的分布与敏感器的安装部位有关，显得无一定规律，与极点无伴随关系，挠性模态起不稳定作用。

以单一姿态和模态为例，挠性平台与主体之间仅有扭转弹性联接，见图 9.2-4。

令主体的姿态转角为 θ_1，沿同一方向，平台相对主体的转角为 θ_2，扭转弹性系数为 K，两者的惯量为 I_1，I_2，则有姿态转动动力学方程

$$I_1\ddot{\theta}_1 + I_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) = T$$

$$I_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + K\theta_2 = 0$$

平台上姿态敏感器测量为 $y=\theta_1+\theta_2$。在控制力矩 T 的作用下，它的传递函数可导出为

$$\frac{y(s)}{T(s)} = \frac{\theta_1(s)}{T(s)}\left[1 + \frac{\theta_2(s)}{\theta_1(s)}\right] = \frac{\Lambda^2}{Is^2(s^2 + \Lambda^2)}$$

式中

$$I = I_1 + I_2, \qquad \Lambda^2 = \frac{\lambda^2}{1 - I_2/I}, \qquad \lambda^2 = \frac{K}{I_2}$$

式中，λ^2，Λ^2 分别为约束和非约束模态频率；I_2/I 为模态增益。传递函数除双零的极点外，仅有单个模态极点，无模态零点伴随。因而闭路（比例反馈）根轨迹从模态极点直接进入右半面，导致非共位挠性耦合的不稳定性。它的物理过程是，外力矩使主体转动，但平台相对主体朝相反方向转动，姿态敏感器的测量引起更大的力矩需求，形成发散式振荡。对于非共位模式，更为严重的问题是，挠性体动力学参数的一些变化会使模态零点跳入与原先不同的模态极点区，使反映控制对象特性的零极点分布发生根本性变化，导致控制品质严重恶化或失控。因此，非共位的控制问题比共位控制困难得多[82]。

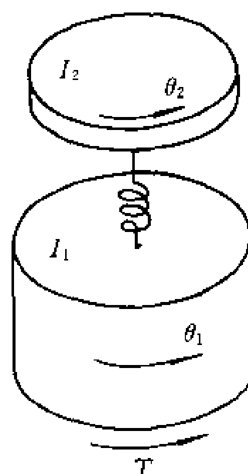


图　9.2-4

9.3　控制回路设计分析

通常挠性卫星动力学包含高阶模态，应用现代控制理论的状态空间法导致高阶校正的要求，并且对模态的不确定性较敏感[83]，需加以鲁棒性设计。此外，状态空间法缺乏直观性，隐含克服挠性不稳定性的物理过程。与此相反，古典控制设计是基于揭示挠性结构与控制相互作用的物理实质，易于理解各种参数影响的物理过程，因此具有较好的工程实践意义[84]。

下文概述挠性卫星控制回路古典法设计的若干基本原则。

9.3.1　比例-微分控制

比例加微分反馈是控制刚体姿态转动的典型方式，也是镇定挠性模态振荡的基本措施。如直接采用速率陀螺（其带宽远大于模态频率）测量姿态速率，可得纯超前环节（$as+1$），此零点 $\left(-\frac{1}{a},0\right)$ 将全部模态极点的闭路根轨迹拉入左半面，绕行进入对应的伴随模态零点，刚体的双零极点的根轨迹围绕比例-微分的零点，见图 9.3-1。控制回路全模态全局稳定，并可获得高性能的宽带控制。但对非共位控制模式，模态极点近旁无相伴的零点，极点的根轨迹进入右半个平面，见图 9.3-2，需采用二阶超前校正才能实现镇定。

9.3.2　模态溢出

姿态敏感器和姿态执行机构（反作用飞轮）的时延是引起挠性卫星姿控回路不稳定的根本因素。两者的时延环节 $1/((bs+1)(cs+1))$ 与比例-微分环节（$as+1$）的结合反映在实轴上具有两个极点 $\left(-\frac{1}{b},0\right)$，$\left(-\frac{1}{a},0\right)$ 和一个零点 $\left(-\frac{1}{a},0\right)$，形成斜率为 $\pm 60°$ 的根轨迹渐近线。因此，根轨迹必定进入右半平面，渐近线与实轴的交点位于实轴上零、极点的重心，时延 b，c 越大，零、极点重心越靠近原点，渐近线与虚轴的交点与实轴上零、极点重心离原点的距离成正比。在虚轴上，被正负渐近线包围（与原点同区）的模态极点的根轨迹都进入左半平面，再绕入

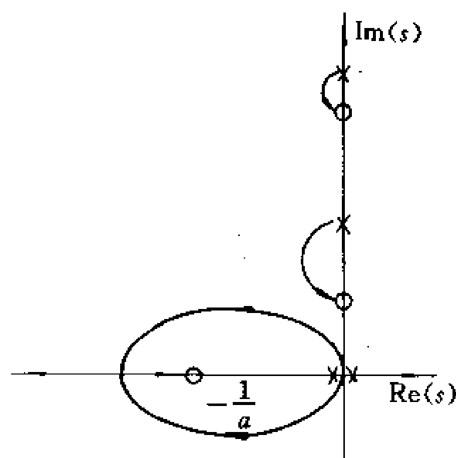


图 9.3-1

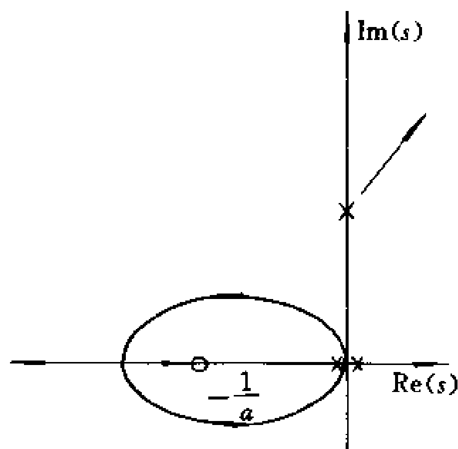


图 9.3-2

相应的伴随模态零点；对于渐近线之外的模态极点，其根轨迹首先进入右半平面，再绕入相应的模态零点，这就是模态溢出问题[83,85]。参见图 9.3-3，一阶模态稳定，二阶模态不稳定。避免模态溢出的根本措施是减少敏感器和执行机构的时间常数 b，c，增强微分反馈 a，使实轴上零、极点的重心左移，使根轨迹渐近线包围虚轴上更多的高阶模态，见图 9.3-4，二阶模态未溢出。

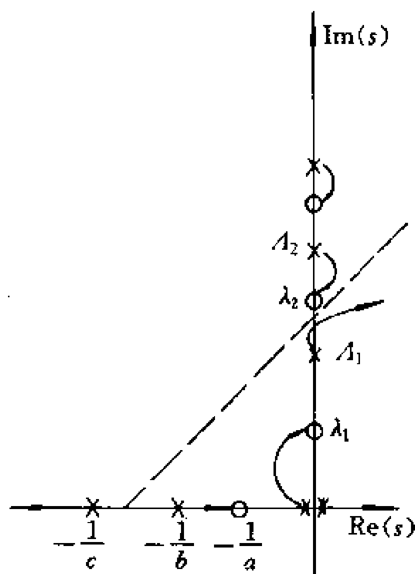


图 9.3-3

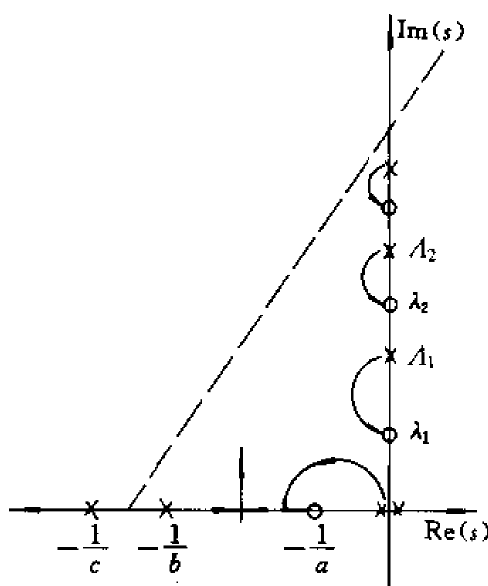


图 9.3-4

9.3.3 增益-相位稳定

压缩控制回路的带宽是抑制挠性模态振荡最简易的基本方法。刚体控制回路的自然频率(控制回路增益的方根)通常应选为一阶模态频率的 1/3。如因任务需求，为获得宽带高性能的

控制回路，一阶模态频率接近或落入系统带宽内，需用特定的成形滤波器兼顾带宽和稳定的要求。

增益稳定是使系统稳定在选定的增益和阻尼比的情况下。对于某些特定的引起不稳定的模态频率引入成形滤波器，降低控制回路中该频率的传递，或针对控制过程的动态振荡，增大该频率的反馈，抑制振荡，镇定模态引起的不稳定作用。

相位稳定应用于结构阻尼小、增益要求高的系统，对于某些特定频率引入成形滤波器，形成较好的主动阻尼。

因此，采用二阶成形滤波器，协调增益和相位的需求，是挠性卫星控制回路设计的有效方法。文献[84]称此类滤波器为结构滤波器，并给出了全面的论述。

结构滤波器传递函数的一般形式为

$$\frac{s^2/\omega_z^2 + 2\xi_z s/\omega_z + 1}{s^2/\omega_p^2 + 2\xi_p/\omega_p + 1}$$

它的零、极点频率为 ω_z，ω_p 和阻尼比为 ξ_z，ξ_p。选择不同的零点和极点的配置，构成各种特色的成形滤波器，如超前、带通、陷阱谐振。因阻尼比都为正值，上述各类滤波器又统称为最小相位滤波器。如 ξ_z 选为负值，则称为非最小相位滤波器。

1. 陷阱滤波器

陷阱滤波器的零、极点配置为 $\omega_z=\omega_p$，$\xi_p>\xi_z$，$\xi_z\ll 1$，其频率响应见图 9.3-5，陷阱的陡度决定于极点的阻尼比 ξ_p。陷阱滤波器用于增益稳定方式，将陷阱频率（零点频率）设置在不稳定模态极点频率处，在控制回路中，该模态频率的振荡受到抑制和吸收，确保该模态不会因反馈控制引起不稳定作用。从相位角度，陷阱滤波器为该频率的相位超前起镇定作用。在根轨迹相图 9.3-6 上，陷阱滤波器的零点设置在模态的极点附近，滤波器的零点吸收模态极点，不进入右半平面；滤波器的极点远离虚轴，具有阻尼性质。陷阱滤波器是克服模态溢出的有效方法。同样，陷阱滤波器也是镇定非共位控制的有效方法。陷阱滤波器零点设置在孤立的不稳定极点（图 9.3-2）附近，吸引该极点不进入右半平面。

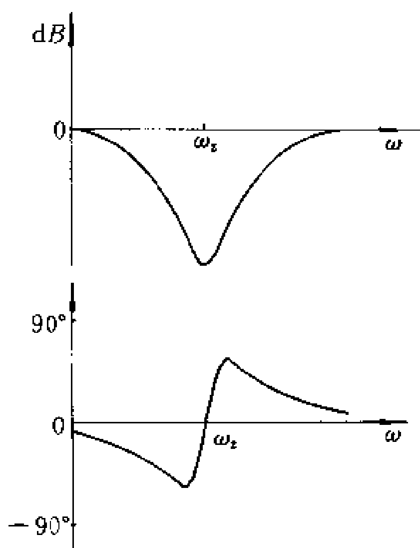


图　9.3-5

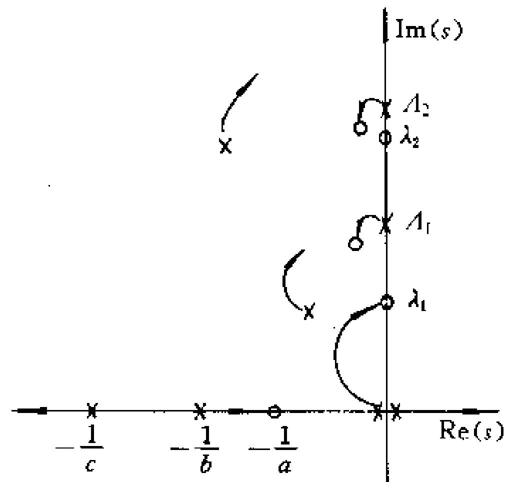


图　9.3-6

2. 谐振带通滤波器

谐振带通滤波器的零、极点配置是 $\omega_z=\omega_p$，$\xi_z>\xi_p$，$\xi_p\ll 1$，其频率响应见图 9.3-7。谐振滤波器也是一种增益稳定。令谐振滤波器的极点频率设置在特定模态频率附近，通过加强该频率的负反馈，起到抑制振荡的效用。在根轨迹相图 9.3-8 上，一阶模态的零点与滤波器的极点相消。在滤波器零点的影响下，一阶模态的极点根轨迹由左半平面绕入趋向二阶模态的零点；二阶模态的极点首先进入左半平面，然后越过虚轴。因此，引用此滤波器，可将控制回路的带宽扩大到包含一阶模态。

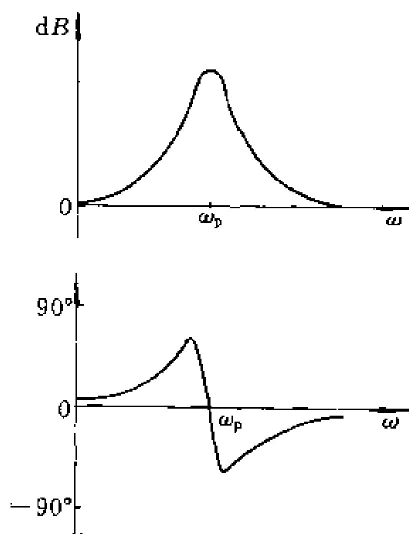


图 9.3-7

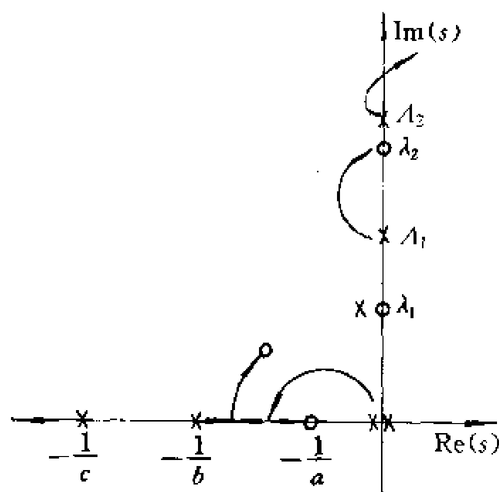


图 9.3-8

3. 超前滤波器

超前滤波器的零、极点配置为 $\omega_z<\omega_p$，$\xi_z<\xi_p$，其频率响应见图 9.3-9。令滤波器的零点设置在非共位控制模型的模态极点之下，吸引其根轨迹进入零点，见图 9.3-10。而滤波器自身的

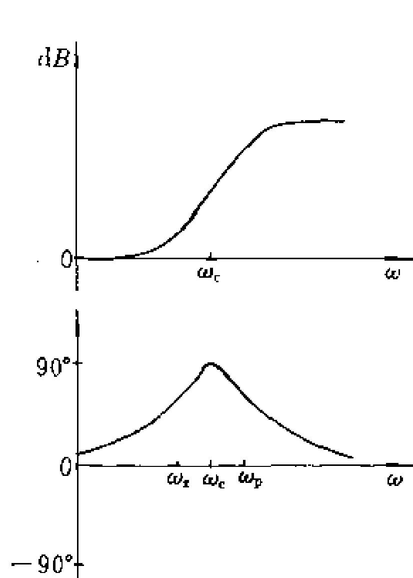


图 9.3-9

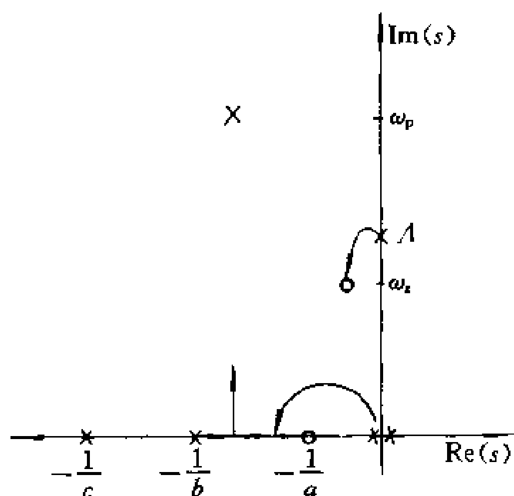


图 9.3-10

极点远离虚轴，利用相位稳定方式镇定系统。此类滤波器亦用于挠性卫星的共位控制[86]。

4. 非最小相位滤波器

非最小相位滤波器的特点是它的零点位于右半平面，即 $\xi_z<0$，当 $|\xi_z|\ll 1$ 时，其频率响应见图 9.3-11，形成非最小相位陷阱滤波器，与最小相位陷阱滤波器相比，有更大的相位范围，可较好地协调增益和相位稳定。从根轨迹角度，右半平面的零点更有效地把极点根轨迹压向左半面。状态空间的最优设计也有类似的结果[83]。

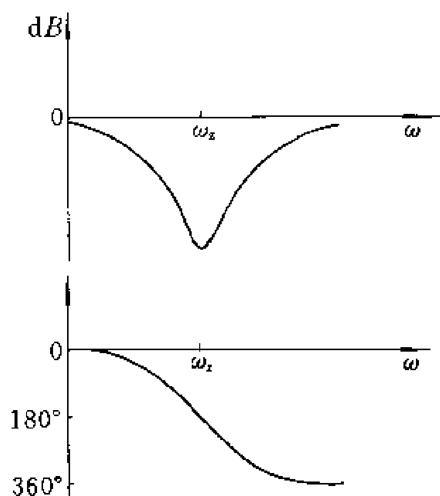


图 9.3-11

参考文献

[1] Deutsch R. Orbital Dynamics of Space Vehicles. Englewood cliffs, Prentice-Hall, 1963

[2] 刘林. 人造地球卫星运动理论. 北京:科学出版社,1974,第二章

[3] Roy A E. Orbital Motion. Bristol, Hilger, 1978

[4] Cutting E. Orbit Analysis for SEASAT-A. Journal of Astronautical Sciences 1978, Vol. 26, No. 4 p. 315

[5] Karrenberg H K. Orbit Synthesis. Journal of Astronautical Sciences 1969, Vol. 17 No. 3, p. 128

[6] Soop E M. Handbook of Geostationary Orbits. Kluwer Academic Publishers, 1994, chaptev 2.

[7] Walker J G. Satellite Coustellations. Journal of the British Interplanetary Society 1984, Vol. 37, p. 559

[8] Rider L. Analytic Design of Satellite Constellations for Zonal Earth Coverage Using Inclined Circular Orbits. Journal of the Astronautical Sciences 1986, Vol. 34, No. 1

[9] Pocha J J. An Introduction to Mission Design for Geostationary Satellite. Reidel Publishing Company, 1987, chapter 6.

[10] Moulton F R. An Introduction to Celestial Mechanics. Macmillan Co. 1970

[11] Meirovitch L. Method of Analytical Dynamics. McGraw-Hill, 1979

[12] Deutsch R. Orbital Dynamics of Space Vehicles. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1963

[13] 刘林. 人造地球卫星运动理论. 北京:科学出版社,1974. 第三章

[14] Roy A E. Orbital Motion. Bristol, Hilger, 1978

[15] Lerch F. Gravity Model Improvement Using GEOS. Journal of Geophysical Research 1979, Vol. 84, July

[16] Ginsberg L J. Orbit planners Handbook. Aerospace Corporation, 1976

[17] Wagner C A. The Drift of a 24 Hour Satellite Due to Earth Gravity Filld Through Fourth Order. NASA TND-2103, 1964

[18] Flury W. Station Keeping of a Geostationary Satellite. Review of Scientific and Technique CECLES/CERS 1973, Vol. 5, April-July

[19] Frick R H. Orbit Regression of Synchronous Satellite due to the Combined Gravitational Effects of the Sun, the Moon and the Oblate Earth. Rand Corp. Report R-454, 1967

[20] Kamel A, Tibbitts R. Some Useful Results on Initial Node Locations for Near-Equatorial Circular Satellite Orbits. Celestial Mechanics 1973, Vol. 18 p. 45

[21] Kozai Y. On the Effects of the Sun and Moon upon the Motion of Satellite. Smithsonian Institute, Astrophysical Observatory, Special Report-349, 1973

[22] Shrivastave S K. Orbital Perturbation and Stationkeeping of Communication Satellite. J. Spacecraft and Rockets 1978, No. 3

[23] Marec J P. Optimal Space Trajectories. Elsevier Scientific Publishing Company, 1979

[24] Lawden D F. Impulsive Tranfer between Elliplical Orbits. in Optimization Techniques, Edited by Leitmann G., Academay Press, 1962

[25] Bender D F. Optimum Coplanar Two-Impulse Transfter Between Elliptic Orbits. Aerospace Enginering 1962, Oct.

[26] Serreault B. Acquistion and Correction of SPOT-1 Orbit. IAF-86-228, 1986

[27] Kechichian J A. Topex Orbit Sustenance Maneuver Design. AIAA 20th Aerospace Science Meeting, 1982

[28] Spurlock O F. Optimum Launch Trajectory for the ATS-E Mission. AIAA paper 70-1051,1970

[29] Kamhpunis H J. Constraints of the Firing of the Apogee Motor. NASA N70-16137,1970

[30] Dickmanns E D. Positioning of a Geostationary Satellite as a Rendezvous Problem. 6th IFAC Symposium on Automatic Control in Space, 1974

[31] Petruzzo C J. A Geostationary Longtitude Acquisition Planning Algorithm. AAS/AIAA Astrodynamics Conference, 1977

[32] Flury W. Hohmann-Transfer and Stochastisch Optimale Aufstiegshannen Von Geostationary Satelliten. Walter-Hohmann Symposium, Raumflugmechanik, 1980

[33] Pocha J J. An Introduction fo Mission Design for Geostationary satellite, Reidel Publishing Compawy, 1987,Chapter 3,4

[34] Soop E M. Handbook of Geostationary Orits, Kluwer Academic Publishers, 1994, Chapter 6,7

[35] Bate R R. Fundaments of Astrodynamics. Dover Publication Inc, 1971

[36] Cappelari J D. Mathmatical Theory of the GODDARD Trajectory Determination System. NASA N70-24291-24302,1976

[37] Tapley B D. Statistical Orbit Determination Theory. Recent Advances in Dynamical Astronomy, Dordrecht Reidel, 1973

[38] Gounley R, Wtite R. Autonomous Satellite Navigation by Stellar Refraction. Journal of Guidance and Control 1984, No. 2

[39] Milliken R J, Zoller C J. Principle of Operation of Navstar and System, Characteristics. Navigation, 1987, vol. 25, Summer, p. 95

[40] Fang B T. Trilateration and Extension to Global Positioning System Navigation. Journal of Guidance and Control 1986, No. 6

[41] Fang B T. Geometric Dilution of Precision in Global Positioning System Navigation, Journal of Guidance and Coutrol 1981, No. 1

[42] Goldstein H. Classical Mechanics. Addison-wesley, 1950

[43] Thompson W T. Introduction to Space Dynamics. Wiley New York, 1961

[44] Kaplan M H. Modern Spacecraft Dynamics and Control. John Wiley Sons, 1976

[45] Wertz R. Edited. Spacecraft Attitude Determination and Control. D. Reidel Holland, 1978

[46] Hughes P C. Spacecraft Attitude Dynamics. Wiley New York, 1986

[47] Wertz R. Edited. Spacecraft Attitude Determination and Control. D. Reidel Holland, chapter 13. 1978 chatper 10.

[48] Lefferts E J, Markley F L, Shuster M D. Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation. Journal of Guidance and Control, 1982, Vol. 5, No. 3

[49] Gai E, Dlay K. Star-Sensor-Based Satellite Attitude/Attitude Rate Estimator. Journal of Guidance and Control 1985, vol. 8, No. 5

[50] Psiaki M L. Three-Axis Attitude Determination Via Kalman Filtering of Magnetometer Data. Journal of Guidance and Control 1990, Vol. 13 No. 3

[51] Shuster M D. Approximate Algorithm for Fast Optimal Attitude Computation. AIAA Guidance and Control Confernce, 1978

[52] Hevzl G G. Introduction to Passive Nutation Dampers. Proc. of Fifth Mechanisms Symposium, 1970

[53] Haines G A. Eddy Current Nutation Dampers for Dual-Spin Satellite. Journal of Astronautical Sciences 1973, No. 1

[54] Netherland Spece Division. Study in Passive Nutation Dampers. NASA N76-22291

[55] Smay J W. Dual-Spin Spacecraft Stabilization Using Nutation Feedback and Inertia Coupling. Journal of Spacecraft and Rockets 1976, No. 11

[56] Grasshoff L H. An on-board Closed Loop Nutation Control System for A Spin-Stabilized Spacecraft. Jourmal of Spacecraft and Rockets 1968, No. 4

[57] Dougherty H J. Attitude Stabilization for Synchronous Communication Satellite Employing Narrow-Beam Antennas. Journal of Spacecraft and Rockets 1971, No. 8

[58] Lebsok L K. High Pointing Accuracy with Momentum Bias Attitude Control System. Journal of Guidance and Coutrol 1980, No. 3

[59] Terasaki R M. Dual Reaction Wheel Control of Spaceraft Pointing. Symposium of Attitude Stabitization and Control of Dual-Spin Spacecraft, 1967

[60] Lyons M G. Double Gimballed Reaction Wheel Attitude Control System for High Pointing Attitude Communication Satellite. AIAA paper 71～949

[61] Barba P M. Satellite Attitude Acquisition by Momemtum Transfer. AAS paper 75-043

[62] Kluiters M A. Flat spin Recovery of a Spinning Satellite. AIAA paper 76～1946

[63] Hughes P C. 同[46]

[64] Ramos A. Air Bearing Testing of Skewed Reaction Wheel System for Attitude Control. COMSAT Technical Review 1979, Vol. 9 No. 1

[65] Fleming A W. Precision Three-Axis Attitude Control Via Skewed Reaction Wheel Momentum Management. AIAA paper 79～1719

[66] Tockapb E H. Проблемы Управления гиросиловыми стабилизаторами. Космические Исследованця 1978 No. 2

[67] Токарb E H. О Рациональном построенич систем гиросиловых стабилизаторов. Космические Исследования 1978, No. 1

[68] Vadali S R. Preferred Gimbal Angles For Single Gimble Control Moment Gyros. AIAA paper 89～3477 CP

[69] Bedrossian N S. Steering Law Design for Redundant Single-Gimbal Control Moment Gyroscopes. Journal of Guidance and Contral 1990, No. 6

[70] Bedrossian N S. Redundant Single Gimbal Control Moment Gyroscope Singularity Analysis. Jornal of Guidance and Control 1990, No. 6

[71] Branets Y N. Development of the Attitude Control System Using Single-Axis Control Moment Gyro For Long-Term Orbiting Space Station. IAF paper 87～04

[72] Mihaielov M. Single Gimbal Control Moment Gyroscope System. Lecture Notes, Beijing, 1995

[73] Schwarzschild M. Attitude Acquisition System for Communication Spacecrafe. Journal of Guidance and Control 1991, No. 3

[74] Wie B. Quaternion Feedback Regulator For Spacecraft Eigenaxis Retations. Journal of Guidance and Control 1984, No. 3

[75] Van Den Bosch P. Adaptive Attitude Control for Large-angle Slew Manoeuvres. Automatica 1986, Vol. 22, No. 2 p. 209

[76] Likins P W. Dynamics and Control of Flexible Space Vehicles. JPL, TR-32-1329, 1970

[77] Williams C J H. Mathmatical Methods in Flaxible Spacecraft Dynamics. ESA, CR(P)-915, 1976

[78] Przemiemiecki J S. Theory of Matrix structural Analysis. 1968

[79] Zienkiewicz. O C. The finite Element Method in Eugineering Science. 1971

[80] Hughes P C. Dynamics of Flexible Space Vehicles With Active Attitude Control. Journal of Celestial Mechanics 1974, No. 9, P. 21

[81] Chodas J L. Design of the Galileo Scan Platform Control. Journal of Guidauce and Control, 1983, Vol. 7, No. 4

[82] Cannon R H. Experiments in Control of Flexible Stractures With Noncolocated Seusors and Actuators. Journal of Guidance and Control 1984, Vol 7. No. 5

[83] Marfin G D. Bryson A E. Attitude Control of a Flexible Spacecraft. Journal of Guidance and Control 1980. No. 1

[84] Wie Bong. New Generalized Structural Filtering Concept for Active Vibration Control Synthesis. Journal of Guidance and Coutrol No. 2 1989

[85] Kida T. A Flight experiment of Flexible Spacecraft Attitude Control. 39th Congress IAF, paper 88-044

[86] Likins P W. Results of Flexible Spacccraaft Attitude Control Studies Utilizing Hytrid Coordinates. AIAA paper 70-20

[87] Harris R S. Three Axis Control of spacecraft with Large Flexible Appendages. N76-27352, 1976.